मा. या. विगोद्स्की

सरल गणित निदर्शिका

М.Я. ВЫГОДСКИЙ

СПРАВОЧНИК ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ

ТАБЛИЦЫ, АРИФМЕТИКА, АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРИЯ, ТРИГОНОМЕТРИЯ, ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

मा. या. विगोद्स्की

सरल गणित निदर्शिका

(सारणियां, अंकगणित, बीजगणित, ज्यामिति, त्रिकोणमिति, फलन और ग्राफ)

अनुवादकः देवेंद्र प्र. वर्मा

मीर प्रकाशन
मास्को

पीपुल्स पब्लिशिंग हाउस (प्रा.) लिमिटेड
५ ई, रानी झांसी रोड, नई दिल्ली-११००५५

M.Y. Vygodsky

MATHEMATICAL HANDBOOK: ELEMENTARY MATHEMATICS

НА ЯЗЫКЕ ХИНДИ

सोवियत संघ में मुद्रित

विषय-सूची

III. बीजगणित

IV. ज्यामिति

A. तलमिति

B. व्योममिति

V. त्रिकोणमिति

VI. फलन, ग्राफ

भूमिका

1. निर्दशिका की रचना दो उद्देश्यों को ध्यान में रख कर की गई है। प्रथमतः, स्पर्शज्या क्या है, प्रतिशत कैसे निकालते हैं, वर्ग समीकरण के मूल ज्ञात करने के लिए कौन-से सूत्र हैं, आदि सूचनाएं इसमें जल्द से जल्द मिल सकती हैं। सभी परिभाषाओं, नियमों, सूत्रों और साध्यों के साथ-साथ उदाहरण भी दिये गये हैं। जहां-जहां जरूरत है, यह बता दिया गया है कि अमुक नियम किन परिस्थितियों में लागू होता है, और किन गलतियों से बचना चाहिए।

दूसरे, जैसा कि लेखक ने चाहा था, यह निर्दशिका सरल गणित का पाठ दुहराने और उसके व्यावहारिक उपयोगों के साथ प्रथम परिचय प्राप्त करने में एक सर्वसुलभ पुस्तक सिद्ध हो सकती है।

2. निर्दशिका और पाठ्य-पुस्तक : निर्दशिका से पढ़ाई भी हो सकती है—इस विचार पर शंका की जा सकती है। पर पाठकों के अनगिनत पत्रों से पता चलता है कि उनका अधिकांश भाग निर्दशिका का उपयोग पाठ्य-पुस्तक की भाँति ही करता है और इसमें उन्हें सफलता भी मिली है।

हो सकता है कि "निर्दशिका" नाम इस पुस्तक के चरित्र को पूरी तरह उजागर न करता हो, पर इतने संस्करण हो चुकने के बाद इसका नाम बदलने में अब शायद ही कोई तुक है। अगर दूसरी तरह देखा जाये, तो इसका नाम "पाठ्यपुस्तक" भी नहीं रखा जा सकता। यह निर्दशिका पाठ्य-पुस्तक से मौलिकतः भिन्न है।

स्कूली पाठ्यपुस्तक में, विशेषकर यदि वह उच्च कक्षाओं के लिए लिखी गयी है, मुख्य भूमिका विवेचना की होती है, तथ्यपरक सामग्री तर्क के बोझ से दबी रहती है। कम से कम विद्यार्थियों को ऐसा ही लगता है। प्रस्तुत पुस्तक में तथ्यपरक सामग्री की भूमिका मुख्य है। इसका मतलब यह नहीं है कि इसमें विवेचना या तर्क है ही नहीं। कहीं-कहीं सूत्रों की स्थापना का तार्किक आधार भी दर्शाया गया है; पर यह सिर्फ विशेष परिस्थितियों में। उदाहरणार्थ, कभी किसी अनुच्छेद के मुख्य विचार पर जोर देने की आवश्यकता पड़ जाती है, तो कभी किसी परिणाम के प्रति स्वाभाविक अविश्वास की भावना को

दूर करना जरूरी हो जाता है (जैसे मिश्र संख्याओं के साथ की संक्रियाओं में)। प्रमाण कहां जरूरी है और कहां नहीं,—इसके निर्णय में लेखक ने अपने अध्यापन-कार्य के अनुभव का सहारा लिया है।

3. निर्दशिका का उपयोग कैसे करें : आशु निदर्शन विस्तृत अनुक्रमणिका से मिलता है। यदि पाठक किसी नियम, प्रमेय या हल करने की किसी विधि का नाम भूल गया हो तो उसके लिए ब्योरेवार विषय-सूची दी गयी है।

इस पुस्तक में किसी एक विषय का निदर्शन करते वक्त अन्य अनुच्छेदों (§) को भी देखने का निर्देश मिल सकता है, जहां अन्य आवश्यक पारिभाषिक शब्द समझाये गये हैं। इन निर्देशों की उपेक्षा न करें! यह भी सलाह दी जाती है कि एक पारिभाषिक शब्द का निदर्शन करने के लिए सिर्फ उसकी परिभाषा न ढूंढें; वह पूरा अनुच्छेद ही पढ़ डालें, जिसमें उक्त शब्द समझाया गया है।

पुस्तक के हर भाग में ऐतिहासिक सर्वेक्षण भी दिये गये हैं। इन्हें ध्यान-पूर्वक पढ़ लेना अत्यंत लाभदायक होगा। ये पुस्तक के आवश्यक अंग है और अन्य सामग्रियों को सरलतापूर्वक आत्मसात करने में सहायक होते हैं।

निर्दशिका मे पढ़ाई करने वाले पाठकों को उदाहरणों पर विशेष ध्यान देना चाहिए। जिन प्रमाणों को यहाँ छोड़ दिया गया है, उन्हें पाठक अपनी पाठ्यपुस्तक से इस पुस्तक के साथ-साथ पढ़ते जा सकते हैं, या इस पुस्तक को खत्म कर लेने के बाद पढ़ ले सकते हैं। लेकिन यदि पाठक उदाहरणों और प्रश्नों को स्वयं हल करने का अभ्यास नहीं करेंगे, तो उनके लिए निर्दशिका और पाठ्यपुस्तक मिल कर भी पर्याप्त प्रभावशाली सहायक नहीं सिद्ध हो सकेंगी।

[गणित के पठन-पाठन की भारतीय और यूरोपीय, प्राचीन और नवीन परंपराओं (शब्दावली, विधि आदि) के बीच "सेतु" के रूप में अनुवादक ने कहीं-कहीं कुछ अतिरिक्त टिप्पणी देने की आवश्यकता समझी है, जो यथास्थान बड़े कोष्ठकों में अंतर्विष्ट हैं, ध्यान रखा गया है कि ये मूल पाठ के प्रवाह में बाधक न बनें, वरन् उसे और भी सुगम बनायें।]

I. सारणी

§ 1. अक्सर प्रयुक्त स्थिरांक

परिमाण	n	$\log_{10} n$	परिमाण	n	$\log_{10} n$
π	3.1416	0.4971	$\sqrt[3]{1:\pi}$	0.6828	$\bar{1}.8343$
2π	6.2832	0.7982	$\sqrt[3]{\pi:6}$	0.8060	$\bar{1}.9063$
3π	9.4248	0.9743	$\sqrt[3]{3:4\pi}$	0.6204	$\bar{1}.7926$
4π	12.5664	1 0992	$\sqrt[3]{\pi^2}$	2.1450	0.3314
$4\pi:3$	4.1888	0 6221	e	2.7183	0.4343
$\pi:2$	1.5708	0.1961	e^2	7.3891	0.8686
$\pi:3$	1.0472	0.0200	$\sqrt{e}$	1.6487	0.2171
$\pi:4$	0.7854	$\bar{1}.8951$	$\sqrt[3]{e}$	1.3956	0.1448
$\pi:6$	0.5236	$\bar{1}.7190$	$1:e$	0.3679	$\bar{1}.5657$
$\pi:180$	0.0175	$\bar{2}.2419$	$1:e^2$	0.1353	$\bar{1}.1314$
$2:\pi$	0.6366	$\bar{1}.8039$	$\sqrt{1:e}$	0.6065	$\bar{1}.7829$
$180:\pi$	57.2958	1.7581	$\sqrt[3]{1:e}$	0.7165	$\bar{1}.8552$
$10800:\pi$	3437.7467	3.5363	$M=\log e$	0.4343	$\bar{1}.6378$
$648000:\pi$	206264.81	5.3144	$\frac{1}{M}=\ln 10$	2.3026	0.3622
$1:\pi$	0.3183	$\bar{1}.5029$	$2!$	2	
$1:2\pi$	0.1592	$\bar{1}.2018$	$3!$	6	
$1:3\pi$	0.1061	$\bar{1}.0257$	$4!$	24	
$1:4\pi$	0.0796	2.9008	$5!$	120	
π^2	9.8696	0 9943	$6!$	720	
$2\pi^2$	19.7392	1.2953	$7!$	5040	
$\sqrt{\pi}$	1.7725	0.2486	$8!$	40,320	
$\sqrt{2\pi}$	2.5066	0.3991	$9!$	362,880	
$\sqrt{\pi:2}$	1.2533	0.0981	$10!$	3,628,800	
$\sqrt{1:\pi}$	0.5642	$\bar{1}.7514$	$11!$	39,916,800	
$\sqrt{2:\pi}$	0.7979	$\bar{1}.9019$	$12!$	479,001,600	
$\sqrt{3:\pi}$	0.9772	$\bar{1}.9900$			
$\sqrt{4:\pi}$	1.1284	0.0525			
$\sqrt[3]{\pi}$	1.4646	0.1657			

§ 2. वर्ग, घन, मूल, प्रतीप, परिधि, वृत्त का क्षेत्रफल, नैसर्गिक लगरथ

(3 सार्थक अंकों की संख्याओं के लिए अंतर्वेशन का उपयोग करें, दे. § 65; इससे अंतिम अंक में थोड़ी सी अशुद्धि हो सकती है)

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\ln n$
1	1	1	1.000	3.162	1.000	2.154	4.642	1.000	3.14	0.785	0.00000
2	4	8	1.414	4.472	1.260	2.714	5.848	0.500	6.28	3.142	0.69315
3	9	27	1.732	5.477	1.442	3.107	6.694	0.333	9.42	7.069	1.09861
4	16	64	2.000	6.325	1.587	3.420	7.368	0.250	12.57	12.566	1.38629
5	25	125	2.236	7.071	1.710	3.684	7.937	0.200	15.71	19.635	1.60944
6	36	216	2.449	7.746	1.817	3.915	8.434	0.167	18.85	28.274	1.79176
7	49	343	2.646	8.367	1.913	4.121	8.879	0.143	21.99	38.484	1.94591
8	64	512	2.828	8.944	2.000	4.309	9.283	0.125	25.13	50.265	2.07944
9	81	729	3.000	9.487	2.080	4.481	9.655	0.111	28.27	63.617	2.19722
10	100	1000	3.162	10.000	2.154	4.642	10.000	0.100	31.42	78.540	2.30259
11	121	1331	3.317	10.488	2.224	4.791	10.323	0.091	34.56	95.033	2.39790
12	144	1728	3.464	10.954	2.289	4.932	10.627	0.083	37.70	113.097	2.48491
13	169	2197	3.606	11.402	2.351	5.066	10.914	0.077	40.84	132.73	2.56495
14	196	2744	3.742	11.832	2.410	5.192	11.187	0.071	43.98	153.94	2.63906
15	225	3375	3.873	12.247	2.466	5.313	11.447	0.067	47.12	176.72	2.70805
16	256	4096	4.000	12.649	2.520	5.429	11.696	0.062	50.27	201.06	2.77259
17	289	4913	4.123	13.038	2.571	5.540	11.935	0.059	53.41	226.98	2.83321
18	324	5832	4.243	13.416	2.621	5.646	12.164	0.056	56.55	254.47	2.89037
19	361	6859	4.359	13.784	2.668	5.749	12.386	0.053	59.69	283.53	2.94444
20	400	8000	4.472	14.142	2.714	5.848	12.599	0.050	62.83	314.16	2.99573

शेष

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	ln n
21	441	9261	4.583	14.491	2.759	5.944	12.806	0.048	65.97	346.36	3.04452
22	484	10,648	4.690	14.832	2.802	6.037	13.006	0.045	69.12	380.13	3.09104
23	529	12,167	4.796	15.166	2.844	6.127	13.200	0.043	72.26	415.48	3.13549
24	576	13,824	4.899	15.492	2.884	6.214	13.389	0.042	75.40	452.39	3.17805
25	625	15,625	5.000	15.811	2.924	6.300	13.572	0.040	78.54	490.87	3.21888
26	676	17,576	5.099	16.125	2.962	6.383	13.751	0.038	81.68	530.93	3.25810
27	729	19,683	5.196	16.432	3.000	6.463	13.925	0.037	84.82	572.55	3.29584
28	784	21,952	5.292	16.733	3.037	6.542	14.095	0.036	87.96	615.75	3.33220
29	841	24,389	5.385	17.029	3.072	6.619	14.260	0.034	91.11	660.52	3.36730
30	900	27,000	5.477	17.321	3.107	6.694	14.422	0.033	94.25	706.86	3.40120
31	961	29,791	5.568	17.607	3.141	6.768	14.581	0.032	97.39	754.77	3.43399
32	1024	32,768	5.657	17.889	3.175	6.840	14.736	0.031	100.53	804.25	3.46574
33	1089	35,937	5.745	18.166	3.208	6.910	14.888	0.030	103.67	855.30	3.49651
34	1156	39,304	5.831	18.439	3.240	6.980	15.037	0.029	106.81	907.92	3.52636
35	1225	42,875	5.916	18.708	3.271	7.047	15.183	0.029	109.96	962.1	3.55535
36	1296	46,656	6.000	18.974	3.302	7.114	15.326	0.028	113.10	1017.9	3.58352
37	1369	50,653	6.083	19.235	3.332	7.179	15.467	0.027	116.24	1075.2	3.61092
38	1444	54,872	6.164	19.494	3.362	7.243	15.605	0.026	119.4	1134.1	3.63759
39	1521	59,319	6.245	19.748	3.391	7.306	15.741	0.026	122.5	1194.6	3.66356
40	1600	64,000	6.325	20.000	3.420	7.368	15.874	0.025	125.7	1256.6	3.68888
41	1681	68,921	6.403	20.248	3.448	7.429	16.005	0.024	128.8	1320.2	3.71357
42	1764	74,088	6.481	20.494	3.476	7.489	16.134	0.024	131.9	1385.4	3.73767
43	1849	79,507	6.557	20.736	3.503	7.548	16.261	0.023	135.1	1452.2	3.76120
44	1936	85,184	6.633	20.976	3.530	7.606	16.386	0.023	138.2	1520.5	3.78419
45	2025	91,125	6.708	21.213	3.557	7.663	16.510	0.022	141.4	1590.4	3.80666

शेष

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\ln n$
46	2116	97,336	6.782	21.448	3.583	7.719	16.631	0.022	144.5	1661.9	3.82864
47	2209	103,823	6.856	21.679	3.609	7.775	16.751	0.021	147.7	1734.9	3.85015
48	2304	110,592	6.928	21.909	3.634	7.830	16.869	0.021	150.8	1809.6	3.87120
49	2401	117,649	7.000	22.136	3.659	7.884	16.985	0.020	153.9	1885.7	3.89182
50	2500	125,000	7.071	22.361	3.684	7.937	17.100	0.020	157.1	1963.5	3.91202
51	2601	132,651	7.141	22.583	3.708	7.990	17.213	0.020	160.2	2042.8	3.93183
52	2704	140,608	7.211	22.804	3.733	8.041	17.325	0.019	163.4	2123.7	3.95124
53	2809	148,877	7.280	23.022	3.756	8.093	17.435	0.019	166.4	2206.2	3.97029
54	2916	157,464	7.348	23.238	3.780	8.143	17.544	0.018	169.6	2290.2	3.98898
55	3025	166,375	7.416	23.452	3.803	8.193	17.652	0.018	172.8	2375.8	4.00733
56	3136	175,616	7.483	23.664	3.826	8.243	17.758	0.018	175.9	2463.0	4.02535
57	3249	185,193	7.550	23.875	3.849	8.291	17.863	0.017	179.1	2551.8	4.04306
58	3364	195,112	7.616	24.083	3.871	8.340	17.967	0.017	182.2	2642.1	4.06044
59	3481	205,379	7.681	24.290	3.893	8.387	18.070	0.017	185.4	2734.0	4.07754
60	3600	216,000	7.746	24.495	3.915	8.434	18.171	0.017	188.5	2827.4	4.09434
61	3721	226,981	7.810	24.698	3.936	8.481	18.272	0.016	191.6	2922.5	4.11087
62	3844	238,328	7.874	24.900	3.958	8.527	18.371	0.016	194.8	3019.2	4.12713
63	3969	250,047	7.937	25.100	3.979	8.573	18.469	0.016	197.9	3117.2	4.14313
64	4096	262,144	8.000	25.298	4.000	8.618	18.566	0.016	201.1	3217.0	4.15888
65	4225	274,625	8.062	25.495	4.021	8.662	18.663	0.015	204.2	3318.3	4.17439
66	4356	287,496	8.124	25.690	4.041	8.707	18.758	0.015	207.3	3421.1	4.18965
67	4489	300,763	8.185	25.884	4.062	8.750	18.852	0.015	210.5	3525.6	4.20469
68	4624	314,432	8.246	26.077	4.082	8.794	18.945	0.015	213.6	3631.7	4.21951
69	4761	328,509	8.307	26.268	4.102	8.837	19.038	0.014	216.8	3739.3	4.23411
70	4900	343,000	8.367	26.458	4.121	8.879	19.129	0.014	219.9	3848.4	4.24850
71	5041	357,911	8.426	26.646	4.141	8.921	19.220	0.014	223.1	3959.2	4.26268
72	5184	373,248	8.485	26.833	4.160	8.963	19.310	0.014	226.2	4071.5	4.27667

समापन

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\ln n$
73	5329	389,017	8.544	27.019	4.179	9.004	19.399	0.014	229.3	4185.4	4.29046
74	5476	405,224	8.602	27.203	4.198	9.045	19.487	0.013	232.5	4300.8	4.30407
75	5625	421,875	8.660	27.386	4.217	9.086	19.574	0.013	235.6	4417.9	4.31749
76	5776	438,976	8.718	27.568	4.236	9.126	19.661	0.013	238.8	4536.5	4.33073
77	5929	456,533	8.775	27.749	4.254	9.166	19.747	0.013	241.9	4656.6	4.34381
78	6084	474,552	8.832	27.928	4.273	9.205	19.832	0.013	245.0	4778.4	4.35671
79	6241	493,039	8.888	28.107	4.291	9.244	19.916	0.013	248.2	4901.7	4.36945
80	6400	512,000	8.944	28.284	4.309	9.283	20.000	0.012	251.3	5026.6	4.38203
81	6561	531,441	9.000	28.460	4.327	9.322	20.083	0.012	254.5	5153.0	4.39445
82	6724	551,368	9.055	28.636	4.344	9.360	20.165	0.012	257.6	5281.0	4.40672
83	6889	571,787	9.110	28.810	4.362	9.398	20.247	0.012	260.8	5410.6	4.41884
84	7056	592,704	9.165	28.983	4.380	9.435	20.328	0.012	263.9	5541.8	4.43082
85	7225	614,125	9.220	29.155	4.397	9.473	20.408	0.012	267.0	5674.5	4.44265
86	7396	636,056	9.274	29.326	4.414	9.510	20.488	0.012	270.2	5808.8	4.45435
87	7569	658,503	9.327	29.496	4.431	9.546	20.567	0.011	273.3	5944.7	4.46591
88	7744	681,472	9.381	29.665	4.448	9.583	20.646	0.011	276.5	6082.1	4.47734
89	7921	704,969	9.434	29.833	4.465	9.619	20.724	0.011	279.6	6221.1	4.48864
90	8100	729,000	9.487	30.000	4.481	9.655	20.801	0.011	282.7	6361.7	4.49981
91	8281	753,571	9.539	30.166	4.498	9.691	20.878	0.011	285.9	6503.9	4.51086
92	8464	778,688	9.592	30.332	4.514	9.726	20.954	0.011	289.0	6647.6	4.52179
93	8649	804,357	9.644	30.496	4.531	9.761	21.029	0.011	292.2	6792.9	4.53260
94	8836	830,584	9.695	30.659	4.547	9.796	21.105	0.011	295.3	6939.8	4.54329
95	9025	857,375	9.747	30.822	4.563	9.830	21.179	0.011	298.5	7088.2	4.55388
96	9216	884,736	9.798	30.984	4.579	9.865	21.253	0.010	301.6	7238.2	4.56435
97	9409	912,673	9.849	31.145	4.595	9.899	21.327	0.010	304.7	7389.8	4.57471
98	9604	941,192	9.899	31.305	4.610	9.933	21.400	0.010	307.9	7543.0	4.58497
99	9801	970,299	9.950	31.464	4.626	9.967	21.472	0.010	311.0	7697.7	4.59512
00	10,000	1,000,000	10.000	31.623	4.642	10.000	21.544	0.010	314.2	7854.0	4.60517

§ 3. **सामान्य लगरथ।** (सारणी-प्रयोग की विधि द §§ 132, 133) नैसर्गिक लगरथों का आधार : $e = 2.71828$: $\log_{10} e = M = 0.43429$: $\frac{1}{M} = 2.30258$)

	पासंग										सशोधन		
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4 9 13 4 9 13 4 8 12 4 8 12	17 22 26 17 21 25 16 21 25 16 20 24	30 35 39 30 34 38 29 33 37 28 32 36
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4 8 12 4 8 11 4 7 11	16 20 24 15 19 23 15 18 22	27 31 35 27 30 34 26 29 33
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3 7 11 3 7 11 3 7 10	14 18 21 14 17 21 14 17 20	25 28 32 24 28 31 24 27 30
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3 7 10 3 6 10 3 6 9	13 17 20 13 16 19 13 16 19	23 27 30 23 26 29 22 25 28
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3 6 9 3 6 9 3 6 9	13 16 19 12 15 18 11 14 17	22 25 28 21 24 27 20 23 26
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3 6 9 3 5 8	11 14 17 11 14 16	20 23 26 19 22 25

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	2041	2068	2095	2122	2143	2175	2201	2227	2253	2279	3 3	5 5	8 8	11 10	13 13	16 15	19 18	21 20	24 23
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	3 2	5 5	8 7	10 10	13 12	15 15	18 17	20 19	23 22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2 2	5 5	7 7	9 9	12 11	14 13	16 16	19 18	21 20
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2 2	4 4	7 6	9 8	11 11	14 13	16 15	18 17	20 19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2 2	4 4	6 6	8 8	11 10	13 12	15 14	17 17	19 19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13

शेष

पासग											सशोधन								
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

सारणिया

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5

शेष

	पामग										सशोधन								
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9150	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

§ 4. **प्रतिलगरथ** (प्रयोग की विधि दे. § 134)

	संख्या										संशोधन								
m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3

शेष

	संख्या										मंशोधन								
m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	1
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2693	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2927	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	5	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	2698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8

शेष

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	संख्या										संशोधन								
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4278	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5883	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1 3 4	6 7 9	10 12 13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2 3 5	6 8 9	11 12 14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2 3 5	6 8 9	11 12 14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2 3 5	6 8 9	11 13 14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2 3 5	6 8 10	11 13 15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2 3 5	7 8 10	12 13 15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2 3 5	7 8 10	12 13 15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2 3 5	7 9 10	12 14 16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2 4 5	7 9 11	12 14 16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2 4 5	7 9 11	13 14 16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2 4 6	7 9 11	13 15 17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2 4 6	8 9 11	13 15 17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2 4 6	8 10 12	14 15 17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2 4 6	8 10 12	14 16 18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2 4 6	8 10 12	14 16 18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2 4 6	8 10 12	15 17 19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2 4 6	8 11 13	15 17 19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2 4 7	9 11 13	15 17 20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2 4 7	9 11 13	16 18 20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2 5 7	9 11 14	16 18 20

§ 5. त्रिकोणमितिक फलनों के लगरथ

(दे §§ 187-189; स्तभ lg sin, lg tan, lg cos में लंछक दस इकाई अधिक हैं)

°	′	log sin	d	log tan	cd	log cot	d	log cos		
0	0	−∞	—	−∞	—	+∞		10.0000	0	90
	10	7.4637	3011	7.4637	3011	2.5363		9.999998	50	
	20	7.7648	1760	7.7648	1761	2.2352		9.99999	40	
	30	7.9408	1250	7.9409	1249	2.0591		9.99998	30	
	40	8.0658	969	8.0658	969	1.9342		9.99997	20	
	50	8.1627	792	8.1627	792	1.8373		9.9999	10	
1	0	8.2419	669	8.2419	670	1.7581		9.9999	0	89
	10	8.3088	580	8.3089	580	1.6911		9.9999	50	
	20	8.3668	511	8.3669	512	1.6331		9.9999	40	
	30	8.4179	458	8.4181	457	1.5819	1	9.9999	30	
	40	8.4637	413	8.4638	415	1.5362		9.9998	20	
	50	8.5050	378	8.5053	378	1.4947	1	9.9998	10	
2	0	8.5428	348	8.5431	348	1.4569		9.9997	0	88
	10	8.5776	321	8.5779	322	1.4221	1	9.9997	50	
	20	8.6097	300	8.6101	300	1.3899		9.9996	40	
	30	8.6397	280	8.6401	281	1.3599	1	9.9996	30	
	40	8.6677	263	8.6682	263	1.3318		9.9995	20	
	50	8′.6940	248	8.6945	249	1.3055	1	9.9995	10	
3	0	8.7188	235	8.7194	235	1.2806	1	9.9994	0	87
	10	8.7423	222	8.7429	223	1.2571	1	9.9993	50	
	20	8.7645	212	8.7652	213	1.2348	1	9.9993	40	
	30	8.7857	202	8.7865	202	1.2135	1	9.9992	30	
	40	8.8059	192	8.8067	194	1.1933		9.9991	20	
	50	8.8251	185	8.8261	185	1.1739	1	9.9990	10	
4	0	8.8436	177	8.8446	178	1.1554		9.9989	0	86
	10	8.8613	170	8.8624	171	1.1376	1	9.9989	50	
	20	8.8783	163	8.8795	165	1.1205	1	9.9988	40	
	30	8.8946	158	8.8960	158	1.1040	1	9.9987	30	
	40	8.9104	152	8.9118	154	1.0882	1	9.9986	20	
	50	8.9256	147	8.9272	148	1.0728	2	9.9985	10	
		log cos	d	log cot	cd	log tan	d	log sin.	′	°

शष

°	′	log sin	d	log tan	cd	log cot	d	log cos		
5	0	8.9403	142	8.9420	143	1.0580	1	9.9983	0	85
	10	8.9545	137	8.9563	138	1.0437	1	9.9982	50	
	20	8.9682	134	8.9701	135	1.0299	1	9.9981	40	
	30	8.9816	129	8.9836	130	1.0164	1	9.9980	30	
	40	8.9945	125	8.9966	127	1.0034	2	9.9979	20	
	50	9.0070	122	9.0093	123	0.9907	1	9.9977	10	
6	0	9.0192	119	9.0216	120	0.9784	1	9.9976	0	84
	10	9.0311	115	9.0336	117	0.9664	2	9.9975	50	
	20	9.0426	113	9.0453	114	0.9547	1	9.9973	40	
	30	9.0539	109	9.0467	111	0.9433	1	9.9972	30	
	40	9.0648	107	9.0678	108	0.9322	2	9.9971	20	
	50	9.0755	104	9.0786	105	0.9214	1	9.9969	10	
7	0	9.0859	102	9.0891	104	0.9109	2	9.9968	0	83
	10	9.0961	99	9.0995	101	0.9005	2	9.9966	50	
	20	9.1060	97	9.1096	98	0.8904	1	9.9964	40	
	30	9.1157	95	9.1194	97	0.8806	2	9.9963	30	
	40	9.1252	93	9.1291	94	0.8709	2	9.9961	20	
	50	9.1345	91	9.1385	93	0.8615	1	9.9959	10	
8	0	9.1436	89	9.1478	91	0.8522	2	9.9958	0	82
	10	9.1525	87	9.1569	89	0.8431	2	9.9956	50	
	20	9.1612	85	9.1658	87	0.8342	2	9.9954	40	
	30	9.1697	84	9.1745	86	0.8255	2	9.9952	30	
	40	9.1781	82	9.1831	84	0.8169	2	9.9950	20	
	50	9.1863	80	9.1915	82	0.8085	2	9.9948	10	
9	0	9.1943	79	9.1997	81	0.8003	2	9.9946	0	81
	10	9.2022	78	9.2078	80	0.7922	2	9.9944	50	
	20	9.2100	76	9.2158	78	0.7842	2	9.9942	40	
	30	9.2176	75	9.2236	77	0.7764	2	9.9940	30	
	40	9.2251	73	9.2313	76	0.7687	2	9.9938	20	
	50	9.2324	73	9.2389	74	0.7611	2	9.9936	10	
10	0	9.2397	71	9.2463	73	0.7537	3	9.9934	0	80
	10	9.2468	70	9.2536	73	0.7464	2	9.9931	50	
	20	9.2538	68	9.2609	71	0.7391	2	9.9929	40	
	30	9.2606	68	9.2680	70	0.7320	3	9.9927	30	
	40	9.2674	66	9.2750	69	0.7250	2	9.9924	20	
	50	9.2740	66	9.2819	68	0.7181	3	9.9922	10	
		log cos	d	log cot	cd	log tan	d	log sin		°

शेष

°	′	log sin	d	log tan	cd	log cot	d	log cos		
11	0	9.2806	64	9.2887	66	0.7113	2	9.9919	0	79
	10	9.2870	64	9.2953	67	0 7047	3	9.9917	50	
	20	9.2934	63	9.3020	65	0.6980	2	9.9914	40	
	30	9.2997	61	9.3085	64	0.6915	3	9.9912	30	
	40	9.3058	61	9.3149	63	0.6851	2	9.9909	20	
	50	9.3119	60	9.3212	63	0.6788	3	9.9907	10	
12	0	9.3179	59	9.3275	61	0.6725	3	9.9904	0	78
	10	9.3238	58	9.3336	61	0.6664	2	9.9901	50	
	20	9.3296	57	9.3397	61	0.6603	3	9.9899	40	
	30	9.3353	57	9.3458	59	0.6542	3	9.9896	30	
	40	9.3410	56	9 3517	59	0.6483	3	9.9893	20	
	50	9.3466	55	9.3576	58	0 6424	3	9.9890	10	
13	0	9.3521	54	9.3634	57	0.6366	3	9.9887	0	77
	10	9.3575	54	9.3691	57	0.6309	3	9.9884	50	
	20	9.3629	53	9.3748	56	0.6252	3	9.9881	40	
	30	9.3682	52	9.3804	55	0.6196	3	9.9878	30	
	40	9.3734	52	9.3859	55	0.6141	3	9.9875	20	
	50	9.3786	51	9.3914	54	0.6086	3	9.9872	10	
14	0	9.3837	50	9.3968	53	0.6032	3	9.9869	0	76
	10	9.3887	50	9.4021	53	0.5979	3	9.9866	50	
	20	9.3937	49	9.4074	53	0.5926	4	9 9863	40	
	30	9 3986	49	9.4127	51	0.5873	3	9.9859	30	
	40	9.4035	48	9.4178	52	0.5822	3	9.9856	20	
	50	9.4083	47	9.4230	51	0.5770	4	9.9853	10	
15	0	9.4130	47	9.4281	50	0.5719	3	9.9849	0	75
	10	9.4177	46	9.4331	50	0.5669	3	9.9846	50	
	20	9.4223	46	9.4381	49	0.5619	4	9.9843	40	
	30	9.4269	45	9.4430	49	0.5570	3	9.9839	30	
	40	9.4314	45	9.4479	48	0.5521	4	9.9836	20	
	50	9.4359	44	9.4527	48	0.5473	4	9.9832	10	
16	0	9.4403	44	9 4575	47	0.5425	3	9.9828	0	74
	10	9.4447	44	9 4622	47	0.5378	4	9.9825	50	
	20	9.4491	42	9 4669	47	0.5331	4	9.9821	40	
	30	9.4533	43	9.4716	46	0.5284	3	9.9817	30	
	40	9.4576	42	9.4762	46	0.5238	4	9.9814	20	
	50	9 4618	41	9 4808	45	0.5192	4	9.9810	10	
		log cos	d	log cot	cd	log tan	d	log sin	′	°

शेष

°	′	log sin	d	log tan	cd	log cot	d	log cos		
17	0	9.4659	41	9.4853	45	0.5147	4	9.9806	0	73
	10	9.4700	41	9.4898	45	0.5102	4	9.9802	50	
	20	9.4741	40	9.4943	44	0.5057	4	9.9798	40	
	30	9.4781	40	9.4987	44	0.5013	4	9.9794	30	
	40	9.4821	40	9.5031	44	0.4969	4	9.9790	20	
	50	9.4861	39	9.5075	43	0.4925	4	9.9786	10	
18	0	9.4900	39	9.5118	43	0.4882	4	9.9782	0	72
	10	9.4939	38	9.5161	42	0.4839	4	9.9778	50	
	20	9.4977	38	9.5203	42	0.4797	4	9.9774	40	
	30	9.5015	37	9.5245	42	0.4755	5	9.9770	30	
	40	9.5052	38	9.5287	42	0.4713	4	9.9765	20	
	50	9.5090	36	9.5329	41	0.4671	4	9.9761	10	
19	0	9.5126	37	9.5370	41	0.4630	5	9.9757	0	71
	10	9.5163	36	9.5411	40	0.4589	4	9.9752	50	
	20	9.5199	36	9.5451	40	0.4549	5	9.9748	40	
	30	9.5235	35	9.5491	40	0.4509	4	9.9743	30	
	40	9.5270	36	9.5531	40	0.4469	5	9.9739	20	
	50	9.5306	35	9.5571	40	0.4429	4	9.9734	10	
20	0	9.5341	34	9.5611	39	0.4389	5	9.9730	0	70
	10	9.5375	34	9.5650	39	0.4350	4	9.9725	50	
	20	9.5409	34	9.5689	38	0.4311	5	9.9721	40	
	30	9.5443	34	9.5727	39	0.4273	5	9.9716	30	
	40	9.5477	33	9.5766	38	0.4234	5	9.9711	20	
	50	9.5510	33	9.5804	38	0.4196	4	9.9706	10	
21	0	9.5543	33	9.5842	37	0.4158	5	9.9702	0	69
	10	9.5576	33	9.5879	38	0.4121	5	9.9697	50	
	20	9.5609	32	9.5917	37	0.4083	5	9.9692	40	
	30	9.5641	32	9.5954	37	0.4046	5	9.9687	30	
	40	9.5673	31	9.5991	37	0.4009	5	9.9682	20	
	50	9.5704	32	9.6028	36	0.3972	5	9.9677	10	
22	0	9.5736	31	9.6064	36	0.3936	5	9.9672	0	68
	10	9.5767	31	9.6100	36	0.3900	6	9.9667	50	
	20	9.5798	30	9.6136	36	0.3864	5	9.9661	40	
	30	9.5828	31	9.6172	36	0.3828	5	9.9656	30	
	40	9.5859	30	9.6208	35	0.3792	5	9.9651	20	
	50	9.5889	30	9.6243	36	0.3757	6	9.9646	10	
		log cos	d	log cot	d	log tan	d	log sin	′	°

शेष

°	′	log sin	d	log tan	cd	log cot	d	log cos		
23	0	9.5919	29	9.6279	35	0.3721	5	9.9640	0	67
	10	9.5948	30	9.6314	34	0.3686	6	9.9635	50	
	20	9.5978	29	9.6348	35	0.3652	5	9.9629	40	
	30	9.6007	29	9.6383	34	0.3617	6	9.9624	30	
	40	9.6036	29	9.6417	35	0.3583	5	9.9618	20	
	50	9.6065	28	9.6452	34	0.3548	6	9.9613	10	
24	0	9.6093	28	9.6486	34	0.3514	5	9.9607	0	66
	10	9.6121	28	9.6520	33	0.3480	6	9.9602	50	
	20	9.6149	28	9.6553	34	0.3447	6	9.9596	40	
	30	9.6177	28	9.6587	33	0.3413	6	9.9590	30	
	40	9.6205	27	9.6620	34	0.3380	5	9.9584	20	
	50	9.6232	27	9.6654	33	0.3346	6	9.9579	10	
25	0	9.6259	27	9.6687	33	0.3313	6	9.9573	0	65
	10	9.6286	27	9.6720	32	0.3280	6	9.9567	50	
	20	9.6313	27	9.6752	33	0.3248	6	9.9561	40	
	30	9.6340	26	9.6785	32	0.3215	6	9.9555	30	
	40	9.6366	26	9.6817	33	0.3183	6	9.9549	20	
	50	9.6392	26	9.6850	32	0.3150	6	9.9543	10	
26	0	9.6418	26	9.6882	32	0.3118	7	9.9537	0	64
	10	9.6444	26	9.6914	32	0.3086	6	9.9530	50	
	20	9.6470	25	9.6946	31	0.3054	6	9.9524	40	
	30	9.6495	26	9.6977	32	0.3023	6	9.9518	30	
	40	9.6521	25	9.7009	31	0.2991	7	9.9512	20	
	50	9.6546	24	9.7040	32	0.2960	6	9.9505	10	
27	0	9.6570	25	9.7072	31	0.2928	7	9.9499	0	63
	10	9.6595	25	9.7103	31	0.2897	6	9.9492	50	
	20	9.6620	24	9.7134	31	0.2866	7	9.9486	40	
	30	9.6644	24	9.7165	31	0.2835	6	9.9479	30	
	40	9.6668	24	9.7196	30	0.2804	7	9.9473	20	
	50	9.6692	24	9.7226	31	0.2774	7	9.9466	10	
28	0	9.6716	24	9.7257	30	0.2743	6	9.9459	0	62
	10	9.6740	23	9.7287	30	0.2713	7	9.9453	50	
	20	9.6763	24	9.7317	31	0.2683	7	9.9446	40	
	30	9.6787	23	9.7348	30	0.2652	7	9.9439	30	
	40	9.6810	23	9.7378	30	0.2622	7	9.9432	20	
	50	9.6833	22	9.7408	30	0.2592	7	9.9425	10	
		log cos	d	log cot	cd	log tan	d	log sin	′	°

शेष

°	′	log sin	d	log tan	cd	log cot	d	log cos		
29	0	9.6856	22	9.7438	29	0.2562	7	9.9418	0	61
	10	9.6878	23	9.7467	30	0.2533	7	9.9411	50	
	20	9.6901	22	9.7497	29	0.2503	7	9.9404	40	
	30	9.6923	23	9.7526	30	0.2474	7	9.9397	30	
	40	9.6946	22	9.7556	29	0.2444	7	9.9390	20	
	50	9.6968	22	9.7585	29	0.2415	8	9.9383	10	
30	0	9.6990	22	9.7614	30	0.2386	7	9.9375	0	60
	10	9.7012	21	9.7644	29	0.2356	7	9.9368	50	
	20	9.7033	22	9.7673	28	0.2327	8	9.9361	40	
	30	9.7055	21	9.7701	29	0.2299	7	9.9353	30	
	40	9.7076	21	9.7730	29	0.2270	8	9.9346	20	
	50	9.7097	21	9.7759	29	0.2241	7	9.9338	10	
31	0	9.7118	21	9.7788	28	0.2212	8	9.9331	0	59
	10	9.7139	21	9.7816	29	0.2184	8	9.9323	50	
	20	9.7160	21	9.7845	28	0.2155	7	9.9315	40	
	30	9.7181	20	9.7873	29	0.2127	8	9.9308	30	
	40	9.7201	21	9.7902	28	0.2098	8	9.9300	20	
	50	9.7222	20	9.7930	28	0.2070	8	9.9292	10	
32	0	9.7242	20	9.7958	28	0.2042	8	9.9284	0	58
	10	9.7262	20	9.7986	28	0.2014	8	9.9276	50	
	20	9.7282	20	9.8014	28	0.1986	8	9.9268	40	
	30	9.7302	20	9.8042	28	0.1958	8	9.9260	30	
	40	9.7322	20	9.8070	27	0 1930	8	9.9252	20	
	50	9.7342	19	9.8097	28	0.1903	8	9.9244	10	
33	0	9.7361	19	9.8125	28	0.1875	8	9.9236	0	57
	10	9.7380	20	9.8153	27	0.1847	9	9.9228	50	
	20	9.7400	19	9.8180	28	0.1820	8	9.9219	40	
	30	9.7419	19	9.8208	27	0.1792	8	9.9211	30	
	40	9.7438	19	9.8235	28	0.1765	9	9.9203	20	
	50	9.7457	19	9 8263	27	0.1737	8	9.9194	10	
34	0	9.7476	18	9.8290	27	0.1710	9	9.9186	0	56
	10	9.7494	19	9.8317	27	0.1683	8	9.9177	50	
	20	9.7513	18	9.8344	27	0.1656	9	9.9169	40	
	30	9.7531	19	9.8371	27	0.1629	9	9.9160	30	
	40	9.7550	18	9.8398	27	0.1602	9	9.9151	20	
	50	9.7568	18	9.8425	27	0 1575	8	9.9142	10	
		log cos	d	log cot	cd	log tan	d	log sin	′	°

शेष

°	′	log sin	d	log tan	cd	log cot	d	log cos		
35	0	9.7586	18	9.8452	27	0.1548	9	9.9134	0	55
	10	9.7604	18	9.8479	27	0.1521	9	9.9125	50	
	20	9.7622	18	9.8506	27	0.1494	9	9.9116	40	
	30	9.7640	17	9.8533	26	0.1467	9	9.9107	30	
	40	9.7657	18	9.8559	27	0.1441	9	9.9098	20	
	50	9.7675	17	9.8586	27	0.1414	9	9.9089	10	
36	0	9.7692	18	9.8613	26	0.1387	10	9.9080	0	54
	10	9.7710	17	9.8639	27	0.1361	9	9.9070	50	
	20	9.7727	17	9.8666	26	0.1334	9	9.9061	40	
	30	9.7744	17	9.8692	26	0.1308	10	9.9052	30	
	40	9.7761	17	9.8718	27	0.1282	9	9.9042	20	
	50	9.7778	17	9.8745	26	0.1255	10	9.9033	10	
37	0	9.7795	16	9.8771	26	0.1229	9	9.9023	0	53
	10	9.7811	17	9.8797	27	0.1203	10	9.9014	50	
	20	9.7828	16	9.8824	26	0.1176	9	9.9004	40	
	30	9.7844	17	9.8850	26	0.1150	10	9.8995	30	
	40	9.7861	16	9.8876	26	0.1124	10	9.8985	20	
	50	9 7877	16	9.8902	26	0.1098	10	9.8975	10	
38	0	9.7893	17	9.8928	26	0.1072	11	9.8965	0	52
	10	9.7910	16	9.8954	26	0.1046	10	9.8955	50	
	20	9.7926	15	9.8980	26	0.1020	10	9.8945	40	
	30	9.7941	16	9.9006	26	0.0994	10	9.8935	30	
	40	9.7957	16	9.9032	26	0.0968	10	9.8925	20	
	50	9.7973	16	9.9058	26	0.0942	10	9.8915	10	
39	0	9.7989	15	9.9084	26	0.0916	10	9.8905	0	51
	10	9.8004	16	9.9110	25	0.0890	11	9.8895	50	
	20	9.8020	15	9.9135	26	0.0865	10	9.8884	40	
	30	9.8035	15	9.9161	26	0.0839	10	9.8874	30	
	40	9.8050	16	9.9187	25	0.0813	11	9.8864	20	
	50	9.8066	15	9.9212	26	0.0788	10	9.8853	10	
		log cos	d	log cot	cd	log tan	d	log sin	′	°

समापन

°	′	log sin	d	log tan	cd	log cot	d	log cos		
40	0	9.8081	15	9.9238	26	0.0762	11	9.8843	0	50
	10	9.8096	15	9.9264	25	0.0736	11	9.8832	50	
	20	9.8111	14	9.9289	26	0.0711	11	9.8821	40	
	30	9.8125	15	9.9315	26	0.0685	10	9.8810	30	
	40	9.8140	15	9.9341	25	0.0659	11	9.8800	20	
	50	9.8155	14	9.9366	26	0.0634	11	9.8789	10	
41	0	9.8169	15	9.9392	25	0.0608	11	9.8778	0	49
	10	9.8184	14	9.9417	26	0.0583	11	9.8767	50	
	20	9.8198	15	9.9443	25	0.0557	11	9.8756	40	
	30	9.8213	14	9.9468	26	0.0532	12	9.8745	30	
	40	9.8227	14	9.9494	25	0.0506	11	9.8733	20	
	50	9.8241	14	9.9519	25	0.0481	11	9.8722	10	
42	0	9.8255	14	9.9544	26	0.0456	12	9.8711	0	48
	10	9.8269	14	9.9570	25	0.0430	11	9.8699	50	
	20	9.8283	14	9.9595	26	0.0405	12	9.8688	40	
	30	9.8297	14	9.9621	25	0.0379	11	9.8676	30	
	40	9.8311	13	9.9646	25	0.0354	12	9.8665	20	
	50	9.8324	14	9.9671	26	0.0329	12	9.8653	10	
43	0	9.8338	13	9.9697	25	0.0303	12	9.8641	0	47
	10	9.8351	14	9.9722	25	0.0278	11	9.8629	50	
	20	9.8365	13	9.9747	25	0.0253	12	9.8618	40	
	30	9.8378	13	9.9772	26	0.0228	12	9.8606	30	
	40	9.8391	14	9.9798	25	0.0202	12	9.8594	20	
	50	9.8405	13	9.9823	25	0.0177	13	9.8582	10	
44	0	9.8418	13	9.9848	26	0.0152	12	9.8569	0	46
	10	9.8431	13	9.9874	25	0.0126	12	9.8557	50	
	20	9.8444	13	9.9899	25	0.0101	13	9.8545	40	
	30	9.8457	12	9.9924	25	0.0076	12	9.8532	30	
	40	9.8469	13	9.9949	26	0.0051	13	9.8520	20	
	50	9.8482	13	9.9975	25	0.0025	12	9.8507	10	
45	0	9.8495		10.0000		0.0000		9.8495		45
		log cos	d	log cot	cd	log tan	d	log sin	′	°

§ 6. ज्या और कोज्या (दे. §§ 183, 184 प्रयोग विधि)

ज्या

Deg	0′ →	10′	20′	30′	40′	50′	60′		संशोधन 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
↓0	0.0000	0.0029	0.0058	0.0087	0.0116	0.0145	0.0175	89	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	0.0175	0.0204	0.0233	0.0262	0.0291	0.0320	0.0349	88	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	0.0349	0.0378	0.0407	0.0436	0.0465	0.0494	0.0523	87	3	6	9	12	15	17	20	23	26
3	0.0523	0.0552	0.0581	0.0610	0.0640	0.0669	0.0698	86	3	6	9	12	15	17	20	23	26
4	0.0698	0.0727	0.0756	0.0785	0.0814	0.0843	0.0872	85	3	6	9	12	15	17	20	23	26
5	0.0872	0.0901	0.0929	0.0958	0.0987	0.1016	0.1045	84	3	6	9	12	14	17	20	23	26
6	0.1045	0.1074	0.1103	0.1132	0.1161	0.1190	0.1219	83	3	6	9	12	14	17	20	23	26
7	0.1219	0.1248	0.1276	0.1305	0.1334	0.1363	0.1392	82	3	6	9	12	14	17	20	23	26
8	0.1392	0.1421	0.1449	0.1478	0.1507	0.1536	0.1564	81	3	6	9	12	14	17	20	23	26
9	0.1564	0.1593	0.1622	0.1650	0.1679	0.1708	0.1736	80	3	6	9	12	14	17	20	23	26
10	0.1736	0.1765	0.1794	0.1822	0.1851	0.1880	0.1908	79	3	6	9	11	14	17	20	23	26
11	0.1908	0.1937	0.1965	0.1994	0.2022	0.2051	0.2079	78	3	6	9	11	14	17	20	23	26
12	0.2079	0.2108	0.2136	0.2164	0.2193	0.2221	0.2250	77	3	6	9	11	14	17	20	23	26
13	0.2250	0.2278	0.2306	0.2334	0.2363	0.2391	0.2419	76	3	6	8	11	14	17	20	23	25
14	0.2419	0.2447	0.2476	0.2504	0.2532	0.2560	0.2588	75	3	6	8	11	14	17	20	23	25
15	0.2588	0.2616	0.2644	0.2672	0.2700	0.2728	0.2756	74	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	0.2756	0.2784	0.2812	0.2840	0.2868	0.2896	0.2924	73	3	6	8	11	14	17	20	22	25
17	0.2924	0.2952	0.2979	0.3007	0.3035	0.3062	0.3090	72	3	6	8	11	14	17	19	22	25
18	0.3090	0.3118	0.3145	0.3173	0.3201	0.3228	0.3256	71	3	6	8	11	14	17	19	22	25
19	0.3256	0.3283	0.3311	0.3338	0.3365	0.3393	0.3420	70	3	5	8	11	14	16	19	22	25
20	0.3420	0.3448	0.3475	0.3502	0.3529	0.3557	0.3584	69	3	5	8	11	14	16	19	22	25
21	0.3584	0.3611	0.3638	0.3665	0.3692	0.3719	0.3746	68	3	5	8	11	14	16	19	22	24

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ ←	Deg.	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
22	0.3746	0.3773	0.3800	0.3827	0.3854	0.3881	0.3907	67	3	5	8	11	13	16	19	22	24
23	0.3907	0.3934	0.3961	0.3987	0.4014	0.4041	0.4067	66	3	5	8	11	13	16	19	21	24
24	0.4067	0.4094	0.4120	0.4147	0.4173	0.4200	0.4226	65	3	5	8	11	13	16	19	21	24
25	0.4226	0.4253	0.4279	0.4305	0.4331	0.4358	0.4384	64	3	5	8	10	13	16	18	21	24
26	0.4384	0.4410	0.4436	0.4462	0.4488	0.4514	0.4540	63	3	5	8	10	13	16	18	21	23
27	0.4540	0.4566	0.4592	0.4617	0.4643	0.4669	0.4695	62	3	5	8	10	13	15	18	21	23
28	0.4695	0.4720	0.4746	0.4772	0.4797	0.4823	0.4848	61	3	5	8	10	13	15	18	20	23
29	0.4848	0.4874	0.4899	0.4924	0.4950	0.4975	0.5000	60	3	5	8	10	13	15	18	20	23
30	0.5000	0.5025	0.5050	0.5075	0.5100	0.5125	0.5150	59	3	5	8	10	13	15	18	20	23
31	0.5150	0.5175	0.5200	0.5225	0.5250	0.5275	0.5299	58	2	5	7	10	12	15	17	20	22
32	0.5299	0.5324	0.5348	0.5373	0.5398	0.5422	0.5446	57	2	5	7	10	12	15	17	20	22
33	0.5446	0.5471	0.5495	0.5519	0.5544	0.5568	0.5592	56	2	5	7	10	12	15	17	19	22
34	0.5592	0.5616	0.5640	0.5664	0.5688	0.5712	0.5736	55	2	5	7	10	12	14	17	19	22
35	0.5736	0.5760	0.5783	0.5807	0.5831	0.5854	0.5878	54	2	5	7	9	12	14	17	19	21
36	0.5878	0.5901	0.5925	0.5948	0.5972	0.5995	0.6018	53	2	5	7	9	12	14	16	19	21
37	0.6018	0.6041	0.6065	0.6088	0.6111	0.6134	0.6157	52	2	5	7	9	12	14	16	18	21
38	0.6157	0.6180	0.6202	0.6225	0.6248	0.6271	0.6293	51	2	5	7	9	11	14	16	18	20
39	0.6293	0.6316	0.6338	0.6361	0.6383	0.6406	0.6428	50	2	4	7	9	11	13	16	18	20
40	0.6428	0.6450	0.6472	0.6494	0.6517	0.6539	0.6561	49	2	4	7	9	11	13	15	18	20
41	0.6561	0.6583	0.6604	0.6626	0.6648	0.6670	0.6691	48	2	4	7	9	11	13	15	17	20
42	0.6691	0.6713	0.6734	0.6756	0.6777	0.6799	0.6820	47	2	4	6	9	11	13	15	17	19
43	0.6820	0.6841	0.6862	0.6884	0.6905	0.6926	0.6947	46	2	4	6	9	11	13	15	17	19
44	0.6947	0.6967	0.6988	0.7009	0.7030	0.7050	0.7071	↑45	2	4	6	9	10	12	15	17	19

ज्या शेष

Deg.	0′ →	10′	20′	30′	40′	50′	60′		संशोधन								
									1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
↓45	0.7071	0.7092	0.7112	0.7133	0.7153	0.7173	0.7193	44	2	4	6	8	10	12	14	16	18
46	0.7193	0.7214	0.7234	0.7254	0.7274	0.7294	0.7314	43	2	4	6	8	10	12	14	16	18
47	0.7314	0.7333	0.7353	0.7373	0.7392	0.7412	0.7431	42	2	4	6	8	10	12	14	16	18
48	0.7431	0.7451	0.7470	0.7490	0.7509	0.7528	0.7547	41	2	4	6	8	10	12	14	15	17
49	0.7547	0.7566	0.7585	0.7604	0.7623	0.7642	0.7660	40	2	4	6	8	9	11	13	15	17
50	0.7660	0.7679	0.7698	0.7716	0.7735	0.7753	0.7771	39	2	4	6	7	9	11	13	15	17
51	0.7771	0.7790	0.7808	0.7826	0.7844	0.7862	0.7880	38	2	4	5	7	9	11	13	14	16
52	0.7880	0.7898	0.7916	0.7934	0.7951	0.7969	0.7986	37	2	4	5	7	9	11	12	14	16
53	0.7986	0.8004	0.8021	0.8039	0.8056	0.8073	0.8090	36	2	3	5	7	9	10	12	14	16
54	0.8090	0.8107	0.8124	0.8141	0.8158	0.8175	0.8192	35	2	3	5	7	8	10	12	13	15
55	0.8192	0.8208	0.8225	0.8241	0.8258	0.8274	0.8290	34	2	3	5	7	8	10	12	13	15
56	0.8290	0.8307	0.8323	0.8339	0.8355	0.8371	0.8387	33	2	3	5	6	8	10	11	13	14
57	0.8387	0.8403	0.8418	0.8434	0.8450	0.8465	0.8480	32	2	3	5	6	8	9	11	13	14
58	0.8480	0.8496	0.8511	0.8526	0.8542	0.8557	0.8572	31	2	3	5	6	8	9	11	12	14
59	0.8572	0.8587	0.8601	0.8616	0.8631	0.8646	0.8660	30	1	3	4	6	7	9	10	12	13
60	0.8660	0.8675	0.8689	0.8704	0.8718	0.8732	0.8746	29	1	3	4	6	7	9	10	11	13
61	0.8746	0.8760	0.8774	0.8788	0.8802	0.8816	0.8829	28	1	3	4	6	7	8	10	11	13
62	0.8829	0.8843	0.8857	0.8870	0.0884	0.8897	0.8910	27	1	3	4	5	7	8	9	11	12
63	0.8910	0.8923	0.8936	0.8949	0.8962	0.8975	0.8988	26	1	3	4	5	6	8	9	10	12
64	0.8988	0.9001	0.9013	0.9026	0.9038	0.9051	0.9063	25	1	3	4	5	6	8	9	10	11
65	0.9063	0.9075	0.9088	0.9100	0.9112	0.9124	0.9135	24	1	2	4	5	6	7	8	10	11
66	0.9135	0.9147	0.9159	0.9171	0.9182	0.9194	0.9205	23	1	2	3	5	6	7	8	9	10

	60′	50′	40	30′	20′	10′	0′ ←	Deg.	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
67	0.9205	0.9216	0.9228	0.9239	0.9250	0.9261	0.9272	22	1	2	3	4	6	7	8	9	10
68	0.9272	0.9283	0.9293	0.9304	0.9315	0.9325	0.9336	21	1	2	3	4	5	6	7	9	10
69	0.9336	0.9346	0.9356	0.9367	0.9377	0.9387	0.9397	20	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	0.9397	0.9407	0.9417	0.9426	0.9436	0.9446	0.9455	19	1	2	3	4	5	6	7	8	9
71	0.9455	0.9465	0.9474	0.9483	0.9492	0.9502	0.9511	18	1	2	3	4	5	6	6	7	8
72	0.9511	0.9520	0.9528	0.9537	0.9546	0.9555	0.9563	17	1	2	3	3	4	5	6	7	8
73	0.9563	0.9572	0.9580	0.9588	0.9596	0.9605	0.9613	16	1	2	2	3	4	5	6	7	7
74	0.9613	0.9621	0.9628	0.9636	0.9644	0.9652	0.9659	15	1	2	2	3	4	5	5	6	7
75	0.9659	0.9667	0.9674	0.9681	0.9689	0.9696	0.9703	14	1	1	2	3	4	4	5	6	7
76	0.9703	0.9710	0.9717	0.9724	0.9730	0.9737	0.9744	13	1	1	2	3	3	4	5	5	6
77	0.9744	0.9750	0.9757	0.9763	0.9769	0.9775	0.9781	12	1	1	2	3	3	4	4	5	6
78	0.9781	0.9787	0.9793	0.9799	0.9805	0.9811	0.9816	11	1	1	2	2	3	3	4	5	5
79	0.9816	0.9822	0.9827	0.9833	0.9838	0.9843	0.9848	10	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	0.9848	0.9853	0.9858	0.9863	0.9868	0.9872	0.9877	9	0	1	1	2	2	3	3	4	4
81	0.9877	0.9881	0.9886	0.9890	0.9894	0.9899	0.9903	8	0	1	1	2	2	3	3	3	4
82	0.9903	0.9907	0.9911	0.9914	0.9918	0.9922	0.9925	7	0	1	1	2	2	2	3	3	3
83	0.9925	0.9929	0.9932	0.9936	0.9939	0.9942	0.9945	6	0	1	1	1	2	2	2	3	3
84	0.9945	0.9948	0.9951	0.9954	0.9957	0.9959	0.9962	5	0	1	1	1	1	2	2	2	2
85	0.9962	0.9964	0.9967	0.9969	0.9971	0.9974	0.9976	4	0	0	1	1	1	1	2	2	2
86	0.9976	0.9978	0.9980	0.9981	0.9983	0.9985	0.9986	3	0	0	1	1	1	1	1	1	2
87	0.9986	0.9988	0.9989	0.9990	0.9992	0.9993	0.9994	2	0	0	0	1	1	1	1	1	1
88	0.9994	0.9995	0.9996	0.9997	0.9997	0.9998	0.9998	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1
89	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	↑0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

कोज्या

§ 7. स्पज और कोस्पज (दे. §§ 184-185)

स्पज

Deg.	0′ →	10′	20′	30′	40′	50′	60′		मंशोधन 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0↓	0.0000	0.0029	0.0058	0.0087	0.0116	0.0145	0.0175	89	3	6	9	12	15	17	20	23	26
1	0.0175	0.0204	0.0233	0.0262	0.0291	0.0320	0.0349	88	3	6	9	12	15	17	20	23	26
2	0.0349	0.0378	0.0407	0.0437	0.0466	0.0495	0.0524	87	3	6	9	12	15	17	20	23	26
3	0.0524	0.0553	0.0582	0.0612	0.0641	0.0670	0.0699	86	3	6	9	12	15	18	20	23	26
4	0.0699	0.0729	0.0758	0.0787	0.0816	0.0846	0.0875	85	3	6	9	12	15	18	20	23	26
5	0.0875	0.0904	0.0934	0.0963	0.0992	0.1022	0.1051	84	3	6	9	12	15	18	21	23	26
6	0.1051	0.1080	0.1110	0.1139	0.1169	0.1198	0.1228	83	3	6	9	12	15	18	21	24	27
7	0.1228	0.1257	0.1287	0.1317	0.1346	0.1376	0.1405	82	3	6	9	12	15	18	21	24	27
8	0.1405	0.1435	0.1465	0.1495	0.1524	0.1554	0.1584	81	3	6	9	12	15	18	21	24	27
9	0.1584	0.1614	0.1644	0.1673	0.1703	0.1733	0.1763	80	3	6	9	12	15	18	21	24	27
10	0.1763	0.1793	0.1823	0.1853	0.1883	0.1914	0.194	79	3	6	9	12	15	18	21	24	27
11	0.1944	0.1974	0.2004	0.2035	0.2065	0.2095	0.2126	78	3	6	9	12	15	18	21	24	27
12	0.2126	0.2156	0.2186	0.2217	0.2247	0.2278	0.2309	77	3	6	9	12	15	18	21	24	27
13	0.2309	0.2339	0.2370	0.2401	0.2432	0.2462	0.2493	76	3	6	9	12	15	18	22	25	28
14	0.2493	0.2524	0.2555	0.2586	0.2617	0.2648	0.2679	75	3	6	9	12	16	19	22	25	28
15	0.2679	0.2711	0.2742	0.2773	0.2805	0.2836	0.2867	74	3	6	9	13	16	19	22	25	28
16	0.2867	0.2899	0.2931	0.2962	0.2994	0.3026	0.3057	73	3	6	9	13	16	19	22	25	28
17	0.3057	0.3089	0.3121	0.3153	0.3185	0.3217	0.3249	72	3	6	10	13	16	19	22	26	29
18	0.3249	0.3281	0.3314	0.3346	0.3378	0.3411	0.3443	71	3	6	10	13	16	19	23	26	29
19	0.3443	0.3476	0.3508	0.3541	0.3574	0.3607	0.3640	70	3	7	10	13	16	20	23	26	29
20	0.3640	0.3673	0.3706	0.3739	0.3772	0.3805	0.3839	69	3	7	10	13	17	20	23	27	30
21	0.3839	0.3872	0.3906	0.3939	0.3973	0.4006	0.4040	68	3	7	10	13	17	20	24	27	30

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ ←	Deg.	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
22	0.4040	0.4074	0.4108	0.4142	0.4176	0.4210	0.4245	67	3	7	10	14	17	20	24	27	31
23	0.4245	0.4279	0.4314	0.4348	0.4383	0.4417	0.4452	66	3	7	10	14	17	21	24	28	31
24	0.4452	0.4487	0.4522	0.4557	0.4592	0.4628	0.4663	65	4	7	11	14	18	21	25	28	32
25	0.4663	0.4699	0.4734	0.4770	0.4806	0.4841	0.4877	64	4	7	11	14	18	21	25	29	32
26	0.4877	0.4913	0.4950	0.4986	0.5022	0.5059	0.5095	63	4	7	11	15	18	22	25	29	33
27	0.5095	0.5132	0.5169	0.5206	0.5243	0.5280	0.5317	62	4	7	11	15	18	22	26	29	33
28	0.5317	0.5354	0.5392	0.5430	0.5467	0.5505	0.5543	61	4	8	11	15	19	23	26	30	34
29	0.5543	0.5581	0.5619	0.5658	0.5696	0.5735	0.5774	60	4	8	12	15	19	23	27	31	35
30	0.5774	0.5812	0.5851	0.5890	0.5930	0.5969	0.6009	59	4	8	12	16	20	24	27	31	35
31	0.6009	0.6048	0.6088	0.6128	0.6168	0.6208	0.6249	58	4	8	12	16	20	24	28	32	36
32	0.6249	0.6289	0.6330	0.6371	0.6412	0.6453	0.6494	57	4	8	12	16	20	25	29	33	37
33	0.6494	0.6536	0.6577	0.6619	0.6661	0.6703	0.6745	56	4	8	13	17	21	25	29	33	38
34	0.6745	0.6787	0.6830	0.6873	0.6916	0.6959	0.7002	55	4	9	13	17	21	26	30	34	39
35	0.7002	0.7046	0.7089	0.7133	0.7177	0.7221	0.7265	54	4	9	13	18	22	26	31	35	39
36	0.7265	0.7310	0.7355	0.7400	0.7445	0.7490	0.7536	53	5	9	14	18	23	27	32	36	41
37	0.7536	0.7581	0.7627	0.7673	0.7720	0.7766	0.7813	52	5	9	14	19	23	28	32	37	42
38	0.7813	0.7860	0.7907	0.7954	0.8002	0.8050	0.8098	51	5	9	14	19	24	28	33	38	43
39	0.8098	0.8146	0.8195	0.8243	0.8292	0.8342	0.8391	50	5	10	15	20	24	29	34	39	44
40	0.8391	0.8441	0.8491	0.8541	0.8591	0.8642	0.8693	49	5	10	15	20	25	30	35	40	45
41	0.8693	0.8744	0.8796	0.8847	0.8899	0.8952	0.9004	48	5	10	16	21	26	31	36	41	47
42	0.9004	0.9057	0.9110	0.9163	0.9217	0.9271	0.9325	47	5	11	16	21	27	32	38	43	48
43	0.9325	0.9380	0.9435	0.9490	0.9545	0.9601	0.9657	46	6	11	17	22	28	33	39	44	50
44	0.9657	0.9713	0.9770	0.9827	0.9884	0.9942	1.0000	↑45	6	11	17	23	29	34	40	46	51

कोज्या

स्पज | शेष

Deg.	0′ →	10′	20′	30′	40′	50′	60′		संशोधन 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45↓	1.0000	1.0058	1.0117	1.0176	1.0236	1.0295	1.0355	44	6	12	18	24	30	36	41	47	53
46	1.0355	1.0416	1.0477	1.0538	1.0599	1.0661	1.0724	43	6	12	18	25	31	37	43	49	55
47	1.0724	1.0786	1.0850	1.0913	1.0977	1.1041	1.1106	42	6	13	19	25	32	38	45	51	57
48	1.1106	1.1171	1.1237	1.1303	1.1369	1.1436	1.1504	41	7	13	20	27	33	40	46	53	59
49	1.1504	1.1572	1.1640	1.1708	1.1778	1.1347	1.1918	40	7	14	21	28	34	41	48	55	62
50	1.1918	1.1988	1.2059	1.2131	1.2203	1.2276	1.2349	39	7	14	22	29	36	43	50	57	65
51	1.2349	1.2423	1.2497	1.2572	1.2647	1.2723	1.2799	38	8	15	23	30	38	45	53	60	68
52	1.2799	1.2876	1.2954	1.3032					8	16	23	31	39	47	55	62	70
					1.3111	1.3190	1.3270	37	8	16	24	32	40	48	56	64	72
53	1.3270	1.3351	1.3432	1.3514					8	16	24	32	41	49	57	65	73
					1.3597	1.3680	1.3764	36	8	17	25	33	42	50	58	67	75
54	1.3764	1.3848	1.3937	1.4020					9	17	26	34	43	51	60	68	77
					1.4106	1.4193	1.4282	35	9	17	26	35	44	52	61	70	79
55	1.4282	1.4370	1.4460	1.4550					9	18	27	36	45	54	63	72	81
					1.4641	1.4733	1.4826	34	9	18	28	37	46	55	64	74	83
56	1.4826	1.4919	1.5013	1.5108					9	19	28	38	47	56	66	75	85
					1.5204	1.5301	1.5399	33	10	19	29	39	48	58	68	78	87
57	1.5399	1.5497	1.5597	1.5697					10	20	30	40	50	60	70	80	90
					1.5798	1.5900	1.6003	32	10	20	31	41	51	61	71	82	92
58	1 6003	1.6107	1.6212	1.6318					10	21	31	42	52	63	73	84	94
					1 6426	1.6534	1.6643	31	11	22	32	43	54	65	76	86	97
59	1.6643	1.6753	1.6864	1.6977					11	22	33	44	55	67	78	89	100
					1.7090	1.7205	1.7320	30	11	23	34	46	57	69	80	92	103
60	1.7320	1.7438	1.7556	1.7675					12	24	35	47	59	71	83	94	106
					1.7796	1.7917	1.8040	29	12	24	37	49	61	73	85	98	110

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′ ←	Deg.	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
61	1.804	1.816	1.829	1.842	1.855	1.868	1.881	28	1	3	4	5	6	8	9	10	11
62	1.881	1.894	1.907	1.921	1.935	1.949	1.963	27	1	3	4	5	7	8	10	11	11
63	1.963	1.977	1.991	2.006	2.020	2.035	2.050	26	1	3	4	6	7	9	10	12	12
64	2.050	2.066	2.081	2.097	2.112	2.128	2.145	25	2	3	5	6	8	9	11	13	14
65	2.145	2.161	2.177	2.194	2.211	2.229	2.246	24	2	3	5	7	8	10	12	14	15
66	2.246	2.264	2.282	2.300	2.318	2.337	2.356	23	2	4	5	7	9	11	13	15	16
67	2.356	2.375	2.394	2.414	2.434	2.455	2.475	22	2	4	6	8	10	12	14	16	18
68	2.475	2.496	2.517	2.539	2.560	2.583	2.605	21	2	4	6	9	11	13	15	17	19
69	2.605	2.628	2.651	2.675	2.699	2.723	2.747	20	2	5	7	9	12	14	17	19	21
70	2.747	2.773	2.798	2.824	2.850	2.877	2.904	19	3	5	8	10	13	16	18	21	24
71	2.904	2.932	2.960	2.989	3.018	3.047	3.078	18	3	6	9	12	14	17	20	23	26
72	3.078	3.108	3.140	3.172					3	6	9	13	16	19	22	25	28
					3.204	3.237	3.271	17	3	7	10	13	17	20	23	26	30
73	3.271	3.305	3.340	3.376					4	7	11	14	18	21	25	28	31
					3.412	3.450	3.487	16	4	7	11	15	19	22	26	30	33
74	3.487	3.526	3.566	3.606					4	8	12	16	20	24	28	32	36
					3.647	3.689	3.732	15	4	8	13	17	21	25	29	34	38
75	3.732	3.776	3.821	3.867					4	9	13	18	22	27	31	36	40
					3.914	3.962	4.011	14	5	10	14	19	24	29	34	38	43

कोस्पंज

स्पज-कोस्पज सारणी का अंत हर 1′ अंतराल के लिए देखे पृष्ठ 48-51 ।

स्पंज शेष

A	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′	
76°00′	4.011	4.016	4.021	4.026	4.031	4.036	4.041	4.046	4.051	4.056	4.061	50′
10′	4.061	4.066	4.071	4.076	4.082	4.087	4.092	4.097	4.102	4.107	4.113	40′
20′	4.113	4.118	4.123	4.128	4.134	4.139	4.144	4.149	4.155	4.160	4.165	30′
30′	4.165	4.171	4.176	4.181	4.187	4.192	4.198	4.203	4.208	4.214	4.219	20′
40′	4.219	4.225	4.230	4.236	4.241	4.247	4.252	4.258	4.264	4.269	4.275	10′
50′	4.275	4.280	4.286	4.292	4.297	4.303	4.309	4.314	4.320	4.326	4.331	13°00′
77°00′	4.331	4.337	4.343	4.349	4.355	4.360	4.366	4.372	4.378	4.384	4.390	50′
10′	4.390	4.396	4.402	4.407	4.413	4.419	4.425	4.431	4.437	4.443	4.449	40′
20′	4.449	4.455	4.462	4.468	4.474	4.480	4.486	4.492	4.498	4.505	4.511	30′
30′	4.511	4.517	4.523	4.529	4.536	4.542	4.548	4.555	4.561	4.567	4.574	20′
40′	4.574	4.580	4.586	4.593	4.599	4.606	4.612	4.619	4.625	4.632	4.638	10′
50′	4.638	4.645	4.651	4.658	4.665	4.671	4.678	4.685	4.691	4.698	4.705	12°00′
78′00′	4.705	4.711	4.718	4.725	4.732	4.739	4.745	4.752	4.759	4.766	4.773	50′
10′	4.773	4.780	4.787	4.794	4.801	4.808	4.815	4.822	4.829	4.836	4.843	40′
20′	4.843	4.850	4.857	4.864	4.872	4.879	4.886	4.893	4.901	4.908	4.915	30′
30′	4.915	4.922	4.930	4.937	4.945	4.952	4.959	4.967	4.974	4.982	4.989	20′
40′	4.989	4.997	5.005	5.012	5.020	5.027	5.035	5.043	5.050	5.058	5.066	10′
50′	5.066	5.074	5.081	5.089	5.097	5.105	5.113	5.121	5.129	5.137	5.145	11°00′
79°00′	5.145	5.153	5.161	5.169	5.177	5.185	5.193	5.201	5.209	5.217	5.226	50′
10′	5.226	5.234	5.242	5.250	5.259	5.267	5.276	5.284	5.292	5.301	5.309	40′

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′	A
20′	5.309	5.318	5.326	5.335	5.343	5.352	5.361	5.369	5.378	5.387	5.396	30′
30′	5.396	5.404	5.413	5.422	5.431	5.440	5.449	5.458	5.466	5.475	5.485	20′
40′	5.485	5.494	5.503	5.512	5.521	5.530	5.539	5.549	5.558	5.567	5.576	10′
50′	5.576	5.586	5.595	5.605	5.614	5.623	5.633	5.642	5.652	5.662	5.671	10°00′
80°00′	5.671	5.681	5.691	5.700	5.710	5.720	5.730	5.740	5.749	5.759	5.769	50′
10′	5.769	5.779	5.789	5.799	5.810	5.820	5.830	5.840	5.850	5.861	5.871	40′
20′	5.871	5.881	5.892	5.902	5.912	5.923	5.933	5.944	5.954	5.965	5.976	30′
30′	5.976	5.986	5.997	6.008	6.019	6.030	6.041	6.051	6.062	6.073	6.084	20′
40′	6.084	6.096	6.107	6.118	6.129	6.140	6.152	6.163	6.174	6.186	6.197	10′
50′	6.197	6.209	6.220	6.232	6.243	6.255	6.267	6.278	6.290	6.302	6.314	9°00′
81°00′	6.314	6.326	6.338	6.350	6.362	6.374	6.386	6.398	6.410	6.423	6.435	50′
10′	6.435	6.447	6.460	6.472	6.485	6.497	6.510	6.522	6.535	6.548	6.561	40′
20′	6.561	6.573	6.586	6.599	6.612	6.625	6.638	6.651	6.665	6.678	6.691	30′
30′	6.691	6.704	6.718	6.731	6.745	6.758	6.772	6.786	6.799	6.813	6.827	20′
40′	6.827	6.841	6.855	6.869	6.883	6.897	6.911	6.925	6.940	6.954	6.968	10′
50′	6.968	6.983	6.997	7.012	7.026	7.041	7.056	7.071	7.085	7.100	7.115	8°00′
82°00′	7.115	7.130	7.146	7.161	7.176	7.191	7.207	7.222	7.238	7.253	7.269	50′
10′	7.269	7.284	7.300	7.316	7.332	7.348	7.364	7.380	7.396	7.412	7.429	40′
20′	7.429	7.445	7.462	7.478	7.495	7.511	7.528	7.545	7.562	7.579	7.596	30′
30′	7.596	7.613	7.630	7.647	7.665	7.682	7.700	7.717	7.735	7.753	7.770	20′
40′	7.770	7.788	7.806	7.824	7.842	7.861	7.879	7.897	7.916	7.934	7.953	10′
50′	7.953	7.972	7.991	8.009	8.028	8.048	8.067	8.086	8.105	8.125	8.144	7°00′

कोस्पंज

A	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′	शेष
83°00′	8.144	8.164	8.184	8.204	8.223	8.243	8.264	8.284	8.304	8.324	8.345	50′
10′	8.345	8.366	8.386	8.407	8.428	8.449	8.470	8.491	8.513	8.534	8.556	40′
20′	8.556	8.577	8.599	8.621	8.643	8.665	8.687	8.709	8.732	8.754	8.777	30′
30′	8.777	8.800	8.823	8.846	8.869	8.892	8.915	8.939	8.962	8.986	9.010	20′
40′	9.010	9.034	9.058	9.082	9.106	9.131	9.156	9.180	9.205	9.230	9.255	10′
50′	9.255	9.281	9.306	9.332	9.357	9.383	9.409	9.435	9.461	9.488	9.514	6°00′
84°00′	9.514	9.541	9.568	9.595	9.622	9.649	9.677	9.704	9.732	9.760	9.788	50′
10′	9.788	9.816	9.845	9.873	9.902	9.931	9.960	9.989	10.02	10.05	10.08	40′
20′	10.08	10.11	10.14	10.17	10.20	10.23	10.26	10.29	10.32	10.35	10.39	30′
30′	10.39	10.42	10.45	10.48	10.51	10.55	10.58	10.61	10.64	10.68	10.71	20′
40′	10.71	10.75	10.78	10.81	10.85	10.88	10.92	10.95	10.99	11.02	11.06	10′
50′	11.06	11.10	11.13	11.17	11.20	11.24	11.28	11.32	11.35	11.39	11.43	5°00′
85°00′	11.43	11.47	11.51	11.55	11.59	11.62	11.66	11.70	11.74	11.79	11.83	50′
10′	11.83	11.87	11.91	11.95	11.99	12.03	12.08	12.12	12.16	12.21	12.25	40′
20′	12.25	12.29	12.34	12.38	12.43	12.47	12.52	12.57	12.61	12.66	12.71	30′
30′	12.71	12.75	12.80	12.85	12.90	12.95	13.00	13.05	13.10	13.15	13.20	20′
40′	13.20	13.25	13.30	13.35	13.40	13.46	13.51	13.56	13.62	13.67	13.73	10′
50′	13.73	13.78	13.84	13.89	13.95	14.01	14.07	14.12	14.18	14.24	14.30	4°00′
86°00′	14.30	14.36	14.42	14.48	14.54	14.61	14.67	14.73	14.80	14.86	14.92	50′
10′	14.92	14.99	15.06	15.12	15.19	15.26	15.33	15.39	15.46	15.53	15.60	40′

स्पज

	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′	A
20′	15.60	15.68	15.75	15.82	15.89	15.97	16.04	16.12	16.20	16.27	16.35	30′
30′	16.35	16 43	16.51	16.59	16.67	16.75	16.83	16.92	17.00	17.08	17.17	20′
40′	17.17	17.26	17.34	17.43	17.52	17.61	17.70	17.79	17.89	17.98	18.07	10′
50′	18.07	18.17	18.27	18.37	18.46	18.56	18.67	18.77	18.87	18.98	19.08	3°00′
87°00′	19.08	19.19	19.30	19.41	19 52	19.63	19.74	19.85	19.97	20.09	20.21	50′
10′	20.21	20.33	20 45	20.57	20.69	20.82	20.95	21.07	21.20	21.34	21.47	40′
20′	21.47	21.61	21.74	21.88	22.02	22.16	22.31	22.45	22.60	22.75	22.90	30′
30′	22.90	23.06	23.21	23.37	23.53	23.69	23.86	24.03	24 20	24.37	24.54	20′
40′	24.54	24.72	24.90	25.08	25.26	25.45	25.64	25.83	26.03	26.23	26.43	10′
50′	26.43	26.64	26.84	27.06	27.27	27.49	27.71	27.94	28.17	28.40	28.64	2°00′
88°00′	28.64	28.88	29.12	29.37	29.62	29.88	30.14	30.41	30.68	30.96	31.24	50′
10′	31.24	31.53	31.82	32.12	32.42	32.73	33.05	33.37	33.69	34.03	34.37	40′
20′	34.37	34.72	35.07	35 43	35.80	36.18	36.56	36.96	37.36	37.77	38.19	30′
30′	38 19	38.62	39.06	39.51	39.97	40.44	40.92	41.41	41.92	42.43	42.96	20′
40′	42.96	43.51	44.07	44.64	45.23	45.83	46.45	47.09	47.74	48.41	49.10	10′
50′	49.10	49 82	50 55	51.30	52.08	52.88	53.71	54.56	55.44	56.35	57 29	1°00′
89°00′	57 29	58.26	59 27	60.31	61.38	62.50	63.66	64.86	66.11	67.40	68.75	50′
10′	68.75	70 15	71.62	73.14	74 73	76.39	78.13	79 94	81.85	83.84	85.94	40′
20′	85.94	88.14	90·46	92 91	95.49	98.22	101·1	104.2	107.4	110.9	114.6	30′
30′	114.6	118.5	122 8	127.3	132.2	137.5	143.2	149.5	156.3	163.7	171.9	20′
40′	171.9	180.9	191.0	202.2	214.9	229.2	245.6	264.4	286.5	312.5	343.8	10′
50′	343.8	382.0	429.7	491.1	573.0	687.5	859 4	1146	1719	3438	∞	0°00′

कोस्पज

§ 8. डिग्री-रेडियन संबंध (दे. § 183)

इकाई त्रिज्या वाले वृत के चाप की लम्बाई

डिग्री	रेडियन	डिग्री	रेडियन	डिग्री	रेडियन	मिनट	रेडियन	मिनट	रेडियन
0	0.0000	35	0.6109	70	1.2217	0	0.0000	30	0.0087
1	0.0175	36	0.6283	71	1.2392	1	0.0003	31	0.0090
2	0.0349	37	0.6458	72	1.2566	2	0.0006	32	0.0093
3	0.0524	38	0.6632	73	1.2741	3	0.0009	33	0.0096
4	0.0698	39	0.6807	74	1.2915	4	0.0012	34	0.0099
5	0.0873	40	0.6981	75	1.3090	5	0.0015	35	0.0102
6	0.1047	41	0.7156	76	1.3265	6	0.0017	36	0.0105
7	0.1222	42	0.7330	77	1.3439	7	0.0020	37	0.0108
8	0.1396	43	0.7505	78	1.3614	8	0.0023	38	0.0111
9	0.1571	44	0.7679	79	1.3788	9	0.0026	39	0.0113
10	0.1745	45	0.7854	80	1.3963	10	0.0029	40	0.0116
11	0.1920	46	0.8029	81	1.4137	11	0.0032	41	0.0119
12	0.2094	47	0.8203	82	1.4312	12	0.0035	42	0.0122
13	0.2269	48	0.8378	83	1.4486	13	0.0038	43	0.0125
14	0.2443	49	0.8552	84	1.4661	14	0.0041	44	0.0128
15	0.2618	50	0.8727	85	1.4835	15	0.0044	45	0.0131
16	0.2793	51	0.8901	86	1.5010	16	0.0047	46	0.0134
17	0.2967	52	0.9076	87	1.5184	17	0.0049	47	0.0137
18	0.3142	53	0.9250	88	1.5359	18	0.0052	48	0.0140
19	0.3316	54	0.9425	89	1.5533	19	0.0055	49	0.0143
20	0.3491	55	0.9599	90	1.5708	20	0.0058	50	0.0145
21	0.3665	56	0.9774	91	1.5882	21	0.0061	51	0.0148
22	0.3840	57	0.9948	92	1.6057	22	0.0064	52	0.0151
23	0.4014	58	1.0123	93	1.6232	23	0.0067	53	0.0154
24	0.4189	59	1.0297	94	1.6406	24	0.0070	54	0.0157
25	0.4363	60	1.0472	95	1.6581	25	0.0073	55	0.0160
26	0.4538	61	1.0647	96	1.6755	26	0.0076	56	0.0163
27	0.4712	62	1.0821	97	1.6930	27	0.0079	57	0.0166
28	0.4887	63	1.0996	98	1.7104	28	0.0081	58	0.0169
29	0.5061	64	1.1170	99	1.7279	29	0.0084	59	0.0172
30	0.5236	65	1.1345	100	1.7453				
31	0.5411	66	1.1519	180	3.1416				
32	0.5585	67	1.1694	200	3.4907				
33	0.5760	68	1.1868	300	5.2360				
34	0.5934	69	1.2043	360	6.2832				

§ 9. रेडियन का डिग्री और मिनट में रूपांतरण (दे. § 181)

रेडियन	डिग्री, मिनट	रेडियन	डिग्री, मिनट	रेडियन	डिग्री, मिनट	रेडियन	मिनट	रेडियन	मिनट
1	57°18′	0.1	5°44′	0.01	0°34′	0.001	0°03′	0.0001	0°00′
2	114°35′	0.2	11°28′	0.02	1°09′	0.002	0°07′	0.0002	0°01′
3	171°53′	0.3	17°11′	0.03	1°43′	0.003	0°10′	0.0003	0°01′
4	229°11′	0.4	22°55′	0.04	2°18′	0.004	0°14′	0.0004	0°01′
5	286°29′	0.5	28°39′	0.05	2°52′	0.005	0°17′	0.0005	0°02′
6	343°46′	0.6	34°23′	0.06	3°26′	0.006	0°21′	0.0006	0°02′
7	401°04′	0.7	40°06′	0.07	4°01′	0.007	0°24′	0.0007	0°02′
8	458°22′	0.8	45°50′	0.08	4°35′	0.008	0°28′	0.0008	0°03′
9	515°40′	0.9	51°34′	0.09	5°09′	0.009	0°31′	0.0009	0°03′

§ 10. रूढ़ संख्याएं (< 6000)

2	193	449	733	1031	1321	1637	1997	2333
3	197	457	739	1033	1327	1657	1999	2339
5	199	461	743	1039	1361	1663	2003	2341
7	211	463	751	1049	1367	1667	2011	2347
11	223	467	757	1051	1373	1669	2017	2351
13	227	479	761	1061	1381	1693	2027	2357
17	229	487	769	1063	1399	1697	2029	2371
19	233	491	773	1069	1409	1699	2039	2377
23	239	499	787	1087	1423	1709	2053	2381
29	241	503	797	1091	1427	1721	2063	2383
31	251	509	809	1093	1429	1723	2069	2389
37	257	521	811	1097	1433	1733	2081	2393
41	263	523	821	1103	1439	1741	2083	2399
43	269	541	823	1109	1447	1747	2087	2411
47	271	547	827	1117	1451	1753	2089	2417
53	277	557	829	1123	1453	1759	2099	2423
59	281	563	839	1129	1459	1777	2111	2437
61	283	569	853	1151	1471	1783	2113	2441
67	293	571	857	1153	1481	1787	2129	2447
71	307	577	859	1163	1483	1789	2131	2459
73	311	587	863	1171	1487	1801	2137	2467
79	313	593	877	1181	1489	1811	2141	2473
83	317	599	881	1187	1493	1823	2143	2477
89	331	601	883	1193	1499	1831	2153	2503
97	337	607	887	1201	1511	1847	2161	2521
101	347	613	907	1213	1523	1861	2179	2531
103	349	617	911	1217	1531	1867	2203	2539
107	353	619	919	1223	1543	1871	2207	2543
109	359	631	929	1229	1549	1873	2213	2549
113	367	641	937	1231	1553	1877	2221	2551
127	373	643	941	1237	1559	1879	2237	2557
131	379	647	947	1249	1567	1889	2239	2579
137	383	653	953	1259	1571	1901	2243	2591
139	389	659	967	1277	1579	1907	2251	2593
149	397	661	971	1279	1583	1913	2267	2609
151	401	673	977	1283	1597	1931	2269	2617
157	409	677	983	1289	1601	1933	2273	2621
163	419	683	991	1291	1607	1949	2281	2633
167	421	691	997	1297	1609	1951	2287	2647
173	431	701	1009	1301	1613	1973	2293	2657
179	433	709	1013	1303	1619	1979	2297	2659
181	439	719	1019	1307	1621	1987	2309	2663
191	443	727	1021	1319	1627	1993	2311	2671

2677	3011	3373	3727	4093	4481	4871	5233	5639
2683	3019	3389	3733	4099	4483	4877	5237	5641
2687	3023	3391	3739	4111	4493	4889	5261	5647
2689	3037	3407	3761	4127	4507	4903	5273	5651
2693	3041	3413	3767	4129	4513	4909	5279	5653
2699	3049	3433	3769	4133	4517	4919	5281	5667
2707	3061	3449	3779	4139	4519	4931	5297	5659
2711	3067	3457	3793	4153	4523	4933	5303	5669
2713	3079	3461	3797	4157	4547	4937	5309	5683
2719	3083	3463	3803	4159	4549	4943	5323	5689
2729	3089	3467	3821	4177	4561	4951	5333	5693
2731	3109	3469	3823	4201	4567	4957	5347	5701
2741	3119	3491	3833	4211	4583	4967	5351	5711
2749	3121	3499	3847	4217	4591	4969	5381	5717
2753	3137	3511	3851	4219	4597	4973	5387	5737
2767	3163	3517	3853	4229	4603	4987	5393	5741
2777	3167	3527	3863	4231	4621	4993	5399	5743
2789	3169	3529	3877	4241	4637	4999	5407	5749
2791	3181	3533	3881	4243	4639	5003	5413	5779
2797	3187	3539	3889	4253	4643	5009	5417	5783
2801	3191	3541	3907	4259	4649	5011	5419	5791
2803	3203	3547	3911	4261	4651	5021	5431	5801
2819	3219	3557	3917	4271	4657	5023	5437	5807
2833	3217	3559	3919	4273	4663	5039	5441	5813
2837	3221	3571	3923	4283	4673	5051	5443	5821
2843	3229	3581	3929	4289	4679	5059	5449	5827
2851	3251	3583	3931	4297	4691	5077	5471	5839
2857	3253	3593	3943	4327	4703	5081	5477	5843
2861	3257	3607	3947	4337	4721	5087	5479	5849
2879	3259	3613	3967	4339	4723	5099	5483	5851
2887	3271	3617	3989	4349	4729	5101	5501	5857
2897	3299	3623	4001	4357	4733	5107	5503	5861
2903	3301	3631	4003	4363	4751	5113	5507	5867
2909	3307	3637	4007	4373	4759	5119	5519	5869
2917	3313	3643	4013	4391	4783	5147	5521	5879
2927	3319	3659	4019	4397	4787	5153	5527	5881
2939	3323	3671	4021	4409	4789	5167	5531	5897
2953	3329	3673	4027	4421	4793	5171	5557	5903
2957	3331	3677	4049	4423	4799	5179	5563	5923
2963	3343	3691	4051	4441	4801	5189	5569	5927
2969	3347	3697	4057	4447	4813	5197	5573	5939
2971	3359	3701	4073	4451	4817	5209	5581	5953
2999	3361	3709	4079	4457	4831	5227	5591	5981
3001	3371	3719	4091	4463	4861	5231	5623	5987

§ 11. गणितीय प्रतीक

प्रतीक	अर्थ	उदाहरण	पढ़ें
$+$	जोड़	$a+b$	ए प्लस बी
$-$	घटाव	$a-b$	ए माइनस बी
$\times, \cdot$	गुणा	$a\times b,\ a\cdot b$	ए गुणा बी
$\div$	भाग	$a\div b$	ए भागा बी
$=$	बराबर	$a=b$	ए बराबर बी
$\neq$	नहीं बराबर	$a\neq b$	ए नहीं बराबर बी
$\approx$	लगभग	$a\approx b$	ए लगभग बी
$>$	बड़ा, अधिक	$a>b$	ए अधिक बी (से)
$<$	छोटा, कम	$a<b$	ए कम बी (से)
$\geqslant$	—	$a\geqslant$	ए बड़ा या बराबर बी
$\lvert\ \rvert$	परम या निरपेक्ष मान	$\lvert a\rvert$	परम ए (ए का परममान)
a^n	घात	$a^n=c$	ए पर एन बराबर सी
$:$	व्यतिमान	$a:b$	ए के प्रति बी, ए प्रति बी, ए बटा बी
$\sqrt[3]{}$	n-वां मूल	$\sqrt[3]{8}=2$	आठ का तीसरा मूल (घनमूल) बराबर दो
!	क्रम गुणन	$n!$	एन गुणाल
log	लगरथ	$\log_a b=c$	ए-भू का लौग बी, बराबर सी
lg	$\log_{10}$	$\lg 100=2$	दश-भू का लौग सौ बराबर दो
ln	$\log_e$		ई-भू का लौग...
lim	सीमा		सीमा, लिमिट
Σ	संकलन, कुल योग		सिग्मा, संकल
$\triangle$	त्रिभुज	$\triangle ABC$	त्रिभुज ए बी सी
$\angle$	कोण	$\angle ABC$	कोण ए बी सी

प्रतीक	अर्थ	उदाहरण	पढ़ें
$\frown$	चाप	$\overset{\frown}{AB}$	चाप AB
$\parallel$	समान्तर	$l \parallel m$	एल समांतर एम
$\perp$	लंब	$l \perp m$	एल लंब एम (पर)
$\sim$	समरूप	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	$\triangle ABC$ समरूप $\triangle DEF$ (के)
π	वृत की परिधि और उसके व्यास का व्यतिमान		पाइ
$^\circ$	डिग्री	$10^\circ\ 30'\ 35''$	दस डिग्री तीस मिनट पैंतीस सेकेंड
$'$	मिनट		
$''$	सेकेंड		
∞	अनंत		
sin	दे. पृ. 401	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	साइन तीस डिग्री बराबर आधा
cos		$\cos\frac{\pi}{2}$	कौस पाइ बटा दो
tan			टैन
cot			कौट
sec			सेक
cosec			कौसेक
arcsin	दे. पृ. 417	$\arcsin x$	आर्कसाइन x
arccos			आर्ककौस
arctan			आर्कटैन
arccot			आर्ककौट
arcsec			आर्कसेक
arccosec			आर्ककोसेक
$y=f(x)$			वाइ बराबर फलन x

§ 12. माप की मैट्रिक प्रणाली

लंबाई की माप

1 किलोमीटर (km) = 1000 मीटर (m)
1 मीटर (m) = 10 डेसीमीटर (dm) = 100 सेंटीमीटर (cm)
1 डेसीमीटर (dm) = 10 सेंटीमीटर (cm)
1 सेंटीमीटर (cm) = 10 मिलिमीटर (mm)

क्षेत्रफल की माप

1 वर्ग किलोमीटर (km^2) = 1000000 वर्ग मीटर (m^2)
1 वर्ग मीटर (m^2) = 100 वर्ग डेसीमीटर (dm^2) = 10000 वर्ग सेंटीमीटर (cm^2)
1 हेक्टर (ha) = 100 आर (a) = 10000 वर्ग मीटर (m^2)
1 आर (a) = 100 वर्ग मीटर (m^2)

व्योम की माप

1 घन मीटर (m^3) = 1000 घन डेसीमीटर (dm^3) = 1000000 घन सेंटीमीटर (cm^3)
1 घन डेसीमीटर (dm^3) = 1000 घन सेंटीमीटर (cm^3)
1 लीटर (l) = 1 घन डेसीमीटर (dm^3)
1 हेक्टोलीटर (hl) = 100 लीटर (l)

भार की माप

1 टन (ton) = 1000 किलोग्राम (kg)
1 सेंटनर = 100 किलोग्राम (kg)
1 किलोग्राम (kg) = 1000 ग्राम (g)
1 ग्राम (g) = 1000 मिलिग्राम (mg)

सोवियत मुद्रा

100 कोपेक = 1 रूबल

§ 13. रूस की कुछ पुरानी इकाइयां

लंबाई की माप

1 वेर्स्त = 500 साझेन = 1500 आर्शीन = 3500 फूट = 1066.8 m
1 साझेन = 3 आर्शीन = 48 वेर्शोक = 7 फूट = 84 इंच = 2.1336 m
1 आर्शीन = 16 वेर्शोक = 71.12 cm
1 वेर्शोक = 4.450 cm
1 फूट = 12 इंच = 0.3048 m
1 इंच = 2.540 cm
1 समुद्री मील = 1852.2 m (सोवियत संघ में),
1853.18 m (ब्रिटेन में),
1853.25 m (संयुक्त राज्य अमेरिका में)

भार की माप

1 पूद = 40 पौंड = 16.380 kg
1 पौंड = 0.40951 kg

§ 14. लातीनी वर्णमाला

छपाई में	लिखावट में	नाम	छपाई में	लिखावट में	नाम
A a	*A a*	ए	*N n*	*N n*	एन
B b	*B b*	बी	*O o*	*O o*	ओ
C c	*C c*	सी	*P p*	*P p*	पी
D d	*D d*	डी	*Q q*	*Q q*	क्यु
E e	*E e*	ई	*R r*	*R r*	आर
F f	*F f*	एफ	*S s*	*S s*	एस
G g	*G g*	जी	*T t*	*T t*	टी
H h	*H h*	एच	*U u*	*U u*	यू
I i	*I i*	आई	*V v*	*V v*	वी
J j	*J j*	जे	*W w*	*W w*	डबलयू
K k	*K k*	के	*X x*	*X x*	एक्स
L l	*L l*	एल	*Y y*	*Y y*	वाइ
M m	*M m*	एम	*Z z*	*Z z*	जेड

§ 15. ग्रीक वर्णमाला

Α α	अल्फा	Ν ν	न्यू
Β β	बीटा	Ξ ξ	क्सी
Γ γ	गामा	Ο ο	ओमीक्रोन
Δ δ	डेल्टा (देल्ता)	Π π	पाइ (पी)
Ε ε	एप्सीलोन	Ρ ρ	रो
Ζ ζ	जेटा (जेता)	Σ σ	सिग्मा
Η η	एटा (एता)	Τ τ	ताउ
Θ ϑ θ	थीटा (थेता)	Φ φ	फी
Ι ι	इयोटा (इयोता)	Χ χ	ही
Κ κ	कप्पा	Υ υ	उप्सीलोन
Λ λ	लैम्डा (लांब्दा)	Ψ ψ	प्सी
Μ μ	म्यू	Ω ω	ओमेगा

II अंकगणित

§ 16. अंकगणित का विषय

अंकगणित [अंकों की सहायता से गणन की कला] संख्याओं का विज्ञान है। यूरोपीय भाषाओं में इसके समानार्थी शब्दों का उद्भव यवन arithmos से हुआ है, जिसका अर्थ संख्या ही है। [भारत में इसे व्यक्तगणित (व्यक्त या ज्ञात राशियों द्वारा गणन की कला) भी कहा गया है।]

अंकगणित संख्याओं के सरलतम गुणों का और कलन के नियमों का अध्ययन करता है। संख्याओं के अधिक गंभीर गुणों का अध्ययन **संख्या-सिद्धांत** में होता है।

§ 17. पूर्ण (नैसर्गिक) संख्याएं

संख्याओं के बारे में प्रथम अवधारणाएं मनुष्य को आदिम काल में ही प्राप्त हो चुकी थीं (देखिए § 18)। इनका जन्म आदमियों, जीवों, फलों और अन्य वस्तुओं की गिनती से हुआ था। गिनती से एक,, दो तीन आदि संख्याएं उत्पन्न हुईं। इन्हें **नैसर्गिक संख्या** कहते हैं। अंकगणित में इन संख्याओं को **पूर्ण संख्या** कहते हैं (गणित में शब्द "पूर्ण संख्या" का और भी विस्तृत अर्थ है; दे. § 69)।

नैसर्गिक संख्याओं की अवधारणा सरलतम अवधारणाओं में से एक है। इसे सिर्फ उदाहरणों के जरिये समझाया जा सकता है। ईसा पूर्व तीसरी शती में युक्लिड ने संख्या (नैसर्गिक संख्या) की परिभाषा "इकाइयों के समाहार" के रूप में की थी। पर समाहार, समुच्चय, कुलक, गुच्छ आदि जैसे शब्द 'संख्या' शब्द से अधिक सुबोध नहीं हैं।

पूर्ण संख्याओं का क्रम

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

अनंत चलता रहता है; इसे **नैसर्गिक कतार** कहते हैं।

की संख्याओं के नामों के अतिरिक्त 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000 के भी नाम हैं। इन सबके आधार में संख्या 10 और 10 तक की संख्याओं के नाम हैं। इसके बाद निम्न नाम प्रयुक्त होते हैं : अयुत (10,000), लक्ष, प्रयुत, कोटि, अर्बुद, अब्ज, खर्व, निखर्व, महापद्म, शंकु, जलधि, अंत्य, मध्य, परार्ध। प्रत्येक में 10 से गुणा करने पर अगली संख्या मिलती है।]

संख्याओं के द्योतन के लिए शब्द-निर्माण के मूल में संख्या 10 और दस तक की संख्याओं के नाम रखे गये हैं, इसीलिए नामों की इस प्रणाली को **गिनती की दशभू** (या **दशमलव**) **प्रणाली** कहते हैं। इसमें संख्या 10 की विशेष भूमिका का कारण हमारे हाथों में 10 उंगलियों का होना ही है।

संख्याओं के नामकरण के मूल में संख्या 10 की उपस्थिति एक नियम है। पर विभिन्न भाषाओं में विभिन्न अपवाद मिल सकते हैं, जिन्हें गिनती के विकास की ऐतिहासिक विशेषताओं द्वारा समझाया जा सकता है। आधुनिक रूसी में एक ही अपवाद है — संख्या 40 का नाम 'सोरक' (प्राचीन रूसी शब्द 'सरोछ्का'), जिसका अर्थ था 'बहुत बड़ी बोरी', जिसमें ढेर सारे फर वाले चमड़े जमा हो सकते थे। कालांतर में इसका अर्थ 'बहुत' हो गया और फिर बाद में 'चालीस'। इसके पहले रूसी में 40 का नाम सामान्य नियम के अनुसार ही था।

फ्रांसीसी में संख्या 20 और 80 के नाम अदशभू हैं : 80 का नाम quatrevingt (चार बार बीस) है। यहां हम प्राचीन वीशभू गिनती का अवशेष देखते हैं, जिसमें आधार-संख्या 20 होती है (यह हाथों और पैरों की उंगलियों की कुल संख्या है)। लातीनी में भी संख्या 20 का नाम अदशभू है : viginiti ; पर 80 का नाम दशभू है (octoginta ; octo माने 8)। लेकिन 18, 19 के नाम 20 की सहायता से रखे गये हैं : duodeviginiti— दो कम बीस, undeviginiti एक कम बीस [तुलना करें : हिंदी में उन्नीस—एक कम बीस, उनतीस—एक कम तीस, आदि]।

संख्या 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900 के नाम सभी आधुनिक भाषाओं में दशभू के अनुरूप हैं।

§ 20. संख्या की अवधारणा का विकास

अलग-अलग वस्तुओं को गिनने की प्रक्रिया में सबसे छोटी संख्या इकाई होती है; उसे अंशों में बांटने की जरूरत नहीं पड़ती और अक्सर यह संभव भी

नही होता (कंकड़ गिनने में दो कंकड़ों के साथ तीसरे का आधा मिलाने पर 3 कंकड़ होते हैं, न कि $2\frac{1}{2}$; ढाई आदमी की समिति बनाना असंभव है)। लेकिन जब किसी *राशि की माप* लेनी पड़ती है, तब इकाई को अक्सर अंशों में बाँटने की जरूरत पड़ती है। उदाहरणार्थ, कदमों में लंबाई नापने पर $2\frac{1}{3}$ कदम जैसे परिणाम मिल सकते हैं। इसीलिए **भिन्न संख्या** (विभाजित इकाई) का जन्म अति प्राचीन काल में ही हो गया था (दे. §§ 31, 46)। आगे चल कर संख्या की अवधारणा को और भी विस्तृत करने की आवश्यकता पड़ी; एक-एक कर **अव्यतिमानी** (§ 93), **ऋण** (§ 69) और **मिश्र** (§§ 94, 100) संख्याएं सामने आयीं।

शून्य संख्या-परिवार के साथ बहुत बाद में आकर मिला। आरंभ में शून्य का अर्थ था—किसी संख्या की अनुपस्थिति (इसका और इसके लातीनी अनुवाद का शाब्दिक अर्थ है "कुछ नहीं")। यदि 3 में से 3 निकाल दिया जाये, तो सचमुच "कुछ नहीं" बचेगा। इस "कुछ नहीं" को संख्या मानने का आधार ऋण संख्याओं की उत्पत्ति और उनके अध्ययन से संबंधित है (दे. § 69)।

§ 21. अंक

अंक संख्या को व्यक्त या चित्रित (*अंकित*) करने वाला लिखित प्रतीक है। प्राचीन काल में संख्याओं को लकीरों द्वारा द्योतित किया जाता था : एक लकीर से इकाई, दो लकीरों से दुक्का, आदि। यह लेखन-विधि खाँचों के प्रयोग से उत्पन्न हुई थी। संख्या 1, 2, 3 के द्योतन के लिए प्रयुक्त रोमन अंकों में यह विधि अभी भी बची हुई है (दे. § 22.5)।

बड़ी संख्याओं के अंकन के लिए यह विधि अनुपयुक्त थी। इसी कारणवश संख्या 10 के लिए विशेष प्रतीकों को जन्म दिया गया (दशभू गिनती के अनुरूप, दे. § 19)। कुछ अन्य जनजातियों ने संख्या 5 के लिए विशेष प्रतीक बनाये (एक हाथ की उंगलियों की संख्या के आधार पर पंचभू गिनती के अनुरूप)। बाद में बड़ी संख्याओं के लिए प्रतीक बने। विभिन्न लोकजनों के यहाँ अलग-अलग प्रकार के प्रतीक बने, जिनका रूप समय के साथ-साथ बदलता रहा। **अंकन की प्रणालियां**, अर्थात् *बड़ी संख्याओं को चित्रित करने के लिए अंकों को मिलाने की विधियां* भी अलग-अलग प्रकार की थीं। फिर भी, अधिकतर अंकन-प्रणालियों ने दशभू आधार को ही महत्त्व दिया, जो गिनती की दशभू प्रणाली के अधिक प्रचलन के अनुरूप था।

5-01458

§ 22. अंकन प्रणालियां

1. प्राचीन ग्रीक अंकन. प्राचीन ग्रीस में तथाकथित एट्टिक (Attic, एथेंस की बोली से संबंधित) अंकन-प्रणाली प्रचलित थी। संख्याएं 1, 2, 3, 4 खड़ी लकीरों I, II, III, IIII. से द्यौतित होती थीं। संख्या 5 का प्रतीक था Γ (यह ग्रीक वर्ण 'पाइ' का प्राचीन रूप है; इससे शब्द pente, पाँच शुरू होता है)। संख्याएं 6, 7, 8, 9 निम्न प्रकार से लिखी जाती थी : ΓI, ΓII, ΓIII, ΓIIII। संख्या 10 का प्रतीक था Δ (शब्द 'देका'—दस—का प्रथम वर्ण)। संख्याएं 100, 1000 और 10000 भी तदनुरूप शब्दों के प्रथम वर्णों से लिखी जाती थीं : H, X, M। 50, 500, 5000 संख्याएं क्रमशः 5 और 10, 5 और 100, 5 और 1000 के प्रतीकों के मेल से लिखी जाती थीं : [illegible], [illegible], [illegible]। प्रथम दस हजार तक की बाकी संख्याएं निम्न प्रकार से लिखी जाती थीं :

HH[illegible]ΓI=256, XX[illegible]I=2051,

HHH[illegible]ΔΔII=382, [illegible]XX[illegible]HHH=7800

आदि।

ई. पू. तीसरी शती में एट्टिक अंकन-प्रणाली का स्थान आयोनिया (एक ग्रीक शहर, यूनान या यवन) की अंकन-प्रणाली ने ले लिया। इसमें 1 से 9 संख्याएं वर्णमाला के प्रथम नौ वर्णों से द्योतित होती थीं (वर्ण ϛ, -फाउ, ϙ, कप्पा और ϡ सांपी अब अप्रचलित हैं, अन्य वर्णों के नाम § 15 में देखें) :

$\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$, $\delta=4$, $\varepsilon=5$, ϛ $=6$, $\zeta=7$, $\eta=8$, $\theta=9$;

संख्या 10, 20, 30,..., 90 के लिए निम्न नौ वर्ण थे :

$\iota=10$, $\varkappa=20$, $\lambda=30$, $\mu=40$, $\nu=50$, $\xi=60$, $o=70$, $\pi=80$, ϙ $=90$;

100, 200,..., 900, संख्याएं अंतिम नौ वर्णों से द्योतित होती थीं:

$$\rho=100,\ \sigma\quad 200,\ \tau=300,\ \upsilon=400,\ \varphi=500,\ \chi=600,$$

$$\Psi=700,\ \omega=800,\ ϡ=900$$

हजार और दस हजार कोटि की संख्याओं को उन्हीं अंकों से द्योतित किया जाता था, सिर्फ उन पर एक हल्की-सी तिरछी लकीर ' डाल दी जाती थी :

$$'\alpha=1000,\ '\beta=2000, \text{ आदि ।}$$

अंक और वर्ण में भेद करने के लिए अंकों पर एक पड़ी रेखा डाली जाती थी, यथा : $\overline{\iota\eta}=18$, $\overline{\mu\zeta}=47$; $\overline{\upsilon\xi}=407$, $\overline{\chi\kappa\alpha}=621$, $\overline{\chi\kappa}=620$ आदि ।

वर्णमाला से संबंधित ऐसा अंकन प्राचीन काल में यहूदी, अरबी और निकट पूर्व के अन्य अनेक लोकजनों में प्रचलित था । किसके यहां पहले-पहल इसका प्रयोग हुआ था, यह ज्ञात नहीं है !

2. स्लावी अंकन. दक्षिणी और पूर्वी स्लावी लोकजन संख्या-लेखन के लिए वर्णमालीय अंकन का प्रयोग करते थे । कुछ स्लावी लोकजन वर्णों के सांख्यिक मान स्लावी वर्णमाला के क्रमानुसार रखते थे, कुछ स्लाव (जिनमें रूसी भी शामिल हैं) अंकन के लिए सिर्फ उन्हीं वर्णों का प्रयोग करते थे, जो ग्रीक वर्णमाला में भी थे । अंक व्यक्त करने वाले वर्ण के ऊपर लहरदार लकीर लगायी जाती थी (दे. अगले पृष्ठ पर सारणी) । इसमें वर्णों के सांख्यिक मान ग्रीक वर्णमाला के क्रमानुसार बढ़ते थे (स्लावी वर्णमाला में वर्णों का क्रम कुछ दूसरा था) ।

रूस में स्लावी अंकन 17-वीं शती के अंत तक प्रचलित रहा । प्योत्र-I* के जमाने से "अरबी अंकन" हावी होने लगा, जिसका उपयोग आज भी हो रहा है ("अरबी अंकन", देखिए इस अनुच्छेद के अंत में) । स्लावी अंकन अब सिर्फ धर्म-ग्रन्थों में रह गया है ।

* अंग्रेजी से – पीटर प्रथम । —सं.

स्लावी अंक निम्न है :

А҃	В҃	Г҃	Д҃	Є҃	Ѕ҃	З҃	И҃	Ѳ҃
1	2	3	4	5	6	7	8	9
І҃	К҃	Л҃	М҃	Н҃	Ѯ҃	Ѻ҃	П҃	Ч҃
10	20	30	40	50	60	70	80	90
Р҃	С҃	Т҃	Ѵ҃	Ф҃	Х҃	Ѱ҃	Ѡ҃	Ц҃
100	200	300	400	500	600	700	800	900

3. प्राचीन आर्मेनी और ग्रुजीनी अंकन. आर्म्यानीन और ग्रूजीन (आर्मेनियाई और जार्जियाई लोग) वर्णमाला-सिद्धांत पर आधारित अंकन का उपयोग करते थे। पर इनकी वर्णमालाओं में प्राचीन ग्रीक वर्णमाला से अधिक वर्ण थे, इसलिए इनके अंकन में 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000 संख्याओं के लिए भी प्रतीक थे। वर्णों के सांख्यिक मान वर्णमाला में वर्णों के क्रम का अनुसरण करते थे।

वर्णमालीय अंकन 18-वीं सदी तक हावी रहा, यद्यपि अलग-थलग स्थितियों में वहां "अरबी अंकन" का भी प्रयोग काफी पहले से हो रहा था (ग्रूजिया में इस तरह के उदाहरण 10-वीं या 11-वीं सदी से मिलने लगते हैं; आर्मेनिया में गणित के ऐतिहासिक ग्रन्थों में से सिर्फ 15-वीं सदी के ग्रन्थों में ऐसे उदाहरण अब तक पाये गये हैं)। आर्मेनिया में छंदों, पुस्तकों में अध्यायों आदि का क्रम दिखाने के लिए आज भी वर्णमालीय अंकन का प्रयोग होता है। ग्रूजिया में अब वर्णमालीय अंकन का प्रयोग नहीं है।

4. बेबीलोनी स्थानाश्रित अंकन. प्राचीन बेबीलोन में करीब 40 सदी ईसा पूर्व स्थानाश्रित अंकन की विधि रची गयी थी। **स्थानाश्रित अंकन** *में एक ही अंक अपने स्थान के अनुसार विभिन्न संख्याओं को व्यक्त कर सकता है।* हमारा आधुनिक अंकन भी स्थानाश्रित ही है : संख्या 52 में अंक 5 पचास, अर्थात् 5·10 को द्योतित करता है, पर संख्या 576 में यही अंक पाँच सौ अर्थात् 5·10·10 को द्योतित करता है। हमारे आज के अंकन में जो भूमिका 10 की है, वही भूमिका बेबीलोनी स्थानाश्रित अंकन में 60 की थी। इसीलिए इस अंकन को **षष्टिभू** (या साठ-आधारी) कहा जाता है। 60 से

कम की संख्याएं दो प्रतीकों की मदद से लिखी जाती थीं ; इकाई— से, और दशक— से। ये प्रतीक फणाकार थे, क्योंकि बेबीलोन वासी मिट्टी के तख्तों पर त्रिपार्श्व जैसी लम्बी छड़ी से लिखते थे। इन प्रतीकों को आवश्यकतानुसार दोहराया जाता था, जैसे :

= 5 = 30 = 35

= 59

60 से अधिक की संख्याओं को लिखने का तरीका निम्न उदाहरणों द्वारा दिखाया गया है : का अर्थ था $5 \cdot 60 + 2 = 302$। यह ठीक उसी प्रकार है, जैसे 52 का अर्थ $5 \cdot 10 + 2$ होता है। लेख

का अर्थ था $21 \cdot 60 + 35 = 1295$। अगला लेख

$1 \cdot 60 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 5 = 3725$ व्यक्त करता है, जैसे हमारा लेख 125 हमें $1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5$ का बोध कराता है। बीच का कोई स्थान खाली होने पर उसे प्रतीक द्वारा छेंकते थे; जाहिर है कि यह प्रतीक शून्य का काम करता था। अत: लेख

का अर्थ था $2 \cdot 60 \cdot 60 + 0 \cdot 60 + 3 = 7203$। पर निम्नतम स्थानों पर अंकों की अनुपस्थिति को नहीं दर्शाया जाता था; उदाहरणार्थ, संख्या $180 = 3 \cdot 60$ को लेख द्वारा दर्शाया जाता था। पर यही लेख संख्या 3 को भी द्योतित करता था और संख्या $10800 = 3 \cdot 60 \cdot 60$ को भी व्यक्त कर सकता

था। 3, 180, 10800 आदि संख्याओं में अंतर सिर्फ संदर्भ के आधार पर किया जाता था।

लेख का अर्थ $\frac{3}{60}$, $\frac{3}{60.60} = \frac{3}{3600}$, $\frac{3}{60\cdot60.60} = \frac{3}{216000}$

आदि भी हो सकता था। ठीक इसी तरह से हम दशमलव प्रणाली में 3 का प्रयोग $\frac{3}{10}$, $\frac{3}{10\cdot10} = \frac{3}{100}$, $\frac{3}{10\cdot10\cdot10} = \frac{3}{1000}$ आदि भिन्नों को दिखाने के लिए करते हैं। पर हम अंक 3 के पहले आवश्यक संख्या में शून्य बैठाकर इन भिन्नों में भेद कर लिया करते हैं : $\frac{3}{10} = 0.3$, $\frac{3}{100} = 0.03$, $\frac{3}{1000} = 0.003$ आदि। पर बेबीलोनी अंकन में ये शून्य निर्दिष्ट नहीं होते थे।

बेबीलोनवासी षष्टिभू प्रणाली के साथ-साथ दशभू प्रणाली का भी उपयोग करते थे, पर यह स्थानाश्रित नहीं थी। इसमें 1 और 10 के प्रतीकों के अतिरिक्त निम्न प्रतीक भी थे : 100 के लिए , 1000 के लिए , और 10,000 के लिए । 200, 300, आदि संख्याओं के संकेत थे :

आदि। 2000, 3000 आदि और 20,000, 30,000 आदि संख्याएं भी इसी विधि से लिखी जाती थीं। संख्या **274** लिखने का तरीका था :

;

संख्या 2068 निम्न प्रकार से द्योतित होती थी :

षष्टिभू प्रणाली दशभू के बाद आयी है, क्योंकि उसमें 60 को दशभू प्रणाली के ही आधार पर अंकित किया जाता है। पर षष्टिभू प्रणाली बेबीलोन में कब और कैसे आयी, इसका पता अब तक नहीं चल सका है। इसके बारे में अनेकानेक परिकल्पनाएं प्रस्तुत की गयी हैं, पर अब तक एक भी प्रमाणित नहीं हो सकी है।

पूर्णांकों का षष्टिभू अंकन एसीरियाई-बेबीलोनी राज्य के बाहर प्रचलित नहीं हुआ, पर **षष्टिभू भिन्न** इस सीमा को लांघ कर दूर-दूर तक निकट पूर्व के देशों, मध्य एशिया, उत्तरी अफ्रीका और पश्चिमी यूरोप के देशों में व्यवहृत होने

लगे। दशभू भिन्न के आविष्कार के पहले, अर्थात् सत्रहवीं सदी तक इनका उपयोग काफी विस्तृत था (विशेषकर खगोलशास्त्र में)। षष्टिभू भिन्न का अवशेष अब कोण और चाप की डिग्री (और साथ ही घंटे) के विभाजन में देख सकते हैं : एक डिग्री (और घंटे) को 60 मिनट में बाँटा गया है और एक मिनट को 60 सेकेंड में।

5. रोमन अंकन. प्राचीन रोमवासी जिस अंकम का प्रयोग करते थे, वह आज भी "रोमन अंकन" नाम से जीवित है। इसका उपयोग शताब्दियों, अधिवेशनों, पुस्तक के प्राक्कथनीय पृष्ठों, अध्यायों आदि के सांख्यिक नामकरण के लिए होता है।

रोमन अंकों का अंतिम रूप निम्न है :

I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500,
M = 1000

पहले इनका रूप कुछ अन्य था : संख्या 1000 को प्रतीक (|) द्वारा लिखते थे और संख्या 500 को |) द्वारा।

रोमन अंकों की उत्पत्ति के बारे में विश्वस्त सूचनाएं प्राप्त नहीं हैं। अंक V सटी उंगलियों समेत हथेली का आरेखात्मक चित्र हो सकता है और अंक X इसी प्रकार से दो हथेलियों का। 1000 का चिह्न 500 के चिह्न को दुगुना कर देने से बना हो सकता है (या ठीक इसका उल्टा)।

रोमन अंकन में गिनती की पंचभू प्रणाली के अवशेष स्पष्ट रूप से देखे जा सकते हैं, पर रोमवासियों की भाषा (लातीनी) में पंचभू प्रणाली का कोई अवशेष-चिह्न नहीं मिलता। इसका मतलब है कि यह अंकन उन्होंने किसी दूसरी लोक-जाति से 'उधार' लिया होगा (शायद एत्रुस्कों से)।

5000 तक की सभी पूर्ण संख्याएं उपरोक्त अंकों की सहायता से लिखी जाती हैं। इसका नियम है : यदि बड़ा अंक छोटे के पहले है, तो उन्हें जोड़ा जाता है (उदाहरण : VI = 6, अर्थात् 5 + 1; LX = 60, अर्थात् 50 + 10); पर यदि छोटा अंक बड़े के पहले है, तो बड़े में से छोटे को घटा दिया जाता है* (उदाहरण: IV = 4, अर्थात् 5 — 1, XL 40, अर्थात् 50 — 10)। आखिरी स्थिति में छोटे अंक के अतिरिक्त बार दुहराये जाने की संभावना नहीं रहती, क्योंकि उसके बाद तुरत बड़ा अंक आ जाता है। एक ही अंक लगातार तीन बार से अधिक नहीं लिखा जाता है, यथा LXX = 70, LXXX = 80, पर

* घटाने का यह नियम लातीनी भाषा में गणवाचक संख्याओं 18 व 19 के नामों में प्रतिबिंबित है (दे. § 19)।

सख्या 90 का लेख होगा XC (न कि LXXXX)।

रोमन अंकन में प्रथम 12 संख्याएं निम्न प्रकार से लिखी जाती हैं :

I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII.

अन्य उदाहरण :

XXVIII = 28, XXXIX = 39, CCCXCVII = 397,

MDCCCXVIII = 1818

इस तरह के लेखन में बहुअंकी संख्याओं के साथ अंकगणितीय संक्रिया संपन्न करना काफी मुश्किल होता है, पर इसके बावजूद रोमन अंकन इटली में 13-वीं शती तक, और पश्चिमी यूरोप के अन्य देशों में 16-वीं शती तक हावी रहा।

6. भारतीय स्थानाश्रित अंकन. भारत के विभिन्न क्षेत्रों में विभिन्न प्रकार की अंकन-प्रणालियां थीं। इनमें से एक धीरे-धीरे सारी दुनिया में फैलने लगी और अब सर्वमान्य हो गयी है। इस प्रणाली में अंक भारत की प्राचीन भाषा संस्कृत में प्रयुक्त तदनुरूप **गणवाचक** (समूहवाचक) संख्याओं के नामों के प्रथम अक्षरों द्वारा लिखे जाते थे (देवनागरी लिपि में)।

आरंभ में इन प्रतीकों द्वारा 1, 2, 3,..., 9, 10, 20, 30,..., 90, 100, 1000 संख्याएं द्योतित होती थीं; इनके सहारे अन्य संख्याएं भी लिखी जाती थीं। आगे चल कर किसी संख्या में रिक्त स्थान को दिखाने के लिए एक विशेष प्रतीक (मोटा-सा विंदु, या छोटा-सा वृत्त) प्रयुक्त होने लगा; 9 से अधिक की संख्याओं के प्रतीकों का प्रयोग लुप्त होने लगा और "देवनागरी अंकन" धीरे-धीरे दशभू स्थानाश्रित प्रणाली में परिवर्तित हो गया। कब और कैसे यह संक्रमण पूरा हुआ—यह अज्ञात है।

8-वीं शती के मध्य तक स्थानाश्रित अंकन-प्रणाली का प्रचलन भारत में काफी विस्तृत हो गया। लगभग इसी समय इसका प्रसार दूसरे देशों (हिंदचीन, चीन, तिब्बत, सोवियत संघ के वर्तमान मध्य-एशियाई जनतंत्रों, ईरान आदि) में होने लगा।

अरबी देशों में भारतीय अंकन के प्रसार में निर्णायक भूमिका एक पाठ्य-पुस्तक की रही, जिसे 9-वीं शती में खोरेज्म के मुहम्मद ने लिखा था (खोरेज्म क्षेत्र अब सोवियत उज्बेकिस्तान में आता है)। बीजगणित को जन्म देने वाले विलक्षण विद्वान भी ये ही थे (दे. § 68)। मुहम्मद ने अपनी कृति अरबी भाषा में लिखी थी, जो पश्चिमी यूरोप में लातीनी की तरह ही पूर्व के देशों में अंतर्राष्ट्रीय वैज्ञानिक भाषा थी। इतिहास में मुहम्मद अपने अरबीकृत नाम "मुहम्मद-अल-ख्वोरिज्म" (खोरेज्म के मुहम्मद) से प्रसिद्ध हैं। यूरोप में उनकी पुस्तक का लातीनी भाषा में अनुवाद 12-वीं शती में हुआ था।

इटली में भारतीय अंकन 13-वी सदी में प्रचलित हो गया था; पश्चिम यूरोप के अन्य देशों में इसे 16-वीं शती में प्रतिष्ठा मिली। यूरोपवासियों ने अरबियों से गृहीत भारतीय अंकन का नाम "**अरबी अंकन**" रखा। ऐतिहासिक दृष्टिकोण से यह नाम गलत है, पर परंपरावश अभी भी प्रचलित है।

अरब जनों ने यूरोप को "cipher" शब्द भी दिया (अरबी में "सिफ्र"), जिसका अर्थ है "रिक्त स्थान"। यह इसी अर्थ वाले संस्कृत शब्द "**शून्य**" का अरबी अनुवाद है। आरंभ में इस शब्द से किसी संख्या में खाली स्थान को द्योतित करने वाले प्रतीक को पुकारते थे। इस अर्थ में "सिफर" का प्रयोग 18-वीं शती तक चलता रहा, यद्यपि लातीनी शब्द nullum (कुछ नहीं) का प्रादुर्भाव 15-वीं शती में ही हो चुका था।

भारतीय अंकों के रूप में अनेक परिवर्तन होते रहे; जिस रूप का हम लोग प्रयोग करते हैं, वह 16-वी शती में स्थिर हो चुका था।

§ 23. बड़ी संख्याओं के नाम

बड़ी संख्याओं को पढ़ने और याद करने में सुविधा हो, इसके लिए अंकों को तथाकथित "**ग्रुपों**" में बांट देते हैं। दायें से प्रथम तीन अंकों के समूह को प्रथम ग्रुप कहते हैं, अगले तीन अंकों के समूह को दूसरा ग्रुप कहते हैं, आदि। आखिरी ग्रुप में तीन, दो या सिर्फ एक अंक हो सकता है। ग्रुपों के बीच थोड़ी जगह छोड़ दिया करते हैं। उदाहरणतः, संख्या 35461298 को निम्न प्रकार से लिखते हैं: 35 461 298। इसमें 298 प्रथम ग्रुप है, 461 दूसरा ग्रुप है और 35 तीसरा ग्रुप।

ग्रुप के हर अंक का स्थान **श्रेणी** कहलाता है। श्रेणियों की गिनती भी दायें से होती है। उदाहरणतः, प्रथम ग्रुप में अंक 8—प्रथम श्रेणी में है, 9—दूसरी श्रेणी में, 2—तीसरी श्रेणी में। आखिरी ग्रुप में तीन, दो या एक श्रेणियां हो सकती हैं। (हमारे उदाहरण में : 5 प्रथम श्रेणी में है और 3—दूसरी श्रेणी में)।

प्रथम ग्रुप की श्रेणियां क्रमशः इकाई, दहाई और सैकड़ा दिखाती हैं; दूसरे ग्रुप की श्रेणियां हजार की होती हैं; तीसरे ग्रुप की श्रेणियां **मिलियन** की होती हैं। उदाहरणतः संख्या 35 461 298 को पढ़ते हैं : पैंतीस *मिलियन* चार सौ इकसठ *हजार* दो सौ अट्ठानवे। इसीलिए कहते हैं कि दूसरे ग्रुप की इकाइयां हजार की हैं, तीसरे ग्रुप की इकाइयां मिलियन की हैं।

चौथे ग्रुप की इकाइयां **मिलियार्ड** की हैं, अर्थात् 1 मिलियार्ड 1000 मिलियन। **अमरीकी बिलियन** इसी मिलियार्ड को कहते हैं।

पांचवें ग्रुप की इकाइयां **ट्रिलियन** कहलाती हैं (1 ट्रिलियन = 1000 मिलियार्ड)। इस प्रकार, हर ग्रुप पिछले वाले ग्रुप से 1000 गुना अधिक होता है। छठे, सातवें, आठवें, नवें ग्रुपों की इकाइयां क्रमशः क्वाड्रिलियन, क्विंटिलियन, सेक्स्टिलियन, सेप्टिलियन कहलाती हैं, आदि।

उदाहरणतः, संख्या 12 021 306 200 000 को पढ़ते हैं: बारह *ट्रिलियन* इक्कीस *मिलियार्ड* तीन सौ छह *मिलियन* दो सौ *हजार*।

बड़ी संख्याओं के नामकरण की उपरोक्त पद्धति अमेरिका, फ्रांस और रूस में प्रचलित है। अंग्रेजी और जर्मन पद्धतियां इनसे कुछ भिन्न हैं, पर आपस में समान हैं। इनमें 1000 मिलियन (ब्रितानी मिलियार्ड) के बाद **ब्रितानी बिलियन** का नाम आता है, जो मिलियार्ड से 1000 गुना अधिक है। इसके बाद का प्रत्येक नाम पिछले वाले से 1000 000 गुना अधिक होता है, जैसे 1 ट्रिलियन = 1000 000 बिलियन, 1 क्वाड्रिलियन = 1000 000 ट्रिलियन, आदि।

[**हिंदी में** प्रचलित पद्धति के अनुसार किसी संख्या को लिखने का तरीका निम्न है: दायें से प्रथम तीन अंकों को एक ग्रुप में रखते हैं और इसके बाद दो-दो अंकों का ग्रुप बनाते जाते हैं, जैसे — 3 54 61 298। आखिरी ग्रुप में दो या एक अंक हो सकता है।

संख्या में किसी भी अंक के स्थान को श्रेणी कहते हैं। श्रेणियों की गिनती दायें से शुरू करते हैं और लगातार गिनते जाते हैं; हर ग्रुप के लिए श्रेणियों की गिनती अलग से नहीं करते।

पहली श्रेणी (या तुलना के लिए, प्रथम घर) में इकाइयां होती हैं, जिनकी संख्या 1 से 9 तक हो सकती है। दूसरी श्रेणी में इकाइयां दस-दस के समाहारों में होती हैं, जिनकी संख्या 1 से 9 तक हो सकती है; प्रत्येक समाहार को दहाई कहते हैं और इस प्रकार दूसरी श्रेणी दहाई की होती है। तीसरी श्रेणी (घर) में इकाइयां सौ-सौ के समाहारों में होती हैं, जिनकी संख्या 1 से 9 हो सकती है; इसे सैकड़े की श्रेणी कहते हैं।

उदाहरण: संख्या 253 की पहली श्रेणी में 3 इकाइयां हैं, दूसरी श्रेणी में 5 दहाइयां (दस-दस इकाइयों के 5 समाहार) हैं, और तीसरी श्रेणी में 2 सैकड़े (सौ-सौ इकाइयों के दो समाहार) हैं।

सैकड़े की श्रेणी के बाद हजार, दस हजार, लाख, दस लाख, करोड़, दस करोड़, अरब, दस अरब, खरब, दस खरब, नील, दस नील, पद्म, दस पद्म, शंख, दस शंख, महाशंख की श्रेणियां आती हैं। प्रत्येक श्रेणी पिछली वाली से दस गुनी अधिक इकाइयों वाले समाहार रखती है, जिनकी संख्या 1 से 9 तक हो सकती है।

यदि किसी श्रेणी में एक भी इकाई (या इकाइयों का एक भी समाहार) नहीं है, तो उसके स्थान पर **शून्य** लिखते हैं। जिस श्रेणी में इकाइयों के जितने समाहार हैं, उसके स्थान पर उतनी ही संख्या वाला अंक लिखते हैं। किसी समाहार में इकाइयों की कितनी संख्या होगी, यह इस बात पर निर्भर करता है कि समाहार किसकी श्रेणी में है—सैकड़े की, हजार की, दस खरब की, या नील की।]

§ 24. अंकगणितीय संक्रियाएं

1. जोड़, योग (संयोजन) क्या है, इसकी अवधारणा ऐसे सरल तथ्यों से बनी है कि इसे परिभाषित करने की आवश्यकता नहीं पड़ती। इसकी औपचारिक परिभाषा संभव भी नहीं है।

जोड़ का आलेख : $8+3=11$; जोड़ी जाने वाली संख्याओं (8 व 3) को **योज्य** (या **पद**) कहते हैं। जोड़ने से प्राप्त संख्या (11) **योगफल** या **संकल** कहलाती है।

2. घटाव *दिये गये संकल और एक पद की सहायता से दूसरे पद को ढूंढ़ने की क्रिया को कहते हैं।* संकल (जिसमें से घटाते हैं) **व्यवकल्य** कहलाता है, दिया गया पद **व्यवकारी** कहलाता है, इष्ट पद (या घटाने से प्राप्त फल) **अंतर** या **शेष** कहलाता है।

आलेख : $15-7=8$, 15 व्यवकल्य है, 7—व्यवकारी, 8—अंतर या शेष। अंतर 8 में व्यवकारी 7 जोड़ने पर व्यवकल्य 15 प्राप्त होता है। घटाव $15-7=8$ की जाँच, जोड़ $8+7=15$ द्वारा की जाती है।

3. गुणा. *किसी संख्या* (**गुण्य**) *में पूर्ण संख्या* (**गुणक**) *से गुणन* (गुणा करने) *का अर्थ है गुण्य को इतनी बार योज्य (पद) के रूप में ले कर जोड़ना, जितनी बार गुणक इंगित करे।* प्राप्त परिणाम को **गुणनफल** कहते हैं। (भिन्न से गुणा दे. § 35)।

आलेख : $12\times 5=60$, या $12\cdot 5=60$; 12 गुण्य है, 5 —गुणक और 60 गुणनफल। $12\times 5=12+12+12+12+12$ (अर्थात 5 बार 12 का योग)।

यदि गुण्य और गुणक की अदला-बदली हो जाये, तो गुणनफल पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। उदाहरणतः, $2\times 5=2+2+2+2+2=10$ और $5\cdot 2=5+5=10$। इसीलिए गुण्य और गुणक में से प्रत्येक को सिर्फ **गुणक** (या संगुणक, सहगुणक, **गुणनखंड**) भी कहते हैं।

4. भाग. *दिये हुए गुणनफल और एक गुणनखड की सहायता से दूसरे*

गुणनखंड को ज्ञात करने की क्रिया है। दिया हुआ गुणनफल **भाज्य** कहलाता है, गुणनखंड—**भाजक**, और इष्ट गुणनखंड—**भागफल**।

[भाग का अर्थ यह भी है कि एक संख्या (भाज्य) में दूसरी संख्या (भाजक) कितनी बार समाविष्ट है। मूलतः भाग बँटवारे की क्रिया है, जैसे छह (वस्तुओं) को तीन (आदमियों) में बाँटने पर प्रत्येक के हिस्से (भाग्य, भाग) में दो (वस्तुएं) होंगी।]

आलेख : 48 : 6 = 8, या 48 ÷ 6 = 8; 48 भाज्य है, 6—भाजक और 8—भागफल। भाजक 6 और भागफल 8 का गुणनफल है भाज्य 48 (भाग सही है या नहीं, इसकी जाँच की विधि)। भाग को $\frac{48}{6}=8$ या 48/6 = 8 के रूप में भी लिख सकते हैं (दे. § 37)।

एक पूर्ण संख्या में दूसरी से भाग देने पर यह जरूरी नहीं कि भागफल पूर्ण संख्या ही हो। इस स्थिति में भागफल को भिन्न के रूप में प्रस्तुत करते हैं (§ 31)। [उदाहरणार्थ, 3 में 5 से भाग देने पर कोई पूर्ण संख्या नहीं मिलती। फल को **भिन्नांक** या सिर्फ **भिन्न** (भिदी हुई, बँटी हुई संख्या) कहते हैं, इसके द्योतन की एक विधि है : $\frac{3}{5}$ (देखें § 16 और आगे)।]

यदि भागफल पूर्ण संख्या में मिले, तो कहा जाता है कि *पहली संख्या* **पूरी तरह विभाजित** *हो गयी*, या *पहली संख्या दूसरी से* **विभाज्य** *है* [यह भी कहा जाता है : पहली संख्या दूसरी से पूरी तरह कट गयी; (पूरी तरह) **कटने** का अर्थ है (पूरी तरह) विभाजित होना]। यथा, संख्या 35 संख्या 5 से विभाजित हो जाती है ; भागफल के रूप में प्राप्त पूर्ण संख्या 7 **पूर्णांक** कहलाती है।

यहाँ दूसरी संख्या को **विभाजक** (या **अपवर्तक**) कहते हैं और पहली को—दूसरी का **अपवर्त्य**।

उदाहरण 1. संख्या 5 संख्या 25, 60, 80 की विभाजक है, पर संख्या 4, 13, 42, 61 की नहीं।

उदाहरण 2. संख्या 60 संख्या 15, 20, 30 का अपवर्त्य है, पर संख्या 17, 40, 90 का अपवर्त्य नही है।

एक पूर्ण संख्या दूसरी से पूरी तरह विभाजित होती है या नहीं, यह अनेक स्थितियों में बिना भाग दिये भी जाना जा सकता है (दे. § 26)।

जब भाज्य भाजक से पूरी तरह विभाजित नहीं होता, तब कभी-कभी **अपूर्ण भाग** का उपयोग होता है, जिसमें भाज्य की अविभाजित इकाइयां **शेष** के रूप में दर्शायी जाती हैं। अपूर्ण भाग का अर्थ है ऐसी महत्तम पूर्ण संख्या को ज्ञात करना, जो भाजक से गुणित होने पर भाज्य से कम की संख्या दे। यह महत्तम पूर्ण संख्या **अपूर्ण भागफल** कहलाती है। भाज्य में से भाजक और अपूर्ण भागफल

का गुणनफल घटाने से प्राप्त अंतर ही शेष कहलाता है; यह भाजक से हमेशा कम होता है।

उदाहरण. संख्या 19 संख्या 5 से पूरी तरह विभाजित नहीं होती। संख्या 1, 2, 3 में 5 से गुणा करने पर गुणनफल 5, 10, 15 प्राप्त होते हैं, जो 19 से अधिक नहीं है। 4 के साथ 5 का गुणा संख्या 20 देता है, जो 19 से अधिक है। अत: अपूर्ण भागफल $=3$। 19 और गुणनफल $3\cdot5=15$ का अंतर $19-15=4$ है, इसीलिए शेष $=4$। [उत्तर हुआ $3\frac{4}{5}$ (तीन पूर्णांक चार बटा पांच)।]

शून्य से भाग, दे. § 38।

5. घातन. किसी संख्या को किसी पूर्ण संख्या बार गुणनखंडों के रूप में ले कर गुणा करना **घातन** (या **घातक्रिया**) कहलाता है। गुणनफल को **घात** कहते हैं; गुणनखंडों के रूप में दुहरायी जाने वाली संख्या को **घाताधार** (घात का आधार) कहते हैं। गुणनखंडों की संख्या को **निस्थापक** (एक्सपोनेंट) या **घातसूचक** (या सिर्फ सूचक, इंडेक्स) कहते हैं।

आलेख : $3^4=81$; यहां 3 घात का आधार है, 4 घात का निस्थापक या सूचक है, 81 घात है; $3^4=3\cdot3\cdot3\cdot3$। [3^4 को पढ़ें : "तीन का चौथा घात", "तीन पावर चार", "तीन पर चार", आदि।] जब निस्थापक कोई पूर्णांक होता है, तब **पूर्णांकी घात** मिलता है। [एक और अवधारणा—**घातकोटि** (घात की कोटि)—लाभदायक हो सकती है। "घात कोटि 10 है" का अर्थ है—घात का सूचक 10 है। बड़ी घातकोटि, छोटी घातकोटि, पूर्णांक घातकोटि आदि क्रमश: बड़े निस्थापक, छोटे निस्थापक, पूर्णांक निस्थापक आदि से मिलती हैं।]

दूसरे घात को **वर्ग** कहते हैं और तीसरे को—**घन**। पहला घात संख्या स्वयं होती है।

6. मूलन : *मूलन (मूल निकालना) घात और घात सूचक की सहायता से घात का आधार ज्ञात करने की क्रिया है।* दिया हुआ घात **मूलाधीन संख्या** कहलाता है, दिया हुआ घात सूचक **मूलांक** कहलाता है; घात का आधार, जिसे ज्ञात करना है, मूल कहलाता है। [मूलांक **मूल की कोटि** दर्शाता है।]

आलेख : $\sqrt[4]{81}=3$। यहां 81 मूलाधीन संख्या है, 4 मूलांक है, 3 मूल है। संख्या 3 को चौथे घात तक पहुँचाने से, या संख्या 3 के चौथे घातन से संख्या 81 मिलती है, अर्थात् $3^4=81$ (मूल की जांच इसी से होती है)।

दूसरे घात का मूल **वर्गमूल** कहलाता है और तीसरे घात का—**घनमूल**। संख्या 3 घात 81 का चौथा मूल है, दूसरा मूल (वर्गमूल) 9 है। वर्गमूल द्योतित करने में मूलांक 2 नहीं लिखते, अत: $\sqrt{16}=\sqrt[2]{16}=4$।

जोड़-घटाव, गुणा-भाग, घातन-मूलन—ये सभी परस्पर **प्रतीप** (उल्टी)

संक्रियाओं के युग्म हैं। अपेक्षा की जाती है कि प्रथम चार संक्रियाओं की संपादन-विधि से पाठक परिचित होंगे। घातन गुणा को दुहराने से होता है; मूलन के लिए देखें §§ 59, 60।

§ 25. संक्रिया-क्रम. कोष्ठक

यदि एक के बाद एक कई संक्रियाएं हों तो परिणाम संक्रियाओं के क्रम पर निर्भर करेगा। उदाहरणतः, $4-2+1=3$ होगा, यदि संक्रियाओं को लेख के क्रम में संपन्न किया जायेगा; पर यदि पहले 2 और 1 को जोड़ा जाये और प्राप्त संकलन (3) को 4 में से घटाया जाये, तो उत्तर (परिणाम) 1 मिलेगा।

किस क्रम में संक्रियाओं को संपन्न करना है, यह दिखाने के लिए (विशेषकर यदि परिणाम संक्रिया-क्रम पर निर्भर करता है) कोष्ठकों का उपयोग करते हैं। कोष्ठकों में बंद संक्रियाएं बाकी से पहले संपन्न होती हैं। हमारे उदाहरण में $(4-2)+1=3$, $4-(2+1)=1$।

उदाहरण 1. $(2+4)\times 5=6\times 5=30;$
$$2+(4\times 5)=2+20=22.$$

गणितीय आलेख क्लिष्ट न हो जायें, इसके लिए कोष्ठकों का प्रयोग निम्न परिस्थितियों में अनावश्यक माना गया है: (1) *जब क्रम में जोड़ और घटाव की संक्रियाएं हों और उन्हें उसी क्रम में संपन्न करना हो, जिस क्रम में वे लिखी गयी हों*; यथा, $(4-2)+1=3$ की जगह $4-2+1=3$ लिखते हैं; (2) जब कोष्ठक में *गुणा और भाग की संक्रियाएं हों*; यथा, $2+(4\times 5)=22$ की जगह $2+4\times 5=22$ लिखते हैं।

कोष्ठकहीन व्यंजन (या ऐसे व्यंजन, जिनमें कोष्ठक हों, पर कोष्ठक के भीतर कोष्ठक न हों) का कलन करते वक्त संक्रियाएं निम्न क्रम में संपन्न होती हैं: (1) पहले कोष्ठक में बंद संक्रियाएं संपन्न होती हैं; गुणा और भाग की संक्रियाएं अपने दिये हुए क्रम में संपन्न होती हैं, पर जोड़ और घटाव से पहले पूरी की जाती हैं; (2) इसके बाद बाकी संक्रियाएं संपन्न होती हैं—गुणा-भाग की संक्रियाएं अपने दिये हुए क्रम में, पर जोड़-घटाव के पहले।

उदाहरण 2. $2\cdot 5-3\cdot 3$. पहले गुणा खत्म करते हैं: $2\cdot 5=10$, $3\cdot 3=9$; इसके बाद घटाते हैं: $10-9=1$।

उदाहरण 3. $9+16:4-2\cdot(16-2\cdot 7+4)+6\cdot(2+5)$

पहले कोष्ठकों में बंद संक्रियाएं पूरी करते हैं:

$$16-2\cdot 7+4=16-14+4=6;\ 2+5=7.$$

अब बाकी संक्रियाएं पूरी करते हैं :

$$9+16:4-2\cdot6+6\cdot7=9+4-12+42=43.$$

संक्रिया-क्रम दिखाने के लिए अक्सर कोष्ठकयुक्त व्यंजनों को भी कोष्ठक में बंद करना पड़ता है। इस स्थिति में **छोटे कोष्ठक** के अतिरिक्त **मँझले** { } और **बड़े** [ ] कोष्ठकों का भी उपयोग करना पड़ता है। ऐसे व्यंजनों के कलन में संक्रिया-क्रम निम्न रखा जाता है: पहले सभी छोटे कोष्ठकों के भीतर की संक्रियाओं को उपरोक्त क्रम में संपन्न किया जाता है; इसके बाद सभी मँझले कोष्ठकों के भीतर की संक्रियाओं को उपरोक्त क्रम में संपन्न किया; फिर सभी बड़े कोष्ठकों के भीतर की संक्रियाओं को, आदि; और अंत में बाकी संक्रियाएं पूरी होती हैं।

उदाहरण 4. $5+2\times\{14-3\cdot(8-6)\}+32:(10-2\cdot3)$.
पहले छोटे कोष्ठकों के भीतर की संक्रियाएं पूरी करते हैं :

$$8-6=2;\ 10-2\cdot3=10-6=4;$$

मँझले कोष्ठक में : $14-3\cdot2=8$; बाकी संक्रियाएं पूरी करके प्राप्त करते हैं :

$$5+2\cdot8+32:4=5+16+8=29.$$

उदाहरण 5. $[100-\{35-(30-20)\}]\cdot2$.

संक्रिया-क्रम : $30-20=10$; $35-10=25$; $100-25=75$;
$75\cdot2=150$.

§ 26. विभाज्यता के लक्षण

2 से विभाज्यता के लक्षण. 2 से विभाज्य संख्या को **सम संख्या** कहते हैं और अविभाज्य को—**विषम संख्या**। *दो से विभाजित होने वाली संख्या के अंत में* (इकाई श्रेणी के स्थान पर) *सम संख्या द्योतित करने वाला अंक होता है, या शून्य होता है।*

उदाहरण. संख्या 52 738 संख्या 2 से विभाजित होती है, क्योंकि इसमें अंतिम अंक 8 सम संख्या है; 7691 संख्या 2 से विभाजित नहीं होती है, क्योंकि इसमें अंतिम अंक 1 विषम संख्या है, 1250 संख्या 2 से विभाजित होती है, क्योंकि इसमें अंतिम अंक शून्य है।

4 से विभाज्यता के लक्षण. *4 से विभाज्य संख्या के अंतिम दो अंक शून्य होते हैं, या 4 से विभाज्य संख्या बनाते हैं।* अन्य संख्याएं 4 से अविभाज्य हैं।

उदाहरण. 31 700 को 4 से विभाजित किया जा सकता है, क्योंकि इसमें

अंतिम दोनों अंक शून्य हैं; 2 15 634 को 4 से विभाजित नहीं किया जा सकता, क्योंकि अंतिम दो अंकों से बनी संख्या 34 को 4 से विभाजित नहीं किया जा सकता; 16 608 को 4 से विभाजित किया जा सकता है, क्योंकि आखिरी दो अंकों 08 से संख्या 8 बनती है, जो 4 से विभाज्य है।

8 से विभाज्यता के लक्षण. पिछले लक्षणों की तरह ही हैं। *8 से विभाज्य संख्या के अंतिम तीन अंक शून्य होते हैं, या अंतिम तीन अंक 8 से विभाज्य संख्या बनाते हैं।* अन्य स्थितियों में संख्या 8 से विभाजित नहीं होती।

उदाहरण. 120 000 संख्या 8 से विभाज्य है (आखिरी तीन अंक शून्य हैं); 170 004 संख्या 8 से अविभाज्य है (अंतिम तीन अंक 004 से बनने वाली संख्या 4 को 8 से विभाजित नहीं किया जा सकता); 111 120 संख्या 8 से विभाज्य है (अंतिम तीन अंकों से बनी संख्या 120 संख्या 8 से विभाजित होती है)। इस प्रकार के लक्षण 16, 32, 64, आदि संख्याओं से विभाज्यता के लिए भी दिखाये जा सकते हैं, पर इनका व्यावहारिक महत्त्व नहीं है।

3 और 9 से विभाज्यता के लक्षण. *3 से सिर्फ वे संख्याएं विभाजित होती हैं, जिनके अंकों का संकल 3 से विभाज्य है; 9 से सिर्फ वे संख्याएं विभाजित होती हैं, जिनके अंकों का संकल 9 से विभाज्य है।*

उदाहरण. 17 835 संख्या 3 से विभाज्य है, पर संख्या 9 से अविभाज्य है, क्योंकि इसके अंकों का संकल $1+7+8+3+5=24$ संख्या 3 से विभाज्य है, पर 9 से नहीं। 106 499 न तो 3 से विभाज्य है, न 9 से ही, क्योंकि इसके अंकों का संकल (29) न तो 3 से विभाज्य है, न 9 से। संख्या 52 632 को 9 से विभाजित किया जा सकता है, क्योंकि इसके अंकों का संकल (18) 9 से विभाज्य है।

6 से विभाज्यता का लक्षण. *संख्या 6 से विभाज्य है, यदि वह 2 और 3 दोनों से ही विभाज्य है; अन्यथा नहीं।*

उदाहरण. 126 संख्या 6 से विभाज्य है, क्योंकि यह 2 और 3 से विभाज्य है।

5 से विभाज्यता के लक्षण. *5 से विभाज्य संख्या का अंतिम अंक 0 या 5 होता है।* दूसरी संख्याएं 5 से अविभाज्य हैं।

उदाहरण. 5 से 240 विभाज्य है, क्योंकि इसका अंतिम अंक शून्य है; 5 से 554 (अंतिम अंक 4 होने की वजह से) अविभाज्य है।

25 से विभाज्यता के लक्षण. 25 से विभाज्य संख्याओं के अंतिम दो अंक शून्य होते हैं, या अंतिम दो अंक 25 से विभाज्य संख्या बनाते हैं (अन्य शब्दों में,

25 से विभाज्य संख्याओं के अंतिम दो अंक 00, 25, 50 या 75 होते हैं)।

उदाहरण. 25 से 7 150 विभाज्य है (क्योंकि 50 पर अंत है), पर 4855 अविभाज्य है।

10, 100, 1000 से विभाज्यता के लक्षण. *10 से सिर्फ वे संख्याएं विभाज्य हैं, जिनका अंतिम अंक शून्य है; 100 से सिर्फ वे संख्याएं विभाज्य हैं, जिनके अंतिम दो अंक शून्य होते हैं; 1000 से सिर्फ वे संख्याएं विभाज्य हैं, जिनके अंतिम तीन अंक शून्य होते हैं।*

उदाहरण. 8200 संख्या 10 व 100 से विभाज्य है; 542 000 संख्या 10, 100 व 1000 से विभाज्य है।

11 से विभाज्यता का लक्षण. *11 से सिर्फ ऐसी संख्या विभाजित होती है, जिसमें सम स्थानों के अंकों का संकल विषम स्थानों के अंकों के संकल से शून्य का अंतर रखता है, या 11 से विभाज्य किसी संख्या का।*

उदाहरण. 11 से 103 785 विभाज्य है, क्योंकि इसमें विषम स्थानों के अंकों के संकल $1+3+8=12$ और सम स्थानों के अंकों के संकल $0+7+5=12$ का अंतर शून्य है (दोनों बराबर हैं)। संख्या 91 63 627 भी 11 से विभाज्य है, क्योंकि इसमें विषम स्थानों के अंकों का संकल $9+6+6+7=28$ है और सम स्थानों के अंकों का संकल $1+3+2=6$ है; दोनों संकलों का अंतर $28-6=22$ है, जो 11 से विभाज्य है। 11 से 4 61 025 अविभाज्य है, क्योंकि संख्याओं $4+1+2=7$ और $6+0+5=11$ का अंतर $11-7=4$ है, जो न तो शून्य है, न 11 से विभाज्य ही।

उपरोक्त संख्याओं के अतिरिक्त अन्य संख्याओं से भी विभाज्यता के लक्षण हैं, पर वे अधिक जटिल हैं।

§ 27. रूढ़ और गुणज संख्याएं

1 के अतिरिक्त अन्य सभी पूर्ण संख्याओं के कम से कम दो विभाजक हैं— इकाई (एक) और स्वयं संख्या। जिन संख्याओं का और कोई विभाजक नहीं होता, वे **रूढ़** (या आद्य) कहलाती हैं। जिन संख्याओं के और भी विभाजक होते हैं, उन्हें **गुणज** (या यौगिक) कहते हैं। उदाहरणतः, 7, 41, 53 रूढ़ संख्याएं हैं; 21 गुणज संख्या है (इसके विभाजक हैं 1, 3, 7, 21), 81 भी एक गुणज संख्या है (इसके विभाजक हैं 1, 3, 9, 27, 81)।

संख्या 1 (इकाई) की गणना रूढ़ संख्याओं में की जा सकती है, पर बेहतर होगा कि इसे एक अलग विशेष वर्ग में रखा जाये, जिसमें न तो रूढ़ संख्याएं

आती हों, न गुणज ही। इसका कारण है कि बहुत से नियम, जो बाकी सभी रूढ़ संख्याओं के लिए सत्य हैं, इकाई पर लागू नहीं होते।

रूढ़ संख्याएं असंख्य हैं।

200 से कम की रूढ़ संख्याएं निम्न हैं, (और भी दे. § *10. रूढ़ संख्याएं* < 6000) :

$$\left.\begin{matrix} 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, \\ 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, \\ 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, \\ 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, \\ 193, 197, 199. \end{matrix}\right\} \text{(A)}$$

§ 28. रूढ़ गुणकों तक खंडन (गुणनखंड करना)

प्रत्येक गुणज संख्या को रूढ़ संख्याओं के गुणन के रूप में एकमात्र विधि से व्यक्त किया जा सकता है। यथा, $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$; $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5$ (या $3^2 \cdot 5^1$); $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$ (या $2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2$) [गुणक के रूप में प्रयुक्त रूढ़ संख्याएं **रूढ़ गुणक** हैं; गुणज संख्या को गुणकों (या रूढ़ गुणकों) में तोड़ना **गुणनखंड करना** है]। छोटी संख्याओं के गुणनखंड अटकल द्वारा आसानी से किया जा सकता है। बड़ी संख्याओं के लिए निम्न विधि का प्रयोग कर सकते हैं।

उदाहरण 1. मान लें कि दी गयी संख्या 1 421 है। § 27 की सारणी (A) की रूढ़ संख्याओं का एक-एक कर परीक्षण करते हैं। विभाज्यता-लक्षणों के आधार पर हम देखते हैं कि संख्याएं 2, 3, 5 संख्या 1421 का विभाजक नहीं हो सकती हैं। इसे सात से विभाजित करने का प्रयत्न करते हैं; देखते हैं कि 7 से 1 421 विभाजित हो जाता है और भागफल 203 मिलता है। खड़ी लकीर की बायीं ओर संख्या 1 421 लिखते हैं; दायीं ओर इसका विभाजक 7 लिखते हैं; विचाराधीन संख्या के नीचे भागफल 203 लिखते हैं।

आलेख :

1421	7
203	7
29	29

इसी प्रकार, अब संख्या 203 के लिए परीक्षण करते हैं। संख्याएं 2, 3, 5 पहले ही बेकार साबित हो चुकी हैं, इसलिए हम सीधे 7 के परीक्षण से शुरू करते हैं। पता चलता है कि 7 से 203 विभाज्य है; उसे 203 के सामने (लकीर की दायीं ओर) लिखते हैं। 203 के नीचे भागफल 29 लिखते हैं। चूंकि संख्या 29 रूढ़ है, इसलिए गुणनखंड की क्रिया पूरी हो चुकी है। फल है :

$$1421 = 7 \cdot 7 \cdot 29 = 7^2 \cdot 29.$$

इस सामान्य विधि को कभी-कभी सरल बनाया जा सकता है।

उदाहरण 2. संख्या 12 37 600 को रूढ़ गुणकों में तोड़ते हैं। यह देख कर कि, $12\,37\,600 = 12\,376 \times 100$, दोनों सहगुणकों को अलग-अलग तोड़ते हैं, दूसरा सहगुणक तुरंत टूट जाता है : $100 = 10 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5^2$। प्रथम सहगुणक को निम्न विधि से तोड़ते हैं।

आलेख :

12 376	2
6 188	2
3 094	2
1 547	7
221	13
17	17

सारणी (A) से प्रथम रूढ़ संख्या 2 लेते हैं। विभाज्यता-लक्षण से स्पष्ट है कि 2 से 12 376 विभाज्य है। भाग देने पर 6 188 मिलता है और हम सारणी (A) से पुनः संख्या 2 लेते हैं। दूसरा भागफल 3094 भी एक सम संख्या है, अतः उसमें भी 2 से भाग देते हैं। भागफल 1547 अब 2 से अविभाज्य है। विभाज्यता-लक्षण दिखाते हैं कि यह संख्या न तो 3 से विभाजित होती है, न 5 से। 1547 में 7 से भाग देने की कोशिश करते हैं ; भागफल मिलता है 221। एक बार फिर 7 से भाग देने की कोशिश करते हैं। भाग नहीं होता। तब अगली रूढ़ संख्याओं का परीक्षण करते हैं। 11 से 221 नहीं कटता, पर 13 से कट जाता है; भागफल के रूप में रूढ़ संख्या 17 मिलती है।

फल : $12\,37\,600 = 2^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$.

§ 29. महत्तम समष्टिक विभाजक

ऐसी संख्या, जो कई संख्याओं में से प्रत्येक को विभाजित करती है, उनका **समष्टिक विभाजक** कहलाती है (विभाजित करना और विभाजक दे § 24, परिभाषा 4 के अंतर्गत)। उदाहरणार्थ, संख्या 12, 18, 30 का समष्टिक विभाजक 3 है; संख्या 2 भी उनका एक समष्टिक विभाजक है। किन्हीं दी हुई संख्याओं के सभी समष्टिक विभाजकों के बीच हमेशा ही एक सबसे बड़ा समष्टिक विभाजक भी होता है। हमारे उदाहरण में यह है—संख्या 6। इस संख्या को **महत्तम समष्टिक विभाजक** [**महत्तम समापवर्तक**] कहते हैं (संक्षेप में MSW) और इसे $W(12, 18, 30)$ द्वारा द्योतित करते हैं; अतः $W(12, 18, 30) = 6$।

उदाहरण. संख्या 16, 20, 28 का MSW संख्या 4 है; संख्या 5, 30, 60, 90 का MSW संख्या 5 है।

यदि संख्याएं बड़ी नहीं हैं, तो उनका MSW आसानी से 'टटोल' कर ज्ञात कर लिया जा सकता है। यदि संख्याएं बड़ी हैं, तो प्रत्येक को रूढ़ गुणकों में

तोड़ते हैं (दे. § 28) और उन गुणकों को अलग लिख लेते हैं, जो सभी प्रदत्त संख्याओं में उपस्थित होते हैं। ऐसे प्रत्येक गुणक को हम उस निम्नतम घात के साथ लेते हैं, जिसके साथ वह दी हुई संख्याओं में निहित रहता है। इसके बाद उन्हें गुणा कर देते हैं।

उदाहरण 1. संख्या 252, 441, 1080 का MSW ज्ञात करें। प्रत्येक का गुणनखंड करते हैं :

$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$; $441 = 3^2 \cdot 7^2$; $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$.

रूढ़ गुणक 3 दी हुई संख्याओं के लिए समष्टिक (सामान्य) है; निम्नतम घात, जिसके साथ वह प्रदत्त संख्याओं में उपस्थित है, 2 के बराबर है। अतः $MSW = 3^2 = 9$ ।

उदाहरण 2. संख्या 234, 1080, 8100 का MSW ज्ञात करें।

$234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$; $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$; $8100 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$.

$MSW = 2 \cdot 3^2 = 18$.

ऐसा भी हो सकता है कि प्रदत्त संख्याओं के लिए कोई रूढ़ गुणक समष्टिक हो ही नहीं। इस स्थिति में महत्तम समष्टिक विभाजक 1 होगा। उदाहरणतया, संख्या $15 = 3 \cdot 5$, $10 = 2 \cdot 5$, $6 = 2 \cdot 3$ के लिए $MSW = 1$ । यदि दो संख्याओं का $MSW = 1$ हो, तो वे परस्पर रूढ़ (**व्यतिरूढ़**) या सापेक्षिकतः रूढ़ संख्याएं कहलाती हैं।

§ 30. लघुतम समष्टिक अपवर्त्य

ऐसी संख्या, जो कई संख्याओं में से प्रत्येक के लिए अपवर्त्य हो, उन संख्याओं का **समष्टिक अपवर्त्य** कहलाती है (अपवर्त्य दे. § 24 : 4)। यथा, संख्या 15, 6, 10 का समष्टिक अपवर्त्य 180 है, पर इनकी समष्टिक अपवर्त्य संख्या 90 भी है। सभी समष्टिक अपवर्त्यों के बीच एक लघुतम (सबसे छोटा) भी होता है, जो हमारी स्थिति में 30 है। इस संख्या को **लघुतम समष्टिक अपवर्त्य** (LSA) [या **लघुतम समापवर्त्य**] कहते हैं और A (15, 6, 10) द्वारा द्योतित करते हैं, अतः A (15, 6, 10) = 30 ।

यदि संख्याएं बड़ी नहीं हैं, तो उनका LSA अटकल-चुनाव से ज्ञात कर सकते हैं। यदि संख्याएं बड़ी हैं, तो निम्न विधि का उपयोग करते हैं : दी हुई संख्याओं को रूढ़ गुणकों में खंडित करते हैं और उन रूढ़ गुणकों को अलग-से लिख लेते हैं, जो कम से कम एक दी हुई संख्या में गुणनखंड के रूप में उपस्थित हों, ऐसे प्रत्येक गुणक को हम उस महत्तम घात के साथ लेते हैं, जिसमें वह दी हुई

संख्याओं में मिलता है। इन गुणकों को आपस में गुणा कर देते हैं।

उदाहरण 1. संख्या 252, 441, 1080 का LSA ज्ञात करें।

गुणनखंड करते हैं : $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$; $441 = 3^2 \cdot 7^2$; $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$ गुणकों $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 5$ को आपस में गुणा करते हैं, LSA = 52 920।

उदाहरण 2. संख्या 234, 1080, 8100 का LSA ज्ञात करें (दे. § 29, उदाहरण 2)। LSA $= 2^3 \cdot 3^4 \cdot 13 \cdot 5^2 = 210600$।

§ 31. सरल भिन्न

सरल भिन्न (संक्षेप में, सिर्फ **भिन्न**) इकाई के *अंश को कहते हैं, या इकाई के कतिक (कई एक) तुल्य अंशों को कहते हैं।* इकाई को कितने अंशों में बांटा गया है [इकाई का कौन-सा अंश है], यह दिखाने वाली संख्या भिन्न का **अंशनाम** [हर] कहलाती है; कितने अंश लिये गये हैं—यह दिखाने वाली संख्या भिन्न की **अंशसंख्या** [लव (या अंश भी)] कहलाती है।

लेख : $\frac{3}{5}$ या 3/5 (तीन बटा पाँच, या तीन पाँचवें अंश) में 3 अंशसंख्या है और 5 अंशनाम है।

यदि अंशसंख्या अंशनाम से कम हो, तो **उचित भिन्न** मिलता है : $\frac{3}{5}$ एक उचित भिन्न है। जब अंशसंख्या और अंशनाम बराबर होते हैं, तब भिन्न इकाई के बराबर हो जाता है। अंशसंख्या जब अंशनाम से अधिक होती है, तब भिन्न का मान इकाई से अधिक होता है। आखिरी दोनों प्रकार के भिन्न **अनुचित भिन्न** कहलाते हैं। यथा, $\frac{5}{5}$ और $\frac{17}{5}$ अनुचित भिन्न हैं।

अनुचित भिन्न में से उसमें निहित महत्तम पूर्ण संख्या को अलग करना. इसके लिए अंशसंख्या को अंशनाम से भाजित करते हैं; यदि वह बिना शेष विभाजित हो जाती है, तो इस अनुचित भिन्न का मान भागफल के बराबर होता है। यथा, $\frac{45}{5} = 45 : 5 = 9$। यदि भाग में शेष आता है, तो (अपूर्ण) भागफल ही इष्ट पूर्ण संख्या होता है [यह भिन्न का **पूर्णांक** या पूर्णांक वाला हिस्सा कहलाता है]। भिन्न वाले हिस्से (**भिन्नांक**) में अंशसंख्या का स्थान शेष ले लेता है; अंशनाम पहले जैसा ही रहता है।

उदाहरण. भिन्न $\frac{48}{5}$ प्रदत्त है। 48 को 5 से भाजित करते हैं। भागफल $= 9$, शेष $= 3$; $\frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$ [नौ पूर्णांक तीन बटा पाँच]।

संख्या, जिसमें पूर्णांक और भिन्नांक हों, संयुत **संख्या** कहलाती है (जैसे $9\frac{3}{5}$)। संयुत संख्या में भिन्नांक अनुचित भिन्न भी हो सकता है, जैसे $7\frac{13}{5}$; इस स्थिति में भिन्न वाले हिस्से में से महत्तम पूर्ण संख्या अलग कर ली जा सकती है

(दे. ऊपर) और संयुत संख्या को ऐसा रूप दिया जा सकता है, जिसमें भिन्न वाला हिस्सा (भिन्नांक) उचित भिन्न में परिणत हो जाय (या लुप्त ही हो जाय)। यथा, $7\frac{13}{5}=7+\frac{13}{5}=7+2\frac{3}{5}=9\frac{3}{5}$ । संयुत संख्याओं को प्राय: इसी रूप में व्यक्त करते हैं।

अक्सर उल्टी क्रिया संपन्न करनी पड़ती है (जैसे भिन्नों के गुणन में) : प्रदत्त संयुत संख्या को (अनुचित) भिन्न के रूप में प्रस्तुत करना पड़ता है। इसके लिए (1) संयुत संख्या में निहित पूर्णांक को भिन्नांक के अंशनाम के साथ गुणित करते हैं और (2) गुणनफल में अंशसंख्या जोड़ देते हैं। योगफल इष्ट भिन्न की अंश-संख्या होगा; उसका अंशनाम पहले जैसा ही रहेगा।

उदाहरण. संयुत संख्या $9\frac{3}{5}$ दी गयी है। (1) $9 \cdot 5=45$;
(2) $45+3=48$; (3) $9\frac{3}{5}=\frac{48}{5}$ ।

§ 32. भिन्न का कर्तन और प्रसारण

भिन्न की अंशसंख्या और उसके अंशनाम में एक ही संख्या से गुणा करने पर भिन्न का मान नहीं बदलता। यथा,

$\frac{3}{5}=\frac{3.6}{5.6}=\frac{18}{30}$; $\frac{1}{2}=\frac{1.3}{2.3}=\frac{3}{6}$; $\frac{1}{2}=\frac{1.4}{2.4}=\frac{4}{8}$

भिन्न के इस रूपांतरण को **भिन्न का प्रसारण** कहेंगे। यह भी कहेंगे कि भिन्न $\frac{3}{5}$ का "6 से प्रसारण" करने पर भिन्न $\frac{18}{30}$ प्राप्त होता है। ऐसे रूपांतरण की आवश्यकता अक्सर पड़ती रहती है (जैसे भिन्नों के जोड़ में) और यह भिन्न के कर्तन से कम महत्त्वपूर्ण क्रिया नहीं है (पर अभी तक इसे कोई विशेष नाम नहीं दिया गया है)।

भिन्न की अंशसंख्या और उसके अंशनाम में एक ही संख्या से भाग देने पर भिन्न का मान अपरिवर्तित रहता है। यथा,

$\frac{18}{30}=\frac{18:6}{30:6}=\frac{3}{5}$; $\frac{4}{8}=\frac{4:4}{8:4}=\frac{1}{2}$ ।

भिन्नों के इस रूपांतरण का नाम है **भिन्न का कर्तन** [भिन्न को काटना या सरल करना]। कहते हैं कि भिन्न $\frac{18}{30}$ को "6 से काटने पर" भिन्न $\frac{3}{5}$ मिलता है [यहां 6 **कर्तक** है]।

भिन्न को तभी काटा जा सकता है, जब उसकी अंशसंख्या और उसका अंशनाम एक ही संख्या से विभाजित हो सके (अर्थात् जब वे व्यतिरूढ़ न हों, दे. § 29)। कर्तन सीधे MSW (दे. § 29) से संपन्न किया जा सकता है, या धीरे-धीरे।

उदाहरण. भिन्न $\frac{108}{144}$ को काटें। विभाज्यता के लक्षणों (दे. § 26)

से स्पष्ट होता है कि अंशसंख्या और अंशनाम दोनों ही का समष्टिक विभाजक है संख्या 4। 4 से काटने पर : $\frac{108}{144}=\frac{108:4}{144:4}=\frac{27}{36}$। चूंकि 27 और 36 का समष्टिक विभाजक 9 है, इसलिए $\frac{27}{36}$ को 9 से काटते हैं : $\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$। अब और काटना संभव नहीं है (3 और 4 व्यतिरूढ़ संख्याएं हैं)।

यही परिणाम तब भी मिलेगा, जब हम भिन्न को सीधे 108 और 144 के महत्तम समष्टिक विभाजक (= 36) से काटेंगे :

$$\frac{108}{144}=\frac{108:36}{144:36}=\frac{3}{4}$$

महत्तम समष्टिक विभाजक से काटने पर **अकट भिन्न** मिलता है [जो आगे नहीं कट सकता]।

§ 33. भिन्नों की तुलना. समष्टिक अंशनाम देना

समान अंशसंख्या वाले दो भिन्नों में से बड़ा वह होता है, जिसका अंशनाम कम होता है। यथा, $\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$, $\frac{5}{7}>\frac{5}{9}$ समान अंशनाम वाले दो भिन्नों में से बड़ा वह होता है, जिसकी अंशसंख्या अधिक होती है। यथा, $\frac{5}{8}>\frac{3}{8}$।

यदि दो भिन्नों में न तो अंशसंख्याएं समान हों, न अंशनाम ही समान हों, तो उनकी तुलना के लिए उन्हें इस प्रकार रूपांतरित करते हैं कि दोनों भिन्नों में समान अंशनाम हो जायें। इसके लिए प्रथम भिन्न का दूसरे के अंशनाम से प्रसारण करते हैं और दूसरे भिन्न का प्रथम भिन्न के अंशनाम से प्रसारण करते हैं (प्रसारण दे. § 32)।

उदाहरण. भिन्न $\frac{3}{8}$ और $\frac{7}{12}$ की तुलना करें। प्रथम भिन्न का 12 से प्रसारण करते हैं और दूसरे का 8 से : $\frac{3}{8}=\frac{36}{96}$; $\frac{7}{12}=\frac{56}{96}$। अब अंशनाम समान हो गए हैं और अंशसंख्याओं की तुलना करके देखते हैं कि दूसरा भिन्न पहले से अधिक है।

भिन्नों का ऐसा रूपांतरण **भिन्नों को समष्टिक अंशनाम देना** कहलाता है।

दो से अधिक भिन्नों को समष्टिक अंशनाम देने के लिए प्रत्येक का प्रसारण करते हैं—बाकी के अंशनामों के गुणनफल से। यथा, भिन्न $\frac{3}{8}, \frac{5}{6}, \frac{2}{5}$ को समष्टिक अंशनाम देने के लिए पहले का प्रसारण $5\cdot6=30$ से, दूसरे का $8\cdot5=40$ से, और तीसरे का $8\cdot6=48$ से करते हैं। प्राप्त होता है : $\frac{3}{8}=\frac{90}{240}$; $\frac{5}{6}=\frac{200}{240}$; $\frac{2}{5}=\frac{96}{240}$। समष्टिक अंशनाम सभी प्रदत्त भिन्नों के अंशनामों का गुणनफल $(8\cdot6\cdot5=240)$ होगा।

समष्टिक अंशनाम देने की यह विधि सरलतम है और कई परिस्थितियों में सबसे व्यावहारिक भी है। इससे एकमात्र असुविधा यह है कि समष्टिक अंशनाम

बहुत बड़ा हो जा सकता है, जबकि छोटा अंशनाम भी चुना जा सकता है। समष्टिक अंशनाम के रूप में प्रदत्त अंशनामों का कोई भी समष्टिक अपवर्त्य लिया जा सकता है (विशेषकर लघुतम समष्टिक अपवर्त्य)। इसके लिए प्रत्येक भिन्न का प्रसारण उस भागफल द्वारा किया जाता है, जो समष्टिक अपवर्त्य में विचाराधीन भिन्न के अंशनाम से भाग देने से प्राप्त होता है। (इस भागफल को **अतिरिक्त गुणक** कहते हैं)।

उदाहरण. भिन्न $\frac{3}{8}, \frac{5}{6}, \frac{2}{5}$ प्रदत्त हैं। अंशनामों का लघुतम समष्टिक अपवर्त है 120। अतिरिक्त गुणक हैं (क्रमशः) : 120 : 8 = 15 ; 120 : 6 = 20 ; 120 : 5 = 24। प्रथम भिन्न का प्रसारण 15 से करते हैं, दूसरे का 20 से, तीसरे का 24 से। प्राप्त होता है :

$$\frac{3}{8}=\frac{45}{120}\,;\ \frac{5}{6}=\frac{100}{120}\,;\ \frac{2}{5}=\frac{48}{120}$$

अंकगणित की पुस्तकों में समष्टिक अंशनाम देने की सिर्फ यही विधि अक्सर वर्णित होती है। यह व्यावहारिक भी है, पर सिर्फ उसी परिस्थिति में, जब लघुतम समष्टिक अपवर्त्य (LSA) अटकल-चुनाव द्वारा आसानी से ज्ञात हो जाता है। यदि ऐसी परिस्थिति नहीं है, तो लघुतम समष्टिक अपवर्त्य और अतिरिक्त गुणकों को ज्ञात करने में ढेर सारा समय नष्ट हो जाता है। इसके अलावा, अक्सर ऐसा होता है कि अंशनामों के गुणनफल से LSA कुछ खास कम नहीं होता, या बिल्कुल ही कम नहीं होता, और तब खर्च किया गया समय और श्रम बिल्कुल बेकार हो जाता है।

§ 34. भिन्नों का जोड़ और घटाव

यदि भिन्नों के अंशनाम समान हैं, तो उन्हें जोड़ने के लिए उनकी अंशसंख्याओं को जोड़ना चाहिए, और घटाने के लिए व्यवकल्य की अंशसंख्या में से व्यवकारी की अंशसंख्या को घटाना चाहिए; प्राप्त योगफल या अंतर इष्टफल की अंशसंख्या होगा; अंशनाम पहले जैसा ही रहेगा।

यदि भिन्नों के अंशनाम असमान हैं, तो सबसे पहले भिन्नों को समष्टिक अंशनाम दे देना चाहिए।

उदाहरण 1. $\frac{5}{8}+\frac{7}{8}=\frac{12}{8}=1\frac{4}{8}=1\frac{1}{2}$।

उदाहरण 2. $\frac{3}{8}+\frac{5}{6}-\frac{2}{5}=\frac{45}{120}+\frac{100}{120}-\frac{48}{120}=\frac{97}{120}$।

यदि संयुत संख्या को जोड़ना है, तो पूर्णांकों का योगफल अलग ज्ञात करते हैं और भिन्नांकों का योगफल अलग।

उदाहरण 3. $7\frac{3}{4}+4\frac{5}{6}=(7+4)+(\frac{3}{4}+\frac{5}{6})=11\frac{19}{12}=12\frac{7}{12}$।

संयुत संख्याओं के घटाव में व्यवकारी का भिन्नांक व्यवकल्य के भिन्नांक से अधिक हो सकता है। इस स्थिति में व्यवकल्य का भिन्नांक अपने पूर्णांक से इकाई "कर्ज" ले कर अनुचित भिन्न में परिणत हो जाता है।

उदाहरण 4. $7\frac{1}{4}-4\frac{1}{3}=7\frac{3}{12}-4\frac{4}{12}=6\frac{15}{12}-4\frac{4}{12}=\mathbf{2\frac{11}{12}}$ ।

उदाहरण 5. $11-10\frac{5}{7}=10\frac{7}{7}-10\frac{5}{7}=\frac{2}{7}$ ।

§ 35. भिन्नों का गुणा. परिभाषा

भिन्न में पूर्ण संख्या से गुणा और भाग करने में § 24 की परिभाषाओं 3 और 4 को सत्य माना जा सकता है। उदाहरणार्थ,

$$2\frac{3}{4}\times 3=2\frac{3}{4}+2\frac{3}{4}+2\frac{3}{4}=8\frac{1}{4}.$$

प्रतीपतः, $8\frac{1}{4} : 3=2\frac{3}{4}$ । कलन के व्यावहारिक नियम देखिए आगे।

भिन्न संख्या से गुणा करने में § 24 की परिभाषा लागू नहीं होती। यथा, संक्रिया $2\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$ पूरी नहीं की जा सकती, यदि इससे यह समझा जाय कि $2\frac{1}{2}$ को $\frac{3}{4}$ बार योज्य पदों के रूप में लेना है।

किसी संख्या (पूर्ण या भिन्न) में ***भिन्न से*** *गुणा करने का अर्थ है इस संख्या को भिन्न के अंशनाम से विभाजित करना और फल को अंशसंख्या से गुणित करना ।*

उदाहरण. $800\cdot\frac{3}{4}$; $800 : 4=200$; $200\cdot 3=600$, अतः $800\cdot\frac{3}{4}=600$ । संक्रियाओं (भाग और गुणा) का क्रम बदला जा सकता है ; फल वही होगा : $800\cdot 3=2400$, $2400 : 4=600$ ।

उपरोक्त परिभाषा में कोई मनमानापन नहीं है। पूर्ण संख्याओं के साथ काम करने में गुणन-संक्रिया की जो व्यावहारिक और सैद्धांतिक भूमिका होती है, उसे सुरक्षित रखने की आवश्यकता से ही यह परिभाषा उद्भूत होती है। दो उदाहरणों से इसे स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण. एक लीटर किरासन का भार 800 g है। 4 लीटर कितना भारी होगा ?

हल : $800\cdot 4=3200$ g $=3$ kg 200 g। उत्तर 4 से गुणा करने पर प्राप्त होता है।

$\frac{3}{4}$ लीटर किरासन कितना भारी होगा ?

हल : $800\cdot\frac{3}{4}=600$ g (दे. पिछला उदाहरण)।

यदि भिन्न के गुणा की कोई दूसरी परिभाषा दी जाती, तो हमें गलत उत्तर मिलता। यदि हम § 24 की परिभाषा के अनुसार $\frac{3}{4}$ से गुणा को असंभव मान लेते, तो किरासन के भार से संबंधित प्रश्नों को अलग-अलग संक्रियाओं द्वारा हल

करना पड़ता : लीटर की संख्या पूर्ण होने पर गुणा द्वारा, और भिन्न होने पर—किसी अन्य संक्रिया द्वारा।

यहां प्रश्न उठता है कि क्या एक ही बार ऐसी परिभाषा नहीं दी जा सकती, जिसके अनुसार पूर्ण संख्या से भी गुणा किया जा सके और भिन्न संख्या से भी ? पता चलता है कि यह असंभव है : भिन्न से गुणा की परिभाषा देने में यह मान कर चलना जरूरी हो जाता है कि पूर्ण संख्या से गुणा पहले से ज्ञात है (दे. ऊपर दी गयी परिभाषा)।

पूर्ण संख्याओं के गुणन में गुणकों के स्थान-परिवर्तन से गुणनफल में परिवर्तन नहीं होता : $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12$। यह विशेषता भिन्न से गुणा करने में भी स्थिर रहती है। यथा, $\frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2$; यह फल पुरानी परिभाषा (दे. § 24) के आधार पर मिला है। अब गुणकों का स्थान-परिवर्तन करें $3 \cdot \frac{2}{3}$; पुरानी परिभाषा अब काम नहीं आयेगी, पर नयी परिभाषा से— $3 \cdot \frac{2}{3} = 2$।

यूं देखा जाये, तो गुणा की नयी परिभाषा एक को छोड़ कर बाकी सभी विशेषताओं और नियमों को सुरक्षित रखती है : गुणा की पुरानी परिभाषा में संख्या का वर्धन होता है। गुणन का अर्थ ही है संख्या की आवृत्ति ; इसी से गुणन का दूसरा अर्थ मिलता है—बहुलता की प्राप्ति। लेकिन अब हमें कहना पड़ता है : *इकाई से बड़ी संख्या से गुणा* करने पर *गुण्य* का *वर्धन* होता है ; *इकाई से कम की संख्या* (अर्थात् उचित भिन्न) *से गुणा* करने पर गुण्य *घट* जाता है। इस आखिरी तथ्य का संक्रिया के नाम के साथ मेल नहीं बैठता, क्योंकि नाम "गुणन" उस समय दिया गया था, जब गुणा की अवधारणा सिर्फ पूर्ण संख्याओं के साथ संबंधित थी।

§ 36. भिन्नों का गुणा. विधि

भिन्न में भिन्न से गुणा *करने के लिए अंशसंख्या में अंशसंख्या से गुणा करते हैं, और अंशनाम में अंशनाम से गुणा करते हैं। परिणाम एक भिन्न होता है, जिसमें अंशसंख्या प्रदत्त अंशसंख्याओं का गुणनफल होती है और अंशनाम प्रदत्त अंशनामों का गुणनफल होता है।* यदि कोई गुणक संयुत संख्या के रूप में होता है, तो पहले उसे अनुचित भिन्न में परिणत कर लेते हैं। गुणा के पहले ही अंशसंख्या का कोई भी गुणक अंशनाम के किसी भी गुणक के साथ समष्टिक विभाजक द्वारा काट लिया जा सकता है।

उदाहरण 1. $2\frac{1}{12} \cdot 1\frac{7}{20} = \frac{25}{12} \cdot \frac{27}{20} = \frac{5}{4} \cdot \frac{9}{4} = \frac{45}{16} = 2\frac{13}{16}$ (5 से 25 और 20 कटे हैं ; 3 से 12 और 27।

उपरोक्त बातें उस स्थिति में भी लागू होती हैं, जब गुणकों की संख्या दो से अधिक होती है।

उदाहरण 2. $4\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\cdot4\frac{2}{3}=\frac{9.4.14}{2.7.3}=\frac{3.2.2}{1.1.1}=12$ (9 और 3 कटे हैं 3 से, 4 और 2—2 से, 14 और 7—7 से)।

यदि कोई गुणक पूर्ण संख्या है, तो उसे भी भिन्न मान लिया जाता है, जिसका अंशनाम 1 होता है।

उदाहरण 3. $\frac{5}{8}\cdot7\cdot\frac{4}{15}=\frac{5.7.4}{8.1.15}=\frac{1.7.1}{2.1.3}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$ (5 से 5 और 15 कटे हैं; 4 से 8 और 4)।

§ 37. भिन्नों का भाग

§ 24 में दी गई भाग की परिभाषा भिन्नों के भाग के लिए भी सही है। इससे निम्न विधि मिलती है :

किसी संख्या को भिन्न से भाजित करने के लिए उस संख्या में प्रदत्त भिन्न के प्रतीप से गुणा करना पड़ता है (किसी भिन्न में अंशसंख्या और अंशनाम के स्थानों की अदला-बदली कर देने से **प्रतीप भिन्न** या भिन्न का प्रतीप प्राप्त होता है)।

उदाहरण 1. $\frac{2}{3}:\frac{4}{15}$ । $\frac{4}{15}$ का प्रतीप है $\frac{15}{4}$ । अतः $\frac{2}{3}:\frac{4}{15}=\frac{2}{3}\cdot\frac{15}{4}=2\frac{1}{2}$ ।

उदाहरण 2. $1\frac{3}{5}:3\frac{1}{5}=\frac{8}{5}:\frac{16}{5}=\frac{8.5}{5.16}=\frac{1.1}{1.2}=\frac{1}{2}$.

यह विधि उस स्थिति में भी लागू होती है, जब भाज्य और भाजक दोनों ही सिर्फ पूर्णांक होते है। यथा, $2:5=2\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$ । इसीलिए बटे की लकीर भाग के चिह्न के समतुल्य होती है।

§ 38. शून्य के साथ संक्रियाएं

जोड़. किसी संख्या में शून्य जोड़ने से संख्या अपरिवर्तित रहती है : $5+0=5$; $3\frac{5}{7}+0=3\frac{5}{7}$ ।

घटाव. किसी संख्या में से शून्य घटाने पर संख्या अपरिवर्तित रहती है : $5-0=5$; $3\frac{5}{7}-0=3\frac{5}{7}$ ।

गुणा. शून्य से किसी भी संख्या में गुणा करने पर गुणनफल शून्य होता है : $5\cdot0=0$; $0\cdot3\frac{5}{7}=0$; $0\cdot0=0$ ।

भाग. 1. शून्य में किसी शून्येतर संख्या से भाग देने पर भागफल शून्य मिलता है : $0 : 7 = 0$; $0 : \frac{3}{8} = 0$ ।

2. शून्य में शून्य से भाग देने पर भागफल अनिश्चित रहता है। इस स्थिति में कोई भी संख्या भागफल की परिभाषा (§ 24.4) को तुष्ट कर सकती है। उदाहरणार्थ, $0 : 0 = 5$ रख सकते हैं, क्योंकि $5 \cdot 0 = 0$; पर इसी तरह $0 : 0 = 3\frac{5}{7}$ भी रख सकते हैं, क्योंकि $3\frac{5}{7} \cdot 0 = 0$ भी सही है। हम कह सकते हैं कि शून्य में शून्य से भाग देने के प्रश्न के हल अनगिनत हैं और संक्रिया $0 : 0$ तब तक निरर्थक रहती है, जब तक कि अतिरिक्त सूचनाओं से यह पता न चले कि *भाज्य और भाजक के मान शून्य होने से पहले किस तरह वे परिवर्तित हो रहे थे*। यदि यह ज्ञात हो, तो अधिकतर स्थितियों में व्यंजन $0 : 0$ को निश्चित अर्थ दिया जा सकता है। यथा, यदि ज्ञात हो कि शून्य होने के पहले भाज्य क्रमशः $\frac{3}{100}$, $\frac{3}{1000}$, $\frac{3}{10000}$, आदि मान ग्रहण करता जा रहा था और भाजक इसी समय क्रमशः $\frac{7}{100}$, $\frac{7}{1000}$, $\frac{7}{10000}$, आदि मान ग्रहण कर रहा था, तो भागफल इस समय $\frac{3}{100} : \frac{7}{100} = \frac{3}{7}$, $\frac{3}{1000} : \frac{7}{1000} = \frac{3}{7}$, $\frac{3}{10000} : \frac{7}{10000} = \frac{3}{7}$, आदि मान ग्रहण कर रहा था, अर्थात् वह हर समय $\frac{3}{7}$ था ; अतः इस स्थिति में $0 : 0$ का भागफल $\frac{3}{7}$ माना जा सकता है।

इसे "$0 : 0$ की अनिश्चिति का उद्घाटन" कहते हैं (दे. § 258, उदा. 2)। इसके लिए उच्च गणित में कई व्यापक उदाहरणों का अध्ययन किया जाता है, पर बहुत सारी स्थितियों में सरल गणित के साधनों से भी काम चलाया जा सकता है।

3. किसी शून्येतर संख्या में शून्य से भाग का भागफल कोई अस्तित्व नहीं रखता, क्योंकि इस स्थिति में भागफल की परिभाषा (§ 24.4) को कोई भी संख्या तुष्ट नहीं करती।

उदाहरण के लिए $7 : 0$ लेते हैं। परीक्षण के लिए कोई भी संख्या लीजिए (जैसे 2, 3, 7), वह काम नहीं आयेगी (क्योंकि $2 \cdot 0 = 0$, $3 \cdot 0 = 0$, $7 \cdot 0 = 0$; जबकि हमें गुणनफल 7 चाहिए ; अर्थात् ऐसी कोई संख्या नहीं है, जिसमें 0 से गुणा करने पर गुणनफल 7 मिले, अतः भागफल की परिभाषा के अनुसार $7 : 0$ का अस्तित्व नहीं है)। हम कह सकते हैं कि शून्येतर संख्या में शून्य से भाग का प्रश्न कोई हल नहीं रखता।

पर शून्येतर संख्या में किसी ऐसी संख्या से भाग दिया जा सकता है, जो शून्य के यथासंभव निकट हो; और भाजक शून्य के जितना ही निकट होगा, भागफल उतना ही बड़ा होगा। अतः यदि 7 में $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, आदि से भाग देंगे, तो 70, 700, 7000, 70000, आदि भागफल मिलेंगे,

जो असीम रूप से बढ़ते जायेंगे। इसलिए अक्सर कहा जाता है कि, 7 में 0 से भाग देने पर भागफल ''अनंत बड़ा'' या ''अनंत के बराबर'' होता है। लेख में इसे यूं व्यक्त करते हैं : $7 : 0 = \infty$। इस कथन का अर्थ है कि जब भाजक शून्य के निकट होता जाता है और भाज्य 7 के बराबर बना रहता है (या 7 के निकट होता जाता है), तब भागफल असीम रूप से बढ़ने लगता है।

§ 39. पूर्ण और खंड

1. पूर्ण से खंड ज्ञात करना. *संख्या का खंड (कोई भाग) ज्ञात करने के लिए उसमें इस खंड को व्यक्त करने वाले भिन्न से गुणा करते हैं।*

उदाहरण 1. समिति की सभा वैध मानी जाये, इसके लिए कम से कम $\frac{2}{3}$ सदस्यों की उपस्थिति चाहिए। समिति में 120 सदस्य हैं। कितने सदस्यों से सभा शुरू की जा सकती है?

हल. $120 \cdot \frac{2}{3} = 80$ सदस्य.

2. खंड से पूर्ण ज्ञात करना. *यदि संख्या के खंड (किसी भाग) का मान प्रदत्त हो, तो संख्या ज्ञात करने के लिए खंड के मान में खंड व्यक्त करने वाले भिन्न से भाग देते हैं।*

उदाहरण. किसी फल में उसके भार का $\frac{3}{5}$ भाग रस होता है। 420 kg रस प्राप्त करने के लिए कितने kg फल चाहिए?

हल. $420 : \frac{3}{5} = 700$ kg.

3. पूर्ण के अंशों में खंड की अभिव्यक्ति. *पूर्ण के अंशों में खंड को व्यक्त करने के लिए खंड में पूर्ण से भाग देते हैं।*

उदाहरण. कक्षा में 30 छात्र पढ़ते हैं, चार अनुपस्थित हैं; छात्रों का कौन-सा भाग अनुपस्थित है?

हल. $4 : 30 = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$.

[उदाहरण 1 में पूर्ण 120 है, खंड 80 है; खंड को पूर्ण के अंशों (या भाग) में व्यक्त करने वाला भिन्न $\frac{2}{3}$ है, अर्थात्

$$\frac{\text{खंड}}{\text{पूर्ण}} = \textbf{खंड का व्यंजक भिन्न}$$]

§ 40. दशमलव भिन्न

सरल भिन्नों में यदि अंशनाम कुछ बड़े हों, तो कलन बहुत क्लिष्ट हो जाता

है। मुख्य कठिनाई भिन्नों को समष्टिक अंशनाम देने में होती है, क्योंकि उनके अंश-नाम किसी भी संख्या के बराबर हो सकते हैं जिनके चयन के पीछे कोई प्रणाली नहीं होती। इसलिए पुरातन काल में ही इस विचार का जन्म हुआ कि इकाई के अंशों को (जो सरल भिन्न में अंशनाम की भूमिका निभाते हैं) मनमाने ढंग से नहीं, बल्कि प्रणालीबद्ध रूप से चुना जाये। प्राचीनतम **प्रणालीबद्ध भिन्न संख्या** साठ पर आधारित षष्टिभू भिन्न थे, जो ईसा से कोई 4000 वर्ष पूर्व बेबीलोन में प्रयुक्त होते थे, वहां से ये प्राचीन ग्रीक खगोलशास्त्रियों के मार्फत पश्चिम यूरोपीय खगोलशास्त्रियों तक पहुंचे (दे. § 22.4)। 16-वीं शती के अंत में, जब भिन्नों के साथ जटिल कलन जीवन के हर क्षेत्र में प्रयुक्त होने लगे, दूसरे प्रकार के प्रणालीबद्ध भिन्न—**दशभू** या **दशमलव भिन्न**—भी व्यवहार में आने लगे (दे. § 46)। इनमें इकाई को दस भागों (दशांशों) में बांटा जाता है, प्रत्येक दशांश को पुनः दस अंशों (शतांशों) में बांटा जाता है, आदि। अन्य प्रणालीबद्ध भिन्नों की तुलना में दशमलव या दशभू भिन्नों की उत्कृष्टता इस बात में है कि ये उसी प्रणाली पर आधारित हैं, जिस पर गिनती और पूर्ण संख्याओं के लेखन की विधि आधारित की गयी है। इसी कारणवश दशमलव भिन्नों के द्योतन और उनके साथ संक्रियाओं के नियम वस्तुतः वही रह जाते हैं, जो पूर्ण संख्याओं के लिए हैं।

दशमलव भिन्न लिखने में अंशों के नाम ("अंशनाम") द्योतित करने की आवश्यकता नहीं पड़ती; यह तदनुरूप अंकों के स्थान से ही स्पष्ट हो जाता है। पहले पूर्णांक लिखते हैं, उसके दायें **दशमलव का बिंदु** रखते हैं, जिसके बाद पहला अंक दशांशों की श्रेणी द्योतित करता है, दूसरा अंक शतांशों की, तीसरा—सहस्त्रांशों की, आदि। बिंदु के बाद (दायें) के अंक **दशमलव स्थान** कहलाते हैं (कुछ देशों में बिंदु की जगह अर्ध-विराम चिह्न (,) का उपयोग करते हैं)।

उदाहरण. 7.305 का अर्थ है सात पूर्णांक, तीन दशांश, पाँच सहस्त्रांश (शून्य दिखाता है कि शतांश अनुपस्थित हैं), अर्थात्

$$7.305 = 7 + \frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{5}{1000}$$

दशमलव भिन्नों की एक उत्कृष्टता इस बात में भी है कि भिन्नांक (भिन्न वाले हिस्से) को तुरत ही सरल भिन्न का रूप दिया जा सकता है :

$$7.305 = 7\tfrac{305}{1000};$$

बिंदु के बाद की संख्या (305) भिन्नांक की अंशसंख्या है; दशमलव के आखिरी स्थान के अंशों का नाम (हमारे उदाहरण में—सहस्त्रांश) बताने वाली संख्या (जैसे हजार) भिन्नांक का अंशनाम होती है।

यदि दशमलव भिन्न में पूर्णांक नहीं होता है, तो बिंदु के पहले शून्य लिखते हैं; जैसे $\frac{35}{100} = 0.35$।

§ 41. दशमलव भिन्नों की विशेषताएं

1. दशमलव भिन्न के दायें बैठाये गये शून्यों से उसका मान परिवर्तित नहीं होता ।

उदाहरण 12.7 = 12.70 = 12.700, आदि। (12.7 और 12.70 आदि लेखों में अंतर दे. § 49)।

2. दशमलव भिन्न में दायें अंत के शून्यों को हटा देने से उसके मान में परिवर्तन नहीं होता ।

उदाहरण. 0.00830 = 0.0083. (जो शून्य *अंत* में नहीं हैं, उन्हें नहीं हटाना चाहिए)।

3. दशमलव बिंदु को एक, दो, तीन, आदि स्थान दायें खिसकाने से दशमलव भिन्न का मान 10, 100, 1000, आदि गुना अधिक हो जाता है।

उदाहरण. संख्या 13.058 सौ गुना अधिक हो जायेगी, यदि इस प्रकार से लिखेंगे : 1305.8 ।

4. दशमलव बिंदु को एक, दो, तीन आदि स्थान बायें खिसकाने से दशमलव भिन्न का मान 10, 100, 1000, आदि गुना कम हो जाता है ।

उदाहरण. संख्या 176.24 दस गुना कम हो जायेगी, यदि 17.624 लिख दिया जाये ; और 1000 गुना कम हो जायेगी, यदि 0.17624 लिखा जाये ।

इन विशेषताओं के कारण 10, 100, 1000, आदि संख्याओं से गुणा-भाग जल्द पूरा किया जा सकता है ।

उदाहरण. 12.08·100 = 1208; 12.08·10000 = 120000 (पहले 12.08 को 12 0800 के रूप में लिखते हैं और तब दशमलव बिंदु को चार स्थान दायें खिसका देते हैं); 42.03 : 10 = 4.203; 42.03 : 1000 = 0.04203 (पहले 42.03 को 0042.03 के रूप में लिखते हैं और तब दशमलव को तीन स्थान बायें खिसका देते हैं) ।

§ 42. दशमलव भिन्नों का जोड़, घटाव और गुणा

दशमलव भिन्नों के जोड़ और घटाव, पूर्ण संख्याओं के जोड़-घटाव की तरह ही संपन्न होते हैं; सिर्फ हर संख्या के हर अंक को अपनी श्रेणी (दे. § 23) के नीचे लिखना चाहिए (दूसरे शब्दों में, समान श्रेणी वाले अंक एक स्तंभ में लिखे जाते हैं) ।

लेख :

```
   2.3
+  0.02
+ 14.96
-------
  17.28
```

उदाहरण. 2.3 + 0.02 + 14.96 = 17.28.

दशमलव भिन्नों का गुणा. दी हुई संख्याओं को आपस में पूर्ण संख्याओं की तरह ही (दशमलव बिंदु पर ध्यान दिये बगैर) गुणा करते हैं। गुणनफल में दशमलव बिंदु का स्थान निम्न नियम से निर्धारित होता है : *गुणनफल में दशमलव स्थानों की संख्या सभी गुणकों में दशमलव स्थानों की कुल संख्या के बराबर होती है* (दशमलव स्थान दे. § 40)।

उदाहरण 1. 2.064·0.05. पूर्ण संख्याओं 2064 और 5 का गुणा करते हैं : 2064·5 = 10 320। प्रथम गुणक में तीन दशमलव-स्थान (दशमलव बिंदु के बाद तीन अंक) हैं और दूसरे गुणक में दो दशमलव स्थान (बिंदु के बाद दो अंक) हैं। गुणनफल में पांच दशमलव स्थान (3+2) होने चाहिए; उन्हें दायें से अलग करने पर 0.10320 प्राप्त होता है। भिन्न के अंत में स्थित शून्य को छोड़ा जा सकता है, अत: 2.064·0.05 = 0.1032.

इस विधि में दशमलव बिंदु रखने से पहले शून्य नहीं छोड़ना चाहिए (§ 56 में वर्णित विधि के अनुसार गुणा करने में शून्य छोड़े जा सकते हैं)।

उदाहरण 2. 1.125·0.08; 1125·8 = 9000। दशमलव बिंदु के बाद 3+2 = 5 स्थान होने चाहिए। 9000 में *बायें* दो शून्य बढ़ा कर बिंदु द्वारा दायें से पांच स्थान अलग कर लेते हैं। प्राप्त होता है 0.09000 = 0.09।

§ 43. दशमलव भिन्न में पूर्ण संख्या से भाग

1. यदि भाज्य भाजक से कम है, तो भागफल में पूर्णांक की जगह शून्य रखते हैं और उसके बाद दशमलव बिंदु रखते हैं। इसके बाद भाज्य में दशमलव बिंदु पर ध्यान दिये बगैर पूर्णांक के साथ भिन्नांक का पहला अंक मिला लेते हैं। यदि भाज्य अब भी भाजक से कम है, तो भागफल में दशमलव बिंदु के बाद शून्य बैठाते हैं और भाज्य के पूर्णांक में भिन्नांक का एक और अंक मिला लेते हैं। यदि भाज्य अब भी भाजक से कम है, तो भागफल में दशमलव बिंदु के बाद एक और शून्य बैठाते हैं और भाज्य के पूर्णांक में एक और अंक मिला लेते हैं। यह क्रम तबतक चलाते हैं, जबतक कि भाज्य भाजक से अधिक न हो जाये। इसके बाद भाग वैसे ही देते हैं, जैसे पूर्ण संख्या में। सिर्फ एक बात है कि यहां भाज्य के अंत में शून्य बैठा-बैठा कर उसे असीम "प्रसार" दे सकते हैं।

ध्यातव्य. यह भी संभव है कि भाग की उपरोक्त प्रक्रिया कभी खत्म ही नहीं होगी। ऐसी स्थिति में भागफल को दशमलव भिन्न द्वारा परिशुद्धता के साथ व्यक्त नहीं किया जा सकता, पर कुछ अंकों के बाद प्रक्रिया को रोक कर भागफल

का सन्निकट मान प्राप्त कर सकते हैं (दे. आगे § 30)।

उदाहरण 1. 13.28 : 64.

लेख :

```
13.28 | 64
12.8  | 0.2075
  48
  480
  448
   320
```

यहां भाज्य के पूर्णांक में भिन्नांक का प्रथम अंक मिलाते ही भाजक से बड़ी संख्या (132) मिल जाती है। इसीलिए भागफल में बिंदु के तुरत बाद कोई शून्य नहीं है। पर भिन्नांक के दूसरे अंक समेत पहला शेष (48) भाजक से कम है, इसीलिए भागफल में दो के बाद (दायें) एक शून्य रखा गया है। 48 पर एक शून्य बैठा कर इसे 480 बना देते हैं। यह शून्य कहां से आता है ? भाज्य का "प्रसार" कर उसे 13.280 का रूप देते हैं, जिसका आखिरी शून्य 48 पर उतारते हैं। अब भाग आगे बढ़ाते हैं। अगले शेष 32 पर फिर शून्य उतारना पड़ता है (भाज्य को 13.2800 का रूप देकर)।

उदाहरण 2. 0.48 : 75.

लेख :

```
0.480 | 75
 450  | 0.0064
 300
```

यहाँ भाज्य के पूर्णांक में भिन्नांक का पहला अंक मिलाने से 4 प्राप्त होता है, जो 75 से छोटा है। अतः भागफल में बिंदु के बाद (दायें) एक शून्य बैठाते हैं। दूसरे अंक को मिलाने से 48 प्राप्त होता है, जो 75 से अब भी छोटा है। भागफल में बिंदु के बाद एक और शून्य बैठाते हैं। भिन्न का एक शून्य द्वारा "प्रसार" कर के 0.480 प्राप्त करते हैं, आदि।

2. यदि भाज्य भाजक से बड़ा है, तो पहले उसके पूर्णांक में भाग देते हैं; भागफल लिख कर दशमलव बिंदु बैठाते हैं। इसके बाद भाग पिछले उदाहरणों की तरह आगे बढ़ाते हैं।

उदाहरण 3. 542.8 : 16.

लेख :

```
542.8 | 16
48    | 33.925
 62
 48
 148
 144
   40
   32
    80
```

पूर्णांक में भाग देने से फल 33 मिलता है और शेष 14 (यह दूसरा शेष है, पहला 6 है)। संख्या 33 के बाद दशमलव बिंदु रखते हैं और शेष 14 के साथ अंक 8 मिलाते हैं। प्राप्त संख्या 148 में 16 भाग देने पर फल 9 मिलता है, जो दशमलव बिंदु के बाद पहला अंक होता है।

पूर्ण संख्या में पूर्ण संख्या से भाग भी इसी तरह दिया जाता है—यदि भागफल दशमलव भिन्न के रूप में प्राप्त करना होता है।

7-01458

उदाहरण 1. 417 : 15.

लेख :

```
417 | 15
30  | 27.8
---
117
105
---
 120
```

यहाँ भागफल में बिंदु, पूर्णांक का अंतिम शेष (12) प्राप्त होने के बाद बैठाया गया है। भाज्य 417 को 417.0 का रूप दिया जा सकता है; तब यह दशमलव भिन्न के रूप में सामने आता है।

§ 44. दशमलव भिन्न में दशमलव भिन्न से भाग

दशमलव भिन्न (या पूर्ण संख्या) में *दशमलव भिन्न से भाग देने के लिए भाजक का दशमलव बिंदु हटा देते हैं; भाज्य में दशमलव बिंदु दायीं ओर इतने दशमलव स्थान तक खिसकाते हैं, जितने दशमलव स्थान भाजक के भिन्नांक में थे* (आवश्यकतानुसार भाज्य के अंत में शून्यों की संख्या पहले से बढ़ा देते हैं)। इसके बाद पिछले अनुच्छेद में वर्णित विधि से भाग संपन्न करते हैं।

उदाहरण. 0.04569 : 0.0012.

लेख :

```
456.9 | 12
36    | 38.075
---
 96
 96
---
   90
   84
---
   60
```

भाजक के भिन्नांक में 4 अंक हैं, इसलिए भाज्य में दशमलव बिंदु 4 स्थान दायें खिसका देते हैं; प्राप्त होता है 456.9। 456.9 में 12 से भाग देते हैं [इसका अर्थ है कि भाज्य और भाजक दोनों में अलग-अलग 10000 (एक पर चार शून्य) से गुणा कर देते हैं (क्योंकि भाजक में चार दशमलव स्थान हैं), और तब भाग देते हैं]।

§ 45. दशमलव भिन्न का सरल भिन्न में परिवर्तन, और विलोम

1. *दशमलव भिन्न को सरल भिन्न में परिवर्तित करने के लिए दशमलव बिंदु हटा देते हैं, प्राप्त संख्या इष्ट सरल भिन्न की अंशसंख्या होगी। अंशनाम वह संख्या होगी, जो प्रदत्त भिन्न के अंतिम दशमलव स्थान पर स्थित अंशों का नाम व्यक्त करती है।* प्राप्त भिन्न का यथासंभव कर्तन कर देना चाहिए।

यदि दशमलव भिन्न इकाई से अधिक हो, तो सिर्फ दशमलव के बाद वाले हिस्से (भिन्नांक) को सरल भिन्न में बदलना बेहतर होता है; पूर्णांक को अपरिवर्तित रखते हैं।

उदाहरण 1. 0.0125 को सरल भिन्न में बदलें। आखिरी दशमलव स्थान दस हजारवें अंशों की संख्या का है, अतः अंशनाम 10000 होगा; इस तरह, $0.0125 = \frac{125}{10000} = \frac{1}{80}$ ।

उदाहरण 2. $2.75 = 2\frac{75}{100} = 2\frac{3}{4}$, या $2.75 = \frac{275}{100} = \frac{11}{4}$ । इन दोनों विधियों में से बेहतर है पहली विधि, जिसमें पूर्णांक (2) को अपरिवर्तित रखते हैं और सिर्फ भिन्नांक (0.75) को सरल भिन्न में बदलते हैं।

2. *सरल भिन्न को दशमलव भिन्न में परिवर्तित करने के लिए* § 43 (उदाहरण 4) *में वर्णित विधि द्वारा अंशसंख्या में अंशनाम से भाग देते हैं।*

उदाहरण 3. भिन्न $\frac{7}{8}$ को दशमलव भिन्न में बदलें। 7 में 8 से भाग देते हैं; प्राप्त होता है 0.875 ।

अधिकतर स्थितियों में भाग की यह प्रक्रिया अनंत चलती रह सकती है और तब सरल भिन्न को दशमलव भिन्न में सही-सही परिवर्तित नहीं किया जा सकता है, पर व्यवहार में इसकी जरूरत भी नहीं पड़ती। जब भागफल में व्यावहारिक महत्त्व रखने वाले सभी दशमलव अंक प्राप्त हो जाते हैं, तब भाग रोक दिया जाता है।

उदाहरण 4. एक किलोग्राम कॉफी को तीन बराबर भागों में बाँटना है।

प्रत्येक भाग का वजन $\frac{1}{3}$ kg होगा। इस मात्रा को तौलने के लिए इसे किलोग्राम के दशमलव अंशों में व्यक्त करना पड़ेगा (क्योंकि $\frac{1}{3}$ kg के बाट प्रयुक्त नहीं होते)। 1 में 3 से भाग देने पर $1 : 3 = 0.333$ मिलता है। भाग को अनंत जारी रख सकते हैं; भागफल में नये-नये तिक्के मिलते जायेंगे। पर दूकानदारी के बाटों से नन्हें (जैसे, 1 g से कम के) वजन नहीं नापे जा सकते, इसके अतिरिक्त, कॉफी का एक-एक दाना भी 1 g से अधिक हो सकता है। दी हुई स्थिति में किलोग्राम के सिर्फ शतांशों का ही व्यावहारिक महत्त्व हो सकता है। अतः $\frac{1}{3}$ kg $\approx$ 0.33 kg रखते हैं [बाकी तिक्कों की उपेक्षा करते हैं]।

अधिक परिशुद्धता के लिए उपेक्षित अंकों में से प्रथम को ध्यान में रखने की प्रथा है : यदि वह 5 से अधिक होता है, तो अंतिम अनुपेक्ष्य अंक में 1 जोड़ देते हैं (इसके बारे में सविस्तार देखें § 50)।

टिप्पणी. यदि सरल भिन्न का परिशुद्ध दशमलव भिन्न में व्यक्त करना संभव होता है, तब भी अधिकतर स्थितियों में ऐसा नहीं करते। शुद्धता की आवश्यक कोटि प्राप्त हो जाने पर भाग रोक देते हैं।

उदाहरण 5. भिन्न $\frac{7}{32}$ को दशमलव भिन्न में रूपांतरित करें। शुद्ध मान होगा 0.21875 । शुद्धता की आवश्यक कोटि के अनुसार भागफल का दूसरा, तीसरा, आदि अंक प्राप्त कर लेने पर भाग रोक देते हैं और $\frac{7}{32} \approx 0.22$,

$\frac{7}{32} \approx 0.219$, आदि मान रखते है।

§ 46. भिन्नों का एक ऐतिहासिक सर्वेक्षण

भिन्नों की संकल्पना पूर्ण संख्याओं की अवधारणा बन चुकने के बाद ही उभर सकी। पूर्ण संख्याओं की अवधारणा की तरह ही भिन्न की अवधारणा एक ही बार में नहीं बन गयी थी। "अर्ध" की संकल्पना "तिहाई" और "चौथाई" से पहले आयी, और आखिरी दोनों की—अन्य अंशनाम वाले भिन्नों की संकल्पना से पहले। "अर्ध" की संकल्पना सबसे पुरानी है, इसका प्रमाण है कि हर भाषा में इसके लिए अलग नाम है, जिसका शब्द "दो" के साथ कोई संबंध नहीं दिखता। "प्रथम अर्ध", "द्वितीय अर्ध", "छोटा अर्ध", "बड़ा अर्ध" "अर्धासन" आदि व्यंजन इस बात के साक्षी हैं कि "अर्ध" का आरंभिक अर्थ "अपूर्ण" या "दो भागों में से एक" था (कोई जरूरी नहीं कि दोनों भाग बराबर ही हों)।

पूर्ण संख्या के बारे में प्रथम धारणाएं गिनती की प्रक्रिया में बनी थीं; भिन्न की प्रथम धारणाएं लंबाई, क्षेत्रफल, भार आदि के नाप की प्रक्रिया में विकसित हुईं। माप की प्रणालियों और भिन्न के कलन के बीच का यह ऐतिहासिक संबंध कई जनलोकों में देखा जा सकता है। यथा, बेबीलोनी माप-प्रणाली में भार (और मुद्रा) की इकाई 1 तालांत में 60 मीना होते थे और 1 मीना में 60 शेकेल होते थे। बेबीलोनी गणितज्ञों के बीच षष्टिभू भिन्न (दे. § 22.4) का काफी प्रचार था। प्राचीन रोम में भार (और मुद्रा) की प्रणालियों में 1 आस में 12 औंस (उंसिया) होते थे; रोम में बारह पर आधारित (द्वादशभू) भिन्नों का प्रयोग था। जिस भिन्न को हम लोग $\frac{1}{12}$ कहते हैं, उसे रोमवासी "उंसिया" कहते थे—यह उस स्थिति में भी, जब इसका प्रयोग लंबाई या किसी अन्य राशि मापने में होता था; भिन्न $\frac{1}{8}$ को रोमवासी "डेढ़ औंस" कहते थे।

हमारे "सामान्य भिन्न" प्राचीन ग्रीस और भारत में विस्तृत रूप से प्रचलित थे। 8-वीं शती के भारतीय गणितज्ञ ब्रह्मगुप्त ने भिन्नों के साथ संक्रिया के जो नियम दिये थे, आधुनिक नियमों से बहुत अलग नहीं हैं। भिन्न लिखने की हमारी विधि भी भारतीयों जैसी ही है; एक ही अंतर है कि भारतवासी पड़ी लकीर का प्रयोग नहीं करते थे; यवनवासी अंशनाम ऊपर लिखते थे और अंश-संख्या नीचे, पर ज्यादातर वे लेखन की दूसरी विधि का प्रयोग करते थे, जैसे 3 5× (तीन पंचांश लिखने के लिए उनके अपने प्रतीक बिल्कुल दूसरे थे)।

भिन्नों के भारतीय द्योतन और उनके साथ संक्रियाओं के भारतीय नियम इस्लामी देशों में 9-वीं शती में आत्मसात किये जा चुके थे। इसका श्रेय खोरिज्म

के मोहम्मद (मोहम्मद अल-खोरिज्म, दे. § 22) को दिया जाता है। पश्चिमी यूरोप में इनका प्रचार इतालवी सौदागर और विद्वान पिसा के लियोनार्दो ने (जो फिबोनाच्ची नाम से भी प्रसिद्ध थे) 13-वीं शती में किया।

"सामान्य" भिन्नों के साथ-साथ (विशेषकर ज्योतिर्विद्या में) षष्टिभू भिन्नों का भी व्यवहार था, जिसका स्थान धीरे-धीरे दशभू भिन्नों ने ले लिया। दशभू भिन्नों का प्रयोग समरकंद के विद्वान गयासुद्दीन जमशेद अल-काशी (14-15-वीं शती) ने आरंभ किया। यूरोप में इनका प्रचार होलैंड के विद्वान, सौदागर और इंजिनियर साइमन स्टेविन (1548-1620) ने किया।

§ 47. प्रतिशत

प्रतिशत *शतांश या सौवे अंश को कहते हैं।* लेख 1% का अर्थ है 0.01 ; 27% = 0.27 ; 100% = 1 ; 150% = 1.5 आदि। प्रतिशत के प्रतीक % की उत्पत्ति शब्द cento (शतांश) को जल्दबाजी में तोड़-मरोड़ कर लिखने की आदत से हुई है।

वेतन के 1% का अर्थ है वेतन का 0.01 ; योजना को पूरा का पूरा कार्यान्वित करने का अर्थ है 100% योजना पूरा करना ; 150% योजना पूरा करने का अर्थ है 1.5 योजना पूरा करना।

[प्रतिशत की मूल समस्या है दो संख्याओं की तुलना करना। मान लें कि हमें देखना है : संख्या 27 संख्या 20 से कितनी गुनी अधिक (या कम) है। पहली संख्या में दूसरी से भाग देने पर 1.35 मिलता है, अर्थात् पहली संख्या दूसरी से 1.35 गुनी अधिक है। 20 को इकाई (= 1) मानने पर 27 को 1.35 मानना पड़ेगा और 20 को सैकड़ा (= 100) मानने पर 27 को 135 मानना पड़ेगा :

$$\frac{27}{20}=\frac{1.35}{1}=\frac{1.35}{1}\times\frac{100}{100}=\frac{135}{100}=135 \text{ प्रति सैकड़ा}=135\%$$

तकनीकी दृष्टि से प्रतिशत को दो संख्याओं से बने भिन्न का 100 से प्रसारण कह सकते हैं (दे. § 32)।

यहाँ 20 को प्रतिशत की **आधार-संख्या** कहते हैं, 27 को **तुलनीय-संख्या,** 1.35 को उनका **व्यतिमान** (पारस्परिक मान) (दे. § 64), 135 को **शत-व्यतिमान :**

$$\frac{\text{तुलनीय संख्या}}{\text{आधार-संख्या}}=\frac{\text{व्यतिमान}}{1}=\frac{\text{शतव्यतिमान}(=p)}{100}=p \text{ प्रतिशत}$$
$$=p\,\%.$$

व्यंजन "$p\%$" को व्यतिमान का (अर्थात् आधार-संख्या के सापेक्ष तुल-

नीय संख्या का) **प्रतिशत व्यंजन** कहते हैं। प्रतिशत व्यंजन "p%" अपने आप में एक भिन्न (या अंश) है ; तुलना करें : जल का 20 % *अंश* वाष्पित हो गया। "20 का 135% = 27 है"—इस वाक्य में 'का' का अर्थ 'गुणा' मानने पर मतलब निकलता है : 20 बार 135 का शतांश लेने पर 27 मिलता है ($20 \times \frac{135}{100} = 27$)।

कई बार **प्रति हजार**, **प्रति लाख**, आदि जैसे अंशों (तुलनात्मक व्यंजनों) का उपयोग होता है। ये व्यंजन उपरोक्त व्यतिमान का हजार, लाख आदि से प्रसारण करने पर प्राप्त होते हैं :

$$\frac{1.35}{1} \times \frac{1000}{1000} = 1350 \text{ प्रति हजार},$$

$$\frac{1.35}{1} \times \frac{100000}{100000} = 1\ 35\ 000 \text{ प्रति लाख.}]$$

किसी दी हुई संख्या [व्यतिमान] को प्रतिशत में व्यक्त करने के लिए उसमें 100 से गुणा करते हैं (अर्थात् उसमें दशमलव बिंदु को दो स्थान दायें खिसकाते हैं) [और प्रतिशत ($\frac{1}{100}$) का चिह्न % लगा देते हैं]।

उदाहरण. संख्या 2 को प्रतिशत में व्यक्त करने पर 200% मिलता है [इसे संख्या 2 का प्रातिशत व्यंजन या प्रतिशत-व्यंजन कहेंगे।] संख्या 0.357 का प्रतिशत-व्यंजन 35.7% है और संख्या 1.753 का 175.3% है।

संख्या का प्रतिशत-व्यंजन प्रदत्त होने पर संख्या ज्ञात करने के लिए व्यंजन में 100 से भाग देते हैं (अर्थात् दशमलव बिंदु को दो स्थान बायें खिसका देते हैं) [और प्रतिशत का चिह्न % हटा देते हैं]।

उदाहरण. 13.5% = 0.135; 2.3% = 0 023 ; 145% = 1.45; $\frac{2}{5}$ % = 0.4% = 0.004 ।

प्रतिशत से संबंधित तीन मुख्य प्रश्न निम्न हैं :

प्रश्न 1. दी हुई संख्या का निर्दिष्ट प्रतिशत ज्ञात करना. (तुलना करें § 39, नियम 1 से)। दी हुई [आधार-] संख्या में निर्दिष्ट प्रतिशत से गुणा करके सौ से भाग देते हैं (या गुणनफल में दशमलव बिंदु दो स्थान बायें खिसका देते हैं)। दूसरे शब्दों में, दी हुई संख्या में निर्दिष्ट प्रतिशत को व्यक्त करने वाले भिन्न से गुणा करते हैं।

उदाहरण. खदान योजनानुसार एक दिन-रात में 2860 टन कोयला देती है। श्रमिक 115% योजना पूरा करने का वादा करते हैं। कितने टन कोयला देंगे वे ?

हल. (1) 2860·115 = 328900.

(2) 328900 : 100 = 3289 टन।

या दूसरी तरह से : 2860·1.15 = 3289 टन।

प्रश्न 2. तुलनीय संख्या और p प्रतिशत की सहायता से आधार-संख्या ज्ञात करना (तुलना करें § 39, नियम 2 से)। (तुलनीय संख्या में शतव्यतिमान p से भाग देते हैं; फिर 100 से गुणा करते हैं (अर्थात् दशमलव बिंदु को दो स्थान दायें खिसकाते हैं)। अन्य शब्दों में, तुलनीय संख्या को प्रतिशत व्यक्त करने वाले भिन्न से विभाजित करते हैं।

उदाहरण. चुकंदर से उसके भार की 12.5% चीनी बनती है। 3000 सेंटनेर चीनी बनाने के लिए कितना चुकंदर चाहिए ?

हल. (1) $3000 : 12.5 = 240$

(2) $240 \cdot 100 = 24000$ सेंटनेर।

या दूसरी तरह से : $3000 : 0.125 = 24000$।

प्रश्न 3. एक संख्या को दूसरी संख्या के प्रतिशत में व्यक्त करना (तुलना करें § 39, नियम 3 से)। प्रथम संख्या में 100 से गुणा करते हैं और गुणनफल में दूसरी संख्या से भाग देते हैं।

उदाहरण 1. ईंट जलाने की नई विधि भट्ठी के 1 घन मीटर से 1200 की बजाय 2300 ईंटें देने लगी। ईंटों के उत्पादन में कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई ?

हल : (1) $2300 - 1200 = 1100$,

(2) $1100 \cdot 100 = 110000$,

(3) $110000 : 1200 \approx 91.67$.

ईंटों के उत्पादन में 91.67% वृद्धि हुई।

उदाहरण 2. सोवियत संघ में सातवर्षीय योजना के अनुसार 1961 में 161 मिलियन टन पेट्रोलियम प्राप्त करना था। वास्तविक उत्पादन 166 मिलियन टन हुआ। 1961 की योजना कितने प्रतिशत पूरी हुई ?

हल. (1) $166 \cdot 100 = 16600$,

(2) $16600 : 161 \approx 103.1$.

1961 में पेट्रोलियम उत्पादन की वास्तविक मात्रा नियोजित मात्रा का 103.1% है।

टिप्पणी 1. तीनों ही प्रश्नों में संक्रिया का क्रम बदला जा सकता है, यथा: अंतिम प्रश्न में पहले भाग दिया जा सकता है और फिर 100 से गुणा किया जा सकता है।

टिप्पणी 2. नीचे दिया गया उदाहरण पाठकों को एक सर्वसामान्य गलती से छुटकारा दिला सकता है।

उदाहरण. दाम में गिरावट के पहले की अवस्था में प्रति मीटर कपड़े का

मूल्य ज्ञात करें, यदि 15% सस्ता होने पर कपड़ा 12 रूबल प्रति मीटर की दर से बेचा जा रहा है।

अक्सर 12 रूबल का 15% ज्ञात करते हैं, अर्थात् गुणा करते हैं : 12·0.15 = 1.8। इसके बाद जोड़ते हैं : 12 + 1.8 = 13.8 और मान लेते हैं कि पुराना दाम 13.8 रूबल प्रति मीटर था।

यह गलत है। कारण यह कि मूल्य में प्रतिशत कमी पुराने मूल्य के सापेक्ष निर्धारित की जाती है, और 1.8 रूबल 13.8 रूबल का 15% नहीं होता है, करीब 13% होता है (दे. प्रश्न 3)।

सही हल है : मूल्य-ह्रास के बाद कपड़े का मूल्य पुराने मूल्य का 100% − 15% = 85% होता है। अतः पुराना मूल्य था (दे. प्रश्न 2)—12 : 0.85 = 14.12 रूबल प्रति मीटर।

टिप्पणी. प्रतिशत के प्रश्नों को हल करने में सन्निकर कलन की विधियों का प्रयोग अधिक व्यावहारिक रहता है (दे. आगे के अनुच्छेद)।

§ 48. सन्निकर कलन

दैनिक जीवन में हमारा वास्ता दो तरह की संख्याओं से पड़ता है। एक तो शुद्ध-शुद्ध वास्तविक मान देती हैं, और दूसरी सन्निकट मान देती हैं। पहली को **परिशुद्ध संख्याएं** कहते हैं और दूसरी को—**सन्निकृत**। अक्सर परिशुद्ध संख्या की आवश्यकता नहीं पड़ती और हम जान-बूझ कर उसकी जगह सन्निकृत संख्या का व्यवहार करते हैं। कई परिस्थितियों में परिशुद्ध संख्या प्राप्त करना संभव ही नहीं होता।

उदाहरण 1. पुस्तक में 220 पृष्ठ हैं; संख्या 220 परिशुद्ध है।

उदाहरण 2. षटकोण में 9 कर्ण हैं; संख्या 9 परिशुद्ध है।

उदाहरण 3. विक्रेता स्वचालित तुला पर 50 ग्राम मक्खन तौलता है। संख्या 50 सन्निकृत है, क्योंकि तुला भार में 0.5 ग्राम की कमी-बेशी के प्रति संवेदी नहीं है।

उदाहरण 4. मास्को स्टेशन से लेनिनग्राद स्टेशन के बीच "अक्तूबर रेल-पथ" की लम्बाई 651km है। संख्या 651 सन्निकृत है, क्योंकि नापने के उपकरण शुद्ध नहीं होते और इसके अतिरिक्त, स्वयं स्टेशन भी अपनी कुछ लंबाई रखते हैं।

सन्निकृत संख्याओं के साथ संक्रिया का फल भी सन्निकृत ही होता है। इसमें वे अंक भी अपरिशुद्ध हो सकते हैं, जो दी गयी संख्याओं के परिशुद्ध अंकों के साथ

संक्रिया से प्राप्त होते हैं।

उदाहरण 5. सन्निकृत संख्या 60.2 और 80.1 को गुणित करते हैं। यह ज्ञात है कि निर्दिष्ट अंक सही हैं और इसलिए वास्तविक मान सन्निकृत मान से सिर्फ शतांश, सहस्रांश आदि में ही इतर हो सकते हैं। गुणनफल 4822.02 है। इसमें शतांश और दशांश के ही नहीं, इकाई का अंक भी अशुद्ध हो सकता है। उदाहरण के लिए मान लें कि प्रदत्त गुणक सही संख्या 60.25 और 80.14 के सन्निकरण से (दे. § 50) मिले हैं। तब शुद्ध गुणनफल 4728.435 होगा और इस प्रकार सन्निकृत गुणनफल में इकाई का अंक (2) शुद्ध अंक (8) से 6 इकाइयों का अंतर रखता है।

सन्निकर कलन के सिद्धांत से निम्न लाभ हैं : (1) आंकड़ों की परिशुद्धता-कोटि का ज्ञान होने पर संक्रिया के पहले ही परिणामों की परिशुद्धता-कोटि का मूल्यांकन किया जा सकता है ; (2) आँकड़ों की इष्ट परिशुद्धता-कोटि का चुनाव किया जा सकता है,- ताकि आवश्यक परिशुद्धता वाले परिणाम भी मिलें और अनावश्यक कलन भी न करने पड़ें; (3) परिणाम के शुद्ध अंकों पर जिन विवरणों का कोई प्रभाव नहीं पड़ता, उन्हें दूर कर कलन-प्रक्रिया को अधिक युक्तिसंगत बनाया जा सकता है।

§ 49. सन्निकृत संख्याओं का द्योतन

सन्निकर कलन में लेख 2.4 को 2.40 से और लेख 0.02 को 0.0200 से पृथक मानते हैं। लेख 2.4 का अर्थ है कि सिर्फ पूर्णांक और दशांश के अंक सही हैं, जबकि संख्या का वास्तविक मान 2.43 या 2.38 (उदाहरणतया) हो सकता है (क्योंकि 8 को छोड़ने पर उसके पहले के अंक में वृद्धि की दिशा में सन्निकरण होता है ; दे. § 50)। लेख 2.40 का अर्थ है कि शतांश भी सही है ; संख्या का वास्तविक मान 2.403 या 2.398 हो सकता है, पर 2.421 या 2.382 नहीं हो सकता है।

यही अंतर पूर्ण संख्याओं में भी किया जाता है। लेख 382 का अर्थ है कि सभी अंक सही हैं ; यदि अंतिम अंक अविश्वसनीय है, तो संख्या का सन्निकरण करते हैं, पर उसे 380 के रूप में नहीं, $38 \cdot 10$ के रूप में लिखते हैं। लेख 380 का अर्थ है कि अंतिम अंक (0) सही है। यदि संख्या 4720 में सिर्फ प्रथम दो अंक सही हैं, तो उसे $47 \cdot 10$ के रूप में लिखना चाहिए ; इस संख्या को $4.7 \cdot 10^3$ आदि के रूप में भी लिखा जा सकता है।

सार्थक अंक. संख्या के शुरू में स्थित शून्यों को छोड़कर उसके सभी सही

(विश्वस्त) अंकों को सार्थक अंक कहते हैं। यथा, संख्या 0.00385 में तीन सार्थक अंक हैं; संख्या 0.03085 में चार सार्थक अंक हैं; संख्या 2500 में—चार; संख्या $2.5 \cdot 10^3$ में—दो। किसी संख्या में उसके सार्थक अंकों की संख्या को उसकी **सार्थकता** कहते हैं।

§ 50. सन्निकरण के नियम

सन्निकर कलन में बहुदधा सिर्फ सन्निकृत संख्याओं का ही नहीं, परिशुद्ध संख्याओं का भी सन्निकरण करना पड़ता है, अर्थात् एक या अधिक अंतिम अंकों को छोड़ देना पड़ता है। सन्निकृत संख्या का अपनी मूल संख्या के साथ अधिकतम सन्निकट्य रहे, इसके लिए निम्न नियमों का पालन करना पड़ता है :

नियम 1. यदि छोड़े गये अंकों में से पहला अंक 5 से अधिक है, तो सुरक्षित अंकों में से अंतिम में इकाई जोड़ दी जाती है। इकाई से वृद्धि उस स्थिति में भी होती है, जब प्रथम त्यक्त अंक 5 के बराबर होता है और उसके बाद एक या अधिक सार्थक अंक आते हैं। (त्यक्त 5 के बाद यदि कोई अंक नहीं है, तो ऐसी स्थिति के लिए देखें नियम 3)

उदाहरण 1. संख्या 27·874 को तीन सार्थक अंकों तक सन्निकृत कर इसे 27.9 के रूप में लिखते हैं। तीसरे अंक 8 में एक से वृद्धि होने के कारण वह 9 हो गया है, क्योंकि प्रथम त्यक्त अंक 7, अंक 5 से अधिक है। संख्या 27.9 प्रदत्त संख्या के निकट है, बनिस्बत सन्निकृत संख्या 27.8 के।

उदाहरण 2. संख्या 36.251 को दशमलव के प्रथम स्थान तक सन्निकृत कर इसे 36.3 के रूप में लिखते हैं। दशांश के अंक 2 को बढ़ाकर 3 कर दिया गया है, क्योंकि प्रथम त्यक्त अंक 5 है और इसके बाद सार्थक अंक 1 आता है। संख्या 36.3 प्रदत्त संख्या के निकट है (बहुत थोड़ा-सा ही सही!), बनिस्बत संख्या 36.2 के, जिसमें अंतिम सुरक्षित अंक यथावत रखा गया है।

नियम 2. यदि प्रथम त्यक्त अंक 5 से कम है, तो अंतिम सुरक्षित अंक में कोई वृद्धि नहीं की जाती।

उदाहरण 3. संख्या 27.48 का इकाई श्रेणी तक सन्निकरण करने पर इसे 27 के रूप में लिखते हैं। यह संख्या प्रदत्त संख्या के निकट है, बनिस्बत 28 के।

नियम 3. यदि अंक 5 त्यक्त है और उसके बाद कोई सार्थक अंक नहीं है, तो अंतिम सुरक्षित संख्या को सम संख्या तक सन्निकृत किया जाता है, अर्थात् यदि अंतिम सुरक्षित संख्या कोई सम संख्या है, तो उसे ज्यों का त्यों छोड़ दिया

जाता है ; पर यदि अंतिम सुरक्षित संख्या विषम संख्या है,तो उसमें एक जोड़ कर उसे सम संख्या बना दिया जाता है (कारण देखिए नीचे : टिप्पणी)।

उदाहरण 4. संख्या 0.0465 को दशमलव के तीसरे स्थान तक सन्निकृत करके इसे 0.046 के रूप में लिखा जाता है। अंतिम सुरक्षित अंक 6 में 1 नहीं जोड़ते, क्योंकि 6 एक सम संख्या है। 0.046 प्रदत्त संख्या के उतना ही निकट है, जितना 0.047।

उदाहरण 5. संख्या 0.935 को दशमलव के दूसरे स्थान तक सन्निकृत कर इसे 0.94 के रूप में लिखते हैं। अंतिम सुरक्षित अंक 3 एक विषम संख्या है, इसलिए उसमें इकाई से वृद्धि कर दी जाती है।

उदाहरण 6. संख्या

6.527 ; 0.456 ; 2.195 ; 1.450 ;
0.950 ; 4.851 ; 0.850 ; 0.05

का दशमलव के प्रथम स्थान तक सन्निकरण करने पर प्राप्त होगा :

6.5 ; 0.5 ; 2.2 ; 1.4 ; 1.0 ; 4.9 ; 0.8 ; 0.0.

टिप्पणी : एकाध संख्या का नियम 3 के अनुसार सन्निकरण करने में सन्निकरण की शुद्धता अधिक नहीं होती (दे. उदाहरण 4 व 5)। पर बहुसंख्य सन्निकरण में बढ़ी हुई संख्याएं लगभग उतनी ही मिलेंगी, जितनी घटी हुई। त्रुटियों के पारस्परिक प्रतिकार से अधिकतम शुद्ध परिणाम मिलता है।

नियम 3 में परिवर्तन किया जा सकता है कि सन्निकरण हमेशा निकटतम विषम अंक पर हो। शुद्धता वैसी ही रहेगी।

§ 51. परम और सापेक्षिक त्रुटि

सन्निकृत संख्या और उसके शुद्ध मान के अंतर को **परम त्रुटि** या संक्षेप में सिर्फ **त्रुटि** कहते हैं (अंतर निकालने के लिए बड़ी संख्या में से छोटी को घटाते हैं)।

दूसरे शब्दों में, यदि a सन्निकृत संख्या है और x उसका सही मान है, तो परम त्रुटि अंतर $a-x$ का परम मान (दे. § 71) होगा। कुछ पाठ्य-पुस्तकों में अंतर $a-x$ (या अंतर $x-a$) को ही परम त्रुटि बताया जाता है (उसके परम मान को नहीं) ; इस स्थिति में परम त्रुटि धनात्मक भी हो सकती है और ऋणात्मक भी।

उदाहरण 1. संस्थान में 1284 आदमी काम करते हैं। इस संख्या को मोटामोटी 1300 लिखने पर परम त्रुटि 1300 — 1284 = 16 होगी और 1280

लिखने पर परम त्रुटि 1284 — 1280 = 4 होगी।

सन्निकृत संख्या की परम त्रुटि और [शुद्ध] संख्या के व्यतिमान(दे. § 64) को सन्निकृत संख्या की **सापेक्षिक त्रुटि** कहते हैं।

उदाहरण 2. स्कूल में 197 बच्चे पढ़ते हैं। इस संख्या का सन्निकृत रूप 200 लेते हैं। परम त्रुटि होगी 200 — 197 = 3। सापेक्षिक त्रुटि $\frac{3}{197}$ होगी या, मोटा-मोटी, $\frac{3}{200} = 1.5\%$।

अधिकतर स्थितियों में सन्निकृत संख्या का शुद्ध मान ज्ञात कर पाना संभव ही नहीं होता, और इसका मतलब है कि त्रुटि का मान भी नहीं बताया जा सकता। पर यह लगभग हमेशा ही निर्धारित किया जा सकता है कि त्रुटि (परम या सापेक्षिक) किसी संख्या-विशेष से अधिक नहीं होगी।

उदाहरण 3. तरबूज साधारण तराजू पर बेचा जा रहा है। सबसे छोटा बटखरा 50 g का है। तौलने पर 3600 g मिला। यह संख्या सन्निकृत है। तरबूज का शुद्ध वजन ज्ञात नहीं है। पर परम त्रुटि 50 g से अधिक नहीं हो सकती। सापेक्षिक त्रुटि $\frac{50}{3600} \approx 1.4\%$ से अधिक नहीं होगी।

ऐसी संख्या, जो परम त्रुटि से अवश्यंभावी रूप से अधिक हो (या ज्यादा से ज्यादा उसके बराबर हो), **चरम परम त्रुटि** कहलाती है। सापेक्षिक त्रुटि से अवश्यंभावी रूप से बडी (या ज्यादा से ज्यादा उसके बराबर की) संख्या को **चरम सापेक्षिक त्रुटि** कहते हैं।

उदाहरण 3 में चरम परम त्रुटि 50 g मान सकते हैं और चरम सापेक्षिक त्रुटि—1.4%।

चरम त्रुटि का मान पूर्णतया निश्चित नहीं होता। यथा, उदाहरण 3 में चरम परम त्रुटि के रूप में 100 g, 150 g या कोई भी दूसरी संख्या, जो 50 g से अधिक हो, ले सकते हैं। पर व्यवहार में चरम त्रुटि का यथासंभव छोटा मान लेते हैं। यदि त्रुटि का शुद्ध मान ज्ञात हो, तो यही मान चरम त्रुटि का भी काम करता है।

हर सन्निकृत संख्या की चरम त्रुटि (परम या सापेक्षिक) अवश्य ही ज्ञात होनी चाहिए। यदि वह निर्दिष्ट न की गयी हो, तो समझ लेना चाहिए कि चरम परम त्रुटि का मान *अंतिम सुरक्षित श्रेणी (या स्थान) की इकाई का आधा* है। यथा, यदि सन्निकृत संख्या 4.78 की चरम त्रुटि निर्दिष्ट नहीं है, तो इसका मतलब है कि चरम परम त्रुटि अंतिम सुरक्षित श्रेणी (हमारे उदाहरण में—शतांश की श्रेणी) की इकाई 0.01 की आधी, अर्थात् 0.005 होगी। यदि आपने संख्या का सन्निकरण § 50 के नियमों के अनुसार किया है, तो इस समझौते की बदौलत आप उसकी चरम त्रुटि निर्दिष्ट नहीं भी कर सकते हैं।

चरम परम त्रुटि को ग्रीक वर्ण Δ (डेल्टा) से द्योतित करते हैं; चरम सापेक्षिक त्रुटि को ग्रीक वर्ण δ (छोटा डेल्टा) से द्योतित करते हैं। यदि सन्निकृत संख्या को वर्ण a से द्योतित करें, तो $\delta = \frac{\Delta}{a}$ ।

उदाहरण 4. मिलिमीटरों में अंशांकित इंची से पेंसिल की लंबाई नापते हैं। परिणाम 17.9 cm मिला। इस माप की चरम सापेक्षिक त्रुटि क्या है?

यहां $a = 17{\cdot}9$ cm; $\Delta = 0.1$ cm माना जा सकता है, क्योंकि 1 mm की शुद्धता से पेंसिल की लंबाई नापना कठिन नहीं है; पर चरम त्रुटि को विशेष रूप से कम करना संभव नहीं है (अभ्यास होने पर अच्छी इंची में 0.02 और 0.01 cm का भी पठन किया जा सकता है, पर पेंसिल की किनारियों के बीच की दूरी भी सब ओर से समान नहीं होती; अलग-अलग ओर से नापने पर कहीं अधिक बड़े अंतर नजर आयेंगे)। सापेक्षिक त्रुटि $\frac{0.1}{17.9}$ के बराबर होती है। सन्निकरण से $\delta = \frac{0{\cdot}1}{18} \approx 0{\cdot}6\%$ ।

उदाहरण 5. बेलनाकार पिस्टन का व्यास करीब 35 mm है। सूक्ष्ममापी से किस परिशुद्धता के साथ उसे नापा जाय कि चरम सापेक्षिक त्रुटि 0.05% हो?

हल. शर्त के अनुसार चरम सापेक्षिक त्रुटि 35 mm का 0.05% है। अत: (दे. § 47, प्रश्न 1), चरम परम त्रुटि है $\frac{35 \cdot 0.05}{100} = 0{\cdot}0175$ mm, या मोटा-मोटी, 0.02 mm ।

सूत्र $\delta = \frac{\Delta}{a}$ का भी उपयोग किया जा सकता है। $a = 35$, $\delta = 0.0005$ रखने पर $0.0005 = \frac{\Delta}{35}$ । अत:

$$\Delta = 35 \cdot 0.0005 = 0.0175 \text{ mm ।}$$

§ 52. जोड़-घटाव से पूर्व सन्निकरण

यदि सभी प्रदत्त संख्याएं एक ही श्रेणी पर खत्म नहीं होतीं, तो जोड़ या घटाव के पहले उनका सन्निकरण कर लेना चाहिए। सुरक्षित सिर्फ उन श्रेणियों को रखना चाहिए, जो सभी योज्य पदों में विश्वस्त हों। बाकी को बेकार मानकर

त्याग देते हैं। यदि पदों की संख्या बहुत अधिक नहीं है, तो योगफल में अंतिम को छोड़कर सभी अंक विश्वस्त होंगे। अंतिम अंक पूरी तरह शुद्ध नहीं भी हो सकता है। इस अशुद्धि का मान अल्पतम किया जा सकता है, यदि अगली श्रेणी के अंकों के प्रभाव को ध्यान में रखा जाय, जिन्हें **अतिरिक्त अंक** कहते हैं।

उदाहरण 1. योगफल $25.3+0.442+2.741$ ज्ञात करें।

पदों का सन्निकरण किये बगैर जोड़ने पर प्राप्त होगा 28.483। इसमें अंतिम दो अंक बेकार हैं, क्योंकि प्रथम पद में कई शतांशों की अशुद्धि होने की संभावना है। योगफल का शुद्ध अंकों तक (अर्थात् दशांशों तक) सन्निकरण करने पर 28.5 मिलता है। यदि जोड़ने के पहले ही शुद्ध अंकों तक सन्निकरण कर लें, तो बिना किसी कठिनाई के प्राप्त हो जाएगा $25.3+0.4+2.7=28.4$। यहां दशांश का अंक 1 कम है। यदि शतांशों के अंकों को ध्यान में रखा जाये, तो $25.3+0.44+2.74=28.48$, अर्थात् मोटा-मोटी 28.5। अंक 5 अधिक विश्वस्त है, बनिस्बत 4 के, यद्यपि ऐसी संभावना रह जाती है कि विश्वस्त अंक 4 ही हो। (यदि मान लें कि प्रथम पद संख्या 25.26 का सन्निकरण है, तो योगफल 0.01 तक की शुद्धता से 28.44, अर्थात् मोटा-मोटी 28.4 होता। पर यदि 25.3 संख्या 25.27 या 25.28 आदि का सन्निकरण है, तो योगफल सन्निकरण के बाद 28.5 रहेगा।)

अतिरिक्त अंकों के प्रभाव का हिसाब रखने के लिए कलन निम्न आरेख के अनुसार करते हैं (अतिरिक्त अंक खड़ी रेखा द्वारा अलग किये गये हैं):

$$\begin{array}{r|l} 25.3 & \\ +\ 0.4 & 4 \\ 2.7 & 4 \\ \hline 28.5 & \end{array}$$

उदाहरण 2. योगफल $52.861+0.2563+8.1+57.35+0.0087$ ज्ञात करें।

अतिरिक्त अंकों को ध्यान में रखे बगैर (हम सिर्फ दशांश के सन्निकृत अंक सुरक्षित रखते हैं; दे. सन्निकरण के नियम, § 50) जोड़ने पर 118.7 मिलता है। अतिरिक्त अंकों का हिसाब रखने पर 118.6 मिलता है। अंतिम परिणाम में दशांश का अंक तीसरे पद की अशुद्धि के कारण गलत हो सकता है; 6 की जगह 5 मिल सकता है (यदि तीसरा पद संख्या 8.06 का सन्निकृत रूप है)। पर अंक 6 कहीं अधिक विश्वसनीय है। हर हालत में अंक 7 सही नहीं हो सकता। अतिरिक्त अंकों को ध्यान में रखने से परिणाम में सुधार होता है, पर कुछ ज्यादा नहीं। बायें आरेख में अतिरिक्त अंकों को ध्यान में रखे बगैर जोड़ने

की प्रक्रिया दिखायी गयी है और दायें आरेख में—उन्हें ध्यान में रखते हुए :

```
   52.9            52.8 | 6
 + 0.3              0.2 | 6
   8.1            + 8.1 |
  57.4             57.3 | 5
 ------             0.0 | 1
 118.7            ------
                  118.6
```

§ 53. योगफल और अंतर में त्रुटि

योगफल की चरम परम त्रुटि उसके योज्य पदों की चरम परम त्रुटियों के योग से अधिक नहीं होती।

उदाहरण 1. सन्निकृत संख्याओं 265 और 32 को जोड़ते हैं। मान लें कि पहली संख्या की चरम परम त्रुटि 5 है, और दूसरी की 1। इनका योगफल $5+1=6$ है। यदि पहली संख्या का वास्तविक मान 270 और दूसरी का 33 था, तो सन्निकृत योगफल $(265+32=297)$ वास्तविक योगफल $(270+33=303)$ से $6(=5+1)$ कम होता है।

उदाहरण 2. सन्निकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात करें: $0.0909+0.0833+0.0769+0.0714+0.0667+0.0625+0.0588++0.0556+0.0526$.

जोड़ने पर 0.6187 मिलता है। यदि प्रत्येक की चरम त्रुटि 0.00005 है, तो योगफल की चरम त्रुटि $0.00005\times 9=0.00045$ होगी। इसका अर्थ है कि योगफल के अंतिम (चौथे) स्थान में 5 इकाइयों तक की भूल हो सकती है। अतः योगफल को, तीसरे स्थान तक, अर्थात् सहस्त्रांश तक, सन्निकृत करते हैं। मिला : 0.619, जिसमें सभी अंक विश्वस्त हैं।

टिप्पणी. जब योज्य पद बहुत अधिक संख्या में होते हैं, तब उनकी त्रुटियों का परस्पर प्रतिकार हो जाता है। फलस्वरूप, योगफल की वास्तविक त्रुटि चरम त्रुटि के साथ संपात करे या उसके निकट हो, ऐसा बहुत कम होता है। ऐसी स्थितियां कितनी विरल हैं, इसका अंदाजा उदाहरण 2 से मिल सकता है, जिसमें 9 योज्य पद हैं। दशमलव के पाँचवें स्थान पर प्रत्येक का वास्तविक मान प्रदत्त सन्निकृत मान से 1, 2, 3, 4 या यहां तक की 5 इकाई भी कम या बेशी हो सकता है। उदाहरणार्थ, प्रथम पद पांचवें स्थान पर वास्तविक मान से 5 इकाई अधिक हो सकता है, दूसरा पद—2 इकाई, तीसरा—1 इकाई कम, आदि। कलन बताते हैं कि त्रुटियों के वितरण की सभी संभव स्थितियों की संख्या करीब

एक मिलियार्ड (एक अरब) है। इतनी सारी स्थितियों में सिर्फ दो ऐसी हैं, जिनमें योगफल की त्रुटि चरम त्रुटि 0.00005 तक पहुँचती है : (1) जब हर पद का वास्तविक मान उसके सन्निकृत मान से 0.00005 अधिक होगा, और (2) जब हर पद का वास्तविक मान उसके सन्निकृत मान से 0.00005 कम होगा। कुल संभव स्थितियों में इन दो स्थितियों का अंश सिर्फ 0.0000002% है।

नौ पदों के योगफल की त्रुटि आखिरी स्थान में तीन इकाइयों की वृद्धि कर दे, ऐसी स्थितियां भी बहुत कम हैं। कुल संभव स्थितियों में उनका अंश सिर्फ 0.07% है। अंतिम स्थान में दो इकाई अधिक होने की त्रुटि 2% स्थितियों में संभव है और एक इकाई अधिक होने की त्रुटि—करीब 25% स्थितियों में। बाकी 75% स्थितियों में नौ पदों के योग की त्रुटि अंतिम स्थान पर इकाई से अधिक की वृद्धि नहीं करती।

उदाहरण 3. उदाहरण 2 के योज्य पदों को शुद्ध संख्याएं* मान कर उनका सहस्रांशों तक सन्निकरण करें। योगफल की चरम त्रुटि होगी $9 \cdot 0.0005 = 0.0045$। सन्निकरण के बाद जोड़ने पर :

$$0.091 + 0.083 + 0.077 + 0.071 + 0.067 + 0.062 + \\ + 0.059 + 0.056 + 0.053 = 0.619,$$

अर्थात् सन्निकृत योगफल वास्तविक योगफल से 0.0003 (=सन्निकृत संख्याओं के आखिरी स्थान पर तिहाई इकाई) का अंतर रखता है। सन्निकृत योगफल में सभी तीन स्थान शुद्ध हैं, यद्यपि सिद्धांततः अंतिम अंक बिल्कुल अशुद्ध हो सकता था।

इन योज्य पदों का अब शतांश तक सन्निकरण करते हैं। योगफल की चरम त्रुटि $9 \cdot 0.005 = 0.045$ होगी। सन्निकरण के बाद : $0.09 + 0.08 + 0.08 + 0.07 + 0.07 + 0.06 + 0.06 + 0.06 + 0.05 = 0.62$। वास्तविक त्रुटि सिर्फ 0.0013 (=सन्निकृत संख्याओं के आखिरी स्थान पर $\frac{1}{8}$ इकाई) है।

अंतर (घटाव) की चरम सापेक्षिक त्रुटि अवकल्य और अवकारी की चरम सापेक्षिक त्रुटियों के योग से अधिक नहीं होती।

उदाहरण 4. मान लें कि सन्निकृत अवकल्य 85 की चरम सापेक्षिक त्रुटि 2 है और अवकारी 32 की चरम सापेक्षिक त्रुटि 3 है। अंतर $85 - 32 = 53$ की चरम सापेक्षिक त्रुटि $2 + 3 = 5$ होगी। बात यह है कि अवकल्य का वास्तविक

---

* ये पद $\frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \ldots\ldots, \frac{1}{19}$ भिन्नों को चौथे स्थान तक की शुद्धता से दशमलव भिन्न में परिणत करने से प्राप्त होते हैं। पाठक कोई भी अन्य संख्याएं ले सकते हैं।

मान $85+2=87$ भी हो सकता है और अवकारी का वास्तविक मान $32-3=\mathbf{29}$ भी हो सकता है। तब वास्तविक अंतर $87-29=\mathbf{58}$ होगा, जो सन्निकृत अंतर 53 से 5 इकाई अधिक है।

योग और अंतर की चरम सापेक्षिक त्रुटि और भी सरलता से ज्ञात कर सकते हैं, यदि पहले चरम परम त्रुटि निर्धारित कर लें (§ 51)।

योगफल की चरम सापेक्षिक त्रुटि योज्य पदों की सापेक्षिक त्रुटियों में से निम्नतम व महत्तम त्रुटियों के बीच होती है। (घटाव के साथ यह बात नहीं है)। यदि हर योज्य पद की चरम सापेक्षिक त्रुटि एक जैसी है (या लगभग एक जैसी है), तो योगफल की चरम सापेक्षिक त्रुटि भी उतनी ही (या लगभग उतनी ही) होगी। यदि अन्य शब्दों में कहें, तो इस स्थिति में योगफल की शुद्धता (प्रतिशत में व्यक्त) योज्य पदों की शुद्धता से कम नहीं होती। यदि योज्य पदों की संख्या बहुत बड़ी हो, तो योगफल सामान्यत: पदों से अधिक शुद्ध होगा (कारण उदाहरण **2** की टिप्पणी में समझाया गया है)।

उदाहरण 5. योग $24{\cdot}4+25{\cdot}2+24{\cdot}7=74{\cdot}3$ के प्रत्येक पद की चरम सापेक्षिक त्रुटि एक जैसी है—$0.05:25=\mathbf{0{\cdot}2\%}$। योगफल की चरम सापेक्षिक त्रुटि भी इतनी ही होगी। यहां चरम परम त्रुटि $0{\cdot}15$ के बराबर है और चरम सापेक्षिक त्रुटि— $0{\cdot}15:74{\cdot}3\approx 0{\cdot}15:75=0{\cdot}2\%$।

इसके विपरीत, सन्निकृत संख्याओं का अंतर अवकल्य और अवकारी से कम शुद्ध होता है। "शुद्धता की हानि" उस स्थिति में विशेष बड़ी होती है, जब अवकल्य तथा अवकारी एक-दूसरे से बहुत कम भिन्नता रखते हैं।

उदाहरण 6. पतली दीवार वाली नली का वाह्य और आंतरिक व्यास नापने पर क्रमश: निम्न मान मिले: $28{\cdot}7$ mm और $28{\cdot}3$ mm। अत: दीवार की मुटाई होगी $\frac{1}{2}\cdot(28{\cdot}7-28{\cdot}3)=0{\cdot}2$ (mm)। अवकल्य $(28{\cdot}7)$ और अवकारी $(28{\cdot}3)$ की चरम सापेक्षिक त्रुटि समान है: $\delta=\mathbf{0{\cdot}2\%}$। अंतर की चरम सापेक्षिक त्रुटि $(=0{\cdot}4)$ को प्रतिशत में व्यक्त करने पर 25% मिलता है, यही बात चरम सापेक्षिक त्रुटि के आधे $(=0{\cdot}2)$ के लिये भी होगी।

उपरोक्त तथ्य से निष्कर्ष निकलता है कि जब भी संभव हो, इष्ट राशि का मान सन्निकृत संख्याओं के घटाव के रूप में प्राप्त करने की विधि से दूर रहना चाहिए (तुलना करें § 92, उदाहरण **9**)।

§ 54. गुणनफल की त्रुटि

गुणनफल की चरम सापेक्षिक त्रुटि सन्निकृत रूप में गुणकों की चरम सापे-

क्षिक त्रुटियों के योग के बराबर होती है। (चरम त्रुटि के शुद्ध मान के बारे में देखें उदाहरण 1 पर टिप्पणी)।

उदाहरण 1. मान लें कि सन्निकृत संख्याओं 50 और 20 को आपस में गुणा किया जा रहा है। यह भी मान लें कि पहली संख्या की चरम सापेक्षिक त्रुटि 0.4% है और दूसरी की 0.5%। इस स्थिति में गुणनफल $50\times20=1000$ की त्रुटि लगभग 0.9% होगी। देखें, प्रथम गुणक की चरम परम त्रुटि $50\cdot0.004=0.2$ है और दूसरे की $20\cdot0.005=0.1$ है। अतः गुणनफल का वास्तविक मान $(50+0.2)\ (20+0.1)=1009.02$ से अधिक नहीं होगा और $(50-0.2)\ (20-0.1)=991.02$ से कम भी नहीं होगा। यदि गुणनफल का वास्तविक मान 1009.02 है तो गुणनफल की त्रुटि $1009.02-1000=9.02$ है, और यदि 991.02 है, तो गुणनफल की त्रुटि $1000-991.02=8.98$ है। ये दोनों स्थितियां सबसे अवांछनीय हैं। कुछ भी हो, चरम परम त्रुटि 9.02 है। चरम सापेक्षिक त्रुटि $9.02:1000=0.902\%$, अर्थात् लगभग 0.9% है।

टिप्पणी. गुणा की चरम सापेक्षिक त्रुटि को वर्ण δ से द्योतित करते हैं, गुणकों की चरम सापेक्षिक त्रुटि को δ_1 व δ_2 से (उदाहरण 1 में $\delta_1=0.004$; $\delta_2=0.005$; $\delta=0.00902$)।

दो संगुणकों के लिए हमारे नियम का रूप होगा :

$$\delta\approx\delta_1+\delta_2.$$

δ का शुद्ध मान होगा

$$\delta=\delta_1+\delta_2+\delta_1\delta_2,$$

अर्थात् गुणन की चरम सापेक्षिक त्रुटि हमेशा अधिक है, बनिस्बत गुणकों की चरम सापेक्षिक त्रुटियों के योग के; दोनों का अंतर है गुणकों की चरम सापेक्षिक त्रुटियों के गुणनफल के बराबर। यह अंतर अक्सर इतना कम होता है कि उसे ध्यान में रखने की आवश्यकता नहीं पड़ती। उदाहरण 1 की शर्तों के अनुसार $\delta=0.004+0.005+0.004\cdot0.005=0.00902$ है। अंतर हुआ $0.00902-0.009=0.00002$, अर्थात् चरम सापेक्षिक त्रुटि के सन्निकृत मान का करीब 0.2 प्रतिशत। यह अंतर इतना कम है कि इसे ध्यान में रखना निरर्थक है।

उदाहरण 2. मान लें कि सन्निकृत संख्याओं 53.2 और 25.0 को आपस में गुणा करना है। प्रत्येक की चरम परम त्रुटि 0.05 है। अतः $\delta_1=0.05:53.2=0.009$; $\delta_2=0.05:25.0=0.002$। गुणनफल $53.2\cdot25.0=1330$ की चरम सापेक्षिक त्रुटि सन्निकृत रूप से $0.009+0.0020=$

0.0029 होगी। राशि $\delta_1 \cdot \delta_2 = 0.0009 \cdot 0.002 = 0.0000018$ इतनी छोटी है कि उसे ध्यान में रखना निरर्थक है। गुणनफल 1330 की चरम परम त्रुटि $1330 \cdot 0.0029 \approx 4$, अत: गुणनफल में इकाई का अंक (शून्य) गलत भी हो सकता है।

उदाहरण 3. कमरे का आयतन ज्ञात करें, यदि मापने पर लंबाई 4.57 m, चौड़ाइ 3.37 m, ऊँचाई 3.18 m मिलती है। (चरम परम त्रुटि हरेक में 0.005 m है)। दी हुई संख्याओं को गुणा करने पर आयतन 48.974862 m^3 मिलता है। यहां सिर्फ दो अंक निश्चित रूप से सही हैं, तीसरे में छोटी-सी त्रुटि हो सकती है। देखें : गुणकों की चरम सापेक्षिक त्रुटियाँ।

$\delta_1 = 0.005 : 4.57 \approx 0.0011$; $\delta_2 = 0.005 : 37 \approx 0.0015$;

$\delta_3 = 0.005 : 3.18 \approx 0.0016$ हैं।

गुणनफल की चरम सापेक्षिक त्रुटि है :

$\delta = 0.0011 + 0.0015 + 0.0016 = 0.0042$

गुणनफल की चरम परम त्रुटि $\Delta \approx 49.0 \cdot 0.0042 \approx 0.21$ होगी। अत: तीसरा सार्थक अंक ही अविश्वसनीय होने लगता है। इसका मतलब है कि कमरे का आयतन 49.0 m^3 मानना चाहिए।

§ 55. गुणा में शुद्ध अंकों की गिनती

गुणा की त्रुटि का मूल्यांकन और सरलता से किया जा सकता है (मोटा-मोटी तौर पर), बनिस्बत § 39 की विधि से। इस मूल्यांकन का आधार निम्न नियम है :

मान लें कि दो सन्निकृत संख्याओं को गुणा किया जा रहा है; यह भी मान लें कि प्रत्येक में k सार्थक अंक हैं। इस स्थिति में गुणनफल का $(k-1)$-वां [k माइनस एक-वां] अंक निश्चित रूप से शुद्ध होगा, और k-वां अंक पूरा शुद्ध नहीं भी हो सकता है। पर गुणन की त्रुटि k-वें अंक की $5\frac{1}{2}$ इकाई से अधिक नहीं होती, सिर्फ अपवादजनित स्थितियों में इस सीमा के निकट पहुँचती है। यदि गुणकों के प्रथम अंक गुणा करने पर दस से बड़ी संख्या नहीं देते (अगली संख्याओं के प्रभाव को ध्यान में रख भी सकते हैं और नहीं भी), तो गुणनफल की त्रुटि k-वें अंक की इकाई से अधिक नहीं होती।

उदाहरण 1. तीन-तीन सार्थक अंकों वाली सन्निकृत संख्याओं 2.45 और 1.22 को गुणा करें। गुणनफल 2.9890 में प्रथम दो अंक निश्चित रूप से शुद्ध हैं। तीसरा अंक पूरी तरह से शुद्ध नहीं भी हो सकता है। गुणकों के

दिये हुए मान के लिए गुणनफल की चरम परम त्रुटि (इसे § 39 के उदाहरण 1 की भांति ज्ञात कर सकते हैं) तीसरे अंक की 1.8 इकाई (अर्थात् 0.0018) होती है, इसलिए वास्तविक त्रुटि सामान्यतः और भी कम होगी। इसीलिए तीसरे अंक को रख लेना चाहिए; चौथे अंक को रखने की कोई तुक नहीं है। सन्निकृत करने पर $2.45 \cdot 1.22 \approx 2.99$।

उदाहरण 2. सन्निकृत संख्याओं 46.5 व 2.82 को आपस में गुणा करते हैं। गुणनफल 131.130 में प्रथम दो अंक निश्चित रूप से सही हैं। चूँकि गुणकों के प्रथम अंकों का गुणनफल (अगले अंकों के प्रभाव को ध्यान में रखते हुए) 13 के बराबर है (संख्या 131.130 के प्रथम दो अंकों से बनी संख्या के बराबर है), इसलिए गुणनफल की त्रुटि इकाई से अधिक नहीं होती। दी हुई स्थिति में गुणनफल की चरम परम त्रुटि 0.37 से अधिक नहीं होती; वास्तविक त्रुटि सामान्यतया और भी कम होती है। इसलिए तीसरे अंक को रख लेना चाहिए। चौथे अंक को (जो पूरी तरह शुद्ध नहीं है) सुरक्षित रखना तभी उपयोगी होता है, जब गुणनफल के साथ और आगे संक्रियाएं संपन्न करनी होती हैं।

तीन, चार, पांच,... सन्निकृत संख्याओं को आपस में गुणा करने पर चरम त्रुटि उसी अनुपात में बढ़ती जाती है (अर्थात् उपरोक्त मान की तुलना में डेढ़, ढाई आदि गुनी अधिक होती जाती है)। फिर भी, कम संख्या में गुणकों के होने पर अधिकांश स्थितियों में वास्तविक त्रुटि उन्हीं सीमाओं में रह जाती है (त्रुटियों के पारस्परिक प्रतिकार के कारण, तुलना करें § 38)।

व्यावहारिक निष्कर्ष

1. समान संख्या में सार्थक अंक रखने वाली सन्निकृत संख्याओं के गुणनफल में भी उतने ही सार्थक अंक रखने चाहिए। इनमें से आखिरी अंक पूरी तरह सही नहीं होगा।

2. यदि कुछ गुणकों में सार्थक अंकों की संख्या बाकी से अधिक है, तो उन्हें सन्निकृत कर उनमें उतने ही सार्थक अंक रखने चाहिए, जितने सबसे कम अंकों वाले गुणक में हों। एक अतिरिक्त भी रखा जा सकता है, जो शायद आगे की संक्रियाओं में काम आ जाये।

3. यदि गुणनफल में n विश्वस्त सार्थक अंकों की आवश्यकता हो, तो हर गुणक में $n+1$ शुद्ध सार्थक अंक होने चाहिए (ये प्रत्यक्ष माप से भी प्राप्त हो सकते हैं, या कलन से भी)।

यदि गुणकों की संख्या दो से अधिक हो और दस से कम हो, तो प्रत्येक

में अंकों की संख्या आवश्यक संख्या मे दो अधिक होनी चाहिए। यह पूर्ण आश्वासन के लिए जरूरी है, अन्यथा व्यवहारतः एक अतिरिक्त अंक रख लेने से ही काम चल जाता है।

उदाहरण 3. गुणनफल $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{13}=\frac{1}{3003}$ को दशमलव भिन्न में परिणत करें। चार सार्थक अंक लेने पर 0.0003330 प्राप्त होता है। मान लें कि हमें गुणकों के सिर्फ सन्निकृत मान ज्ञात हैं :

$$\frac{1}{3}=0.33333,\ \frac{1}{7}\quad 0.14286,\ \frac{1}{11}=0.09091,$$
$$\frac{1}{13}=0.07692.$$

यह भी मान लें कि गुणनफल हमें दो सार्थक अंकों में प्राप्त करना है। पूर्ण आश्वासन के लिए हमें प्रत्येक गुणक चार सार्थक अंकों में लेना चाहिए, $0.3333\cdot0.1429\cdot0.09091\cdot0.07692$ को गुणा करना चाहिए।

(i) $0.3333\cdot0.1429=0.04762857$ प्राप्त करते हैं।

(ii) अगला गुणन :

$$0.04763\cdot0.0909=0.0043300433.$$

(iii) चार सार्थक अंक रख कर आखिरी गुणन संपन्न करें (यहां तीन सार्थक अंक रखने पर भी काम चल जायेगा) :

$$0.004330\cdot0.07692=0.0003331$$

प्रथम दो सार्थक अंक निश्चित रूप से सही हैं, अतः इष्ट संख्या 0.00033 है। तीसरे सार्थक अंक की पूर्ण शुद्धता का पहले से कोई आश्वासन नहीं दिया जा सकता। पर यहां वह भी शुद्ध है। चौथा सार्थक अंक पूरी तरह शुद्ध नहीं है, पर तदनुरूप श्रेणी में त्रुटि इकाई से अधिक नहीं होगी।

यदि कलन तीन अंकों के साथ संपन्न करें, तो गुणनफल में दूसरे अंक के बारे में कोई आश्वासन नहीं दिया जा सकता। लेकिन वास्तव में तीसरा अंक भी सही होगा। देखें :

(i) $0.333\cdot0.143=0.047619;$

(ii) $0.0476\cdot0.0909=0.00432684;$

(iii) $0.00433\cdot0.0769=0.000333.$

यदि गुणन तीन के बजाय दो अंकों के साथ किया जाये, तो गुणनफल 0.00032 होगा, अर्थात् त्रुटि दूसरे अंक के 1.3 इकाई के बराबर होगी।

§ 56. संक्षिप्त गुणा

परिशुद्ध संख्याओं को गुणा करने के नियमों को सन्निकृत संख्याओं के

गुणा पर लागू करने से उन अंकों के कलन पर हम समय और श्रम व्यर्थ ही व्यय करते हैं, जिन्हें बाद में छोड़ देना पड़ता है। कलन की प्रकिया को अधिक उपयोगी रूप दिया जा सकता है, यदि निम्न नियमों का पालन किया जाये :

(1) गुणा निम्न श्रेणी के अंक से नहीं, उच्च श्रेणी के अंक से शुरू करते हैं; गुणक की उच्चतम श्रेणी के अंक से गुण्य में गुणा पूरी तरह संपन्न करते हैं।

(2) गुणक की अगली (बायें से दूसरी) श्रेणी से गुणा करते वक्त गुण्य का अंतिम अंक (निम्नतम श्रेणी) काट देते हैं; गुणा लघुकृत गुण्य से करते हैं, पर फल में गुणक की विचाराधीन श्रेणी और गुण्य की काटी गयी श्रेणी का सन्निकृत गुणनफल जोड़ देते हैं।

(3) गुणक की तीसरी श्रेणी (बायें से) के साथ गुणा करने के पहले गुण्य की अगली निम्नतम श्रेणी काट देते हैं; गुणा इसी प्रकार से गुणक की बची हुई श्रेणियों से करते जाते हैं और हर बार छोड़ी गयी श्रेणी का प्रभाव कलन में सम्मिलित करते जाते हैं।

(4) सभी गुणनफलों को इस प्रकार लिखते हैं कि उनकी निम्नतम श्रेणियां एक के नीचे एक रहें।

(5) दशमलव बिंदु का स्थान निर्धारित करने के लिए खास नियम हैं, पर अधिक व्यावहारिक होगा, यदि आप पहले से ही गुणनफल का एक मोटा-मोटी मूल्यांकन कर लें। गलती न हो, इसके लिए गुणक की काम आयी श्रेणियों को काटते जाने की सलाह दी जाती है।

उदाहरण 1. सन्निकृत संख्याओं को गुणा करें : $6.7428 \cdot 23.25$। पहले सार्थक अंकों की संख्या बराबर करते हैं : प्रथम गुणक में से अंक 8 हटा देते हैं और इसके पूर्व के अंक 2 की जगह 3 लिखते हैं। कलन में संक्रियाओं के क्रम का आरेख निम्न है :

आलेख :

```
    6.743
 × 23.25
 --------
   13486
 +  2023
     135
      34
 --------
  156.78
```

(1) दशमलव बिंदु पर बिना कोई ध्यान दिये संख्या 6743 में 2 से गुणा करते हैं, गुणनफल 13486 पूर्ण रूप में लिखते हैं; गुणा सामान्य विधि से करते हैं, अर्थात् $2 \times 3 = 6$ से शुरू करते हैं और इस 6 को गुणकों की निम्नतम श्रेणी के नीचे रखते हैं।

(2) गुणक का काम आ चुका अंक 2 और गुण्य का अंतिम अंक 3 काट देते हैं; गुणक की अगली श्रेणी के अंक 3 से लघुकृत गुण्य 674 में

गुणा करते हैं; गुणा 3 × 4 = 12 से शुरू करते हैं, पर इस 12 में 1 जोड़ कर 13 बना देते हैं, क्योंकि गुण्य के छोड़े गये अंक 3 में गुणक 3 से गुणा करने पर 9 ≈ 10 मिलता, जिसका अंक 1 हाथ में रखना पड़ता है और गुणनफल 3 × 4 में जोड़ना पड़ता है। गुणनफल की निम्नतम श्रेणी (3) पिछले गुणनफल की निम्नतम श्रेणी (6) के नीचे लिखते हैं।

(3) गुणक में बायें से दूसरा अंक और गुण्य में दायें से दूसरा अंक काट देते हैं; गुणक के तीसरे अंक 2 से लघुकृत गुण्य 67 में गुणा करते हैं; इस **2** से गुण्य के अभी-अभी छोड़े गये अंक 4 में गुणा करने पर 8 ≈ 10 मिलता, अतः **2** × 7 = 14 में 1 जोड़ कर 15 बना लेते हैं।

(4) अंत में गुणक में 2 और गुण्य में 7 भी काट देते हैं; 5 से 6 में गुणा करते हैं, पर यह ध्यान में रखते हुए कि 5 × 7 = 35 के 3 की बजाय गुणनफल 5 × 6 = 30 में 4 जोड़ लेना चाहिए (तीन की बजाय चार जोड़ना अधिक अच्छा होगा क्योंकि 7 के पहले अन्य अंक भी तो छोड़े गये हैं, जिनमें 6 से गुणा होता)।

(5) सभी गुणनफलों को जोड़कर 15678 प्राप्त करते हैं।

दशमलव बिंदु का स्थान निर्धारित करने के लिए गुणकों को बहुत ही मोटा-मोटी सन्निकृत करते हैं—गुण्य की जगह सिर्फ 6 लेते हैं और गुणक की जगह सिर्फ 20। इष्ट गुणनफल को 120 के निकट होना चाहिए, अर्थात् उसके पूर्णांक में तीन अंक होने चाहिए। इसीलिए प्राप्त गुणनफल में दशमलव बिंदु दायें से तीन अंक के बाद रखते हैं। अर्थात् उत्तर 156.78 होगा, न कि 15.678 या 1567.8। इस उत्तर में सिर्फ प्रथम चार अंक विश्वसनीय हैं। अंतिम अंक (जिसमें तीन इकाइयों तक की त्रुटि हो सकती है) परिणाम को सन्निकृत करने के लिए काम में लाते हैं, जिससे मिलता है 156.8।

उदाहरण 2. 674.3·232.5। गुणा पिछले उदाहरण की भाँति संपन्न करते हैं। फल 15678 में दशमलव बिंदु निर्धारित करते हैं। स्थूल गुणन से 600·200 = 120000 मिलता है, जिसमें छः अंक हैं। पर हमारे गुणनफल में सिर्फ पांच अंक हैं, अतः दायें से एक शून्य और बैठा देते हैं; दशमलव बिंदु का स्थान इन सारे अंकों के बाद आयेगा, अर्थात् उत्तर पूर्ण संख्या 156 780 के रूप में प्राप्त होगा। चूँकि आखिरी अंक (शून्य) निश्चय ही गलत है, इसलिए उत्तर का रूप होगा 15678·10 या $1568 \cdot 10^2$ (दे. § 49)।

§ 57. सन्निकृत संख्याओं का भाग

नियम 1. *भागफल की चरम सापेक्षिक त्रुटि सन्निकृत रूप से भाजक और भाज्य की चरम सापेक्षिक त्रुटियों के योगफल के बराबर होती है (तुलना करें § 54)।*

उदाहरण 1. सन्निकृत संख्या 50.0 में सन्निकृत संख्या 20.0 से भाग दें। भाज्य और भाजक की चरम परम त्रुटियां 0.05 हैं। अतः भाज्य की चरम सापेक्षिक त्रुटि $\frac{0.05}{50.0}=0.1\%$ है और भाजक की चरम सापेक्षिक त्रुटि $\frac{0.05}{20.0}=0.25\%$ है। भागफल 50.0 : 20.0 = 2.50 की चरम सापेक्षिक त्रुटि लगभग रूप में $0.1\%+0.25\%=0.35\%$ होनी चाहिए।

सचमुच में, भागफल का वास्तविक मान (50.0 + 0.05) : (20.0 − 0.05) = 2.50877 से अधिक नहीं हो सकता और (50.0 − 0.05) : (20.0 + 0.05) = 2.49127 से कम नहीं हो सकता। यदि भागफल का वास्तविक मान 2.50877 है, तो परम त्रुटि 2.50877 − 2.50 = 0.00877 होती है। पर यदि वास्तविक मान 2.49127 है, तो परम त्रुटि 2.50 − 2.49127 = 0.00873 होती है। ये स्थितियां सबसे अधिक प्रतिकूल हैं। इसका मतलब है कि चरम सापेक्षिक त्रुटि 0.00877 : 2.50 = 0.00351 है, जो सन्निकट रूप से 0.35% के बराबर है।

टिप्पणी. चरम सापेक्षिक त्रुटि का शुद्ध मान नियम 1 से कलित सन्निकृत मान की तुलना में हमेशा ही अधिक होता है। दोनों का प्रतिशत अंतर भाजक की चरम सापेक्षिक त्रुटि के लगभग होता है। हमारे उदाहरण में यह प्रतिशत अंतर 0.0001 है, जो 0.0035 का 0.29% है, जबकि भाजक की चरम सापेक्षिक त्रुटि 0.25% के बराबर है।

उदाहरण 2. भागफल 2.81 : 0.571 की चरम परम त्रुटि ज्ञात करें।

हल. भाज्य की चरम सापेक्षिक त्रुटि 0.005 : 2.81 = 0.2% है; भाजक की 0.0005 : 0.571 = 0.1%; भागफल की $0.2\%+0.1\%=0.3\%$। भागफल की चरम परम त्रुटि होगी (लगभग) $\frac{2.81}{0.571}\cdot 0.003=0.015$। इसका मतलब है कि भागफल 2.81 : 0.571 = 4.92 में तीसरे सार्थक अंक से अशुद्धि शुरू होने लगेगी।

भाजक की शुद्धता का अधिक सरल, पर अधिक स्थूल मूल्यांकन शुद्ध अंकों की गिनती (दे. § 55) पर आधारित है। मूल्यांकन निम्न है :

नियम 2. *मान लें कि भाजक और भाज्य में से प्रत्येक में k सार्थक अंक हैं। तब भागफल की परम त्रुटि सबसे बुरी स्थिति में ($k-1$)-वें स्थान पर 1.05*

इकाई के *निकट होगी* (इस मान तक वह कभी पहुँच नहीं सकेगी)।

जैसा कि हम देखते हैं, भागफल की चरम त्रुटि सैद्धांतिक रूप से गुणनफल की चरम त्रुटि से दुगुनी अधिक है (तुलना करें § 55)। पर वास्तविकता में भागफल की त्रुटि k-वें अंक में 5 इकाई से अधिक सिर्फ अपवादस्वरूप ही होती है (हजार में एक बार कभी)। इसीलिए *भागफल में उतने ही सार्थक अंक रखने चाहिए, जितने भाजक और भाज्य में हो।*

यदि भाजक और भाज्य में से किसी एक में सार्थक अंकों की संख्या अधिक है, तो उनमें से अतिरिक्त अंकों को हटा देना चाहिए, प्रथम अतिरिक्त अंक को रखा भी जा सकता है (जो आगे सन्निकरण में काम आ सकता है)।

यदि आवश्यक हो कि भागफल में पहले से दी हुई संख्या जितने सार्थक अंक हों, तो भाजक और भाज्य में *इससे एक अधिक सार्थक अंक होना चाहिए।*

§ 58. संक्षिप्त भाग

फालतू कलन से बचने के लिए सन्निकृत संख्याओं का भाग निम्न विधि से संपन्न किया जा सकता है:

(1) दशमलव बिंदु की उपेक्षा करते हैं और भागफल का पहला अंक उसी तरह से प्राप्त करते हैं, जैसे पूर्ण संख्याओं के भाग में। यदि भाज्य के सार्थक अंक अधिक बड़ी संख्या बनाते हैं, बनिस्बत भाजक के सार्थक अंक (दोनों संख्याओं को पूर्ण मान लेते हैं) के, तो भागफल के पहले अंक से भाजक में पूरी तरह गुणा कर देते हैं। विपरीत स्थिति में भाजक का आखिरी अंक काट देते हैं और लघुकृत भाजक में गुणा करते हैं, लेकिन गुणनफल में काटे गये अंक का प्रभाव (उसमें गुणा करने से हाथ में बची हुई राशि) शामिल कर लेते हैं। यथा, यदि 2262 में 7646 से भाग देते हैं, तो भागफल का प्रथम अंक 2 मिलता है ($22 : 7 = 3\frac{1}{7}$, पर 3 यहां नहीं चलेगा, 2 लेते हैं)। 2 से 764 में गुणा करते हैं, गुणनफल में 1 जोड़ देते हैं यह $2 \cdot 6 = 12$ से हाथ में आया हुआ 1 है)। यह लघुकृत भाजक के अंतिम अंक में गुणा करते ही, उसी वक्त, जोड़ते हैं।

(2) भाजक (या लघुकृत भाजक) में भागफल से गुणा करने से प्राप्त फल भाज्य के नीचे लिखते हैं - इस तरह से कि हर श्रेणी तदनुरूप श्रेणी के नीचे ही रहे। इसके बाद शेष ज्ञात करते हैं।

(3) अब शेष पर शून्य बैठाने की बजाय भाजक का अंतिम अंक काट

कर उसे छोटा करते हैं (यदि वह पहले छोटा किया जा चुका है, तो अब बचे हुए आखिरी अंक को काटते हैं)। भागफल का दूसरा अंक चुन लेने के बाद उससे भाजक में गुणा करते हैं (काटे गये अंक का प्रभाव शामिल करते हुए)।

(4) गुणनफल प्रथम शेष के नीचे लिखते हैं—इस तरह से कि हर श्रेणी तदनुरूप श्रेणी के नीचे रहे।

(5) शेष पर शून्य बैठाने की बजाय भाजक को और छोटा करते हैं (अंतिम अंक काट देते हैं)।

(6) भागफल प्राप्त करके स्थूल मूल्यांकन द्वारा दशमलव बिंदु की स्थिति निर्धारित करते हैं।

उदाहरण 1. 58.83 : 9.658.

आलेख :

```
  58.83 | 9.658
 -57.95 | 6.092
 ------
     88
    -86
    ---
      2
     -2
    ---
```

(1) चूँकि 5883 कम है, बनिस्बत 9.658 के, इसलिए भाजक का अंतिम अंक 8 शुरू में ही काट देते हैं। भागफल का प्रथम अंक 6 है। 6 से 965 में गुणा करते हैं, यह ध्यान में रखते हुए कि काटे गये अंक से 5 इकाई हाथ आती है ($6 \cdot 8 = 48$; 8 काट देते हैं 4 को 5 तक सन्निकृत करते हैं)।

(2) गुणनफल 5795 को भाज्य के नीचे लिखते हैं, इस तरह से कि हर श्रेणी के नीचे समान श्रेणी आये। शेष 88 है।

(3) अब भाजक का अंत से दूसरा अंक 5 काटते हैं। लघुकृत भाजक 96 से भाज्य 88 में एक बार भी भाग नहीं आता; **भागफल में अगला अंक शून्य रखते हैं**; कोई गुणा करने की जरूरत नहीं है।

(4) द्वितीय शेष ज्ञात करने की भी जरूरत नहीं है।

(5) भाजक का एक और अंक 6 काट देते हैं। लघुकृत भाजक 9 शेष 88 में 9 बार आता है। काटी हुई संख्या का प्रभाव शामिल करने पर $9 \cdot 9 + 5 = 86$ मिलता है। शेष $88 - 86 = 2$ है। संक्रिया यहीं पर खत्म नहीं हो जाती। अंतिम बचे हुए अंक को काट देने पर, लेकिन परिणाम पर उसके प्रभाव का लेखा रखने पर, भागफल में एक और अंक 2 मिल जाता है ($2 \cdot 9 = 18$; 8 हटा देते हैं, 1 को 2 तक सन्निकृत कर लेते हैं)। भागफल का आखिरी अंक और भी सरलतापूर्वक प्राप्त हो सकता है, यदि शेष 2 पर एक शून्य बैठा दें और 9 से भाग दे दें :— $20 : 9 \approx 2$।

(6) दशमलव बिंदु का स्थान स्थूल मूल्यांकन द्वारा होता है। भाज्य पूर्णांक

में भाजक के पूर्णांक से भाग देते हैं :—58 : 9 ≈ 6, अर्थात् भागफल का पूर्णांक सिर्फ एक अंक रखता है। अत: भागफल 6.092 होगा, न कि 60.92 या 6092 आदि।

भागफल के सभी अंक विश्वसनीय हैं।

उदाहरण 2. 98.10 : 0.3216.

आलेख :

```
 98.10 | 0.3216
-96.48 | 305.0
 -----
  1.62
 -1.61
 -----
     1
```

(1) 9810 बड़ा है बनिस्बत कि 3216। भागफल के प्रथम अंक 3 से भाजक 3216 में गुणा करते हैं। 9648 प्राप्त होता है।

(2) शेष 162 है।

(3) भाजक का अंतिम अंक 6 काट देते हैं। लघुकृत भाजक 321 भाज्य में एक बार भी नहीं आता; भागफल का दूसरा अंक शून्य है।

(4) व (5). भाजक का एक और अंक 1 काट देते हैं; शेष 162 में लघुकृत भाजक 32 से भाग संभव है; भागफल का तीसरा अंक 5 है। इससे 32 में गुणा करने पर और काटे गये अंक के प्रभाव का लेखा लेने पर 161 प्राप्त होता है। घटाने पर शेष 1 मिलता है। भाजक में संख्या 2 काट देते हैं। लघुकृत भाजक 3 से शेष 1 में भाग नहीं होता। अत: भागफल का अंतिम अंक शून्य है।

(6) दशमलव बिंदु प्रदत्त संख्याओं के स्थूल सन्निकरण के आधार पर रखते हैं : 98.10 की जगह पर 100 और 0.3216 की जगह पर 0.3 लेते हैं और देखते हैं कि 100 : 0.3 ≈ 300, अर्थात् भागफल के पूर्णांक में 3 सार्थक अंक हैं। अत: भागफल 305.0 है।

§ 59. सन्निकृत संख्याओं का घातन और मूलन

घातसूचक के पूर्णांक होने पर घातन गुणा को दुहराने की क्रिया है, अत: इस स्थिति में §§ 55-56 की सभी बातें लागू होती हैं। यदि घातकोटि बहुत बड़ी नहीं है, तो परिणाम में विश्वस्त अंक उतने ही होते हैं, जितने दी गयी संख्या में; अशुद्धि यदि होती भी है, तो बहुत कम और वह भी सिर्फ आखिरी अंक में। यदि घातकोटि बहुत बड़ी है, तो छोटी अशुद्धियां जमा हो-होकर उच्च श्रेणियों में स्थित अंकों को प्रभावित कर सकती हैं।

किसी भी कोटि का मूल निकालने पर परिणाम में विश्वस्त अंक कम से कम उतने जरूर होते हैं, जितने मूलाधीन संख्या में। अत: सन्निकृत संख्या 40.00 का वर्ग मूल निकालने पर परिणाम में चार विश्वस्त अंक प्राप्त किये जा सकते

हैं ($\sqrt{40.00} \approx 6.324$)।*

स्कूलों में वर्गमूल निकालने की जो विधि सिखायी जाती है, वह लंबी और बोझिल होती है, उसे याद रखना कठिन होता है और उसका सैद्धांतिक आधार समझना छात्रों के लिए दुष्कर होता है। नीचे हम वर्गमूल निकालने की एक सरल और सुगमता से याद होने वाली विधि दे रहे हैं, जिसकी सहायता से आप किसी भी कोटि की परिशुद्धता से परिणाम ज्ञात कर सकते हैं। इस विधि का वर्णन लगभग 2000 वर्ष पूर्व ग्रीक विद्वान हेरोन ने किया था (उन्होंने साधारण भिन्नों का उपयोग किया था; हम दशमलव भिन्नों का उपयोग करेंगे)। इस विधि का उपयोग तीसरी (या अधिक उच्च) कोटि का मूल निकालने के लिए भी किया जा सकता है (देखें § 60)।

वर्गमूल निकालने की विधि. वर्गमूल निकालने के लिए प्रथम सन्निकरण के रूप में एक संख्या (मूल) अंदाज से चुन लेते हैं और इसके बाद निम्न क्रम का अनुसरण करते हैं :

(1) मूलाधीन संख्या में प्रथम सन्निकृत मूल से भाग देते हैं; यदि भागफल और चुनी गयी संख्या (मूल) के बीच अनुमत त्रुटि से अधिक का अंतर नहीं है, तो चुनी गयी संख्या ही मूल है।

(2) अन्यथा, भागफल और भाजक का समांतरी औसत (§ 60) ज्ञात करते हैं। यह समांतरी औसत वर्गमूल का अधिक शुद्ध मान देता है (द्वितीय सन्निकरण)। यदि प्रथम सन्निकरण बिल्कुल ठीक-ठाक नहीं भी हो, तो द्वितीय सन्निकरण में तीन विश्वस्त अंक मिल जाते हैं और, वैसे, 4 से कम विश्वस्त अंक नहीं मिलते। समान्यतौर पर हर सन्निकरण के बाद विश्वस्त अंकों की संख्या पिछली की अपेक्षा दुगुनी हो जाती है।

(3) द्वितीय सन्निकरण का भी वैसे ही परीक्षण करते हैं, जैसे प्रथम का, अर्थात् मूलाधीन संख्या में द्वितीय सन्निकृत मूल से भाग देते हैं। यदि परिणाम की शुद्धता पर्याप्त न हो, तो द्वितीय की भांति ही तीसरा सन्निकृत मूल ज्ञात करते हैं, आदि।

टिप्पणी. उपरोक्त विधि में गलती का डर नहीं रहता; जोड़-घटाव, गुणा-

---

* यदि वर्गमूल उस विधि से निकाला जाये, जो अक्सर स्कूल में सिखायी जाती है, तो परिणाम 6.324 प्राप्त करने के लिए मूलाधीन संख्या को 40.000000 के रूप में लिखना होगा, अर्थात् उसमें दायीं ओर चार और शून्य बैठाने पड़ेंगे। ये शून्य *अविश्वस्त अंक* हैं, पर इनकी सहायता से प्राप्त परिणाम विश्वस्त हैं। शून्य के बदले चार मनचाहे अंक लिखने से भी परिणाम वही रहेगा।

भाग की अंकगणितीय गलतियां अगले चरणों में स्वयं ठीक हो जाती हैं। विधि में एक ही बुराई है कि कलन-प्रक्रिया धीमी पड़ जाती है।

उदाहरण 1. $\sqrt{40.00}$ मूलाधीन संख्या में चार विश्वस्त अंक हैं, इसलिए चार से अधिक अंक कलित करना निरर्थक है। मूल के चार प्रथम अंक ढूंढ़ते हैं :

प्रथम सन्निकरण में 6 और 7 के बीच की कोई संख्या लेनी चाहिए (क्योंकि $6^2 = 36$ मूलाधीन संख्या से कम है और $7^2 = 49$ उससे अधिक है।) इन सीमा-बिंदुओं के बीच कोई भी संख्या ले सकते हैं, पर श्रम की बचत के लिए 6.5 से कम की कोई संख्या लेंगे (क्योंकि मूलाधीन संख्या 6^2 के अधिक निकट है बनिस्बत 7^2 के)। उदाहरण के लिए 6.4 लेते हैं (6.2 या 6.3 भी ले सकते हैं, पर 6.1 लेना बेकार होगा; यह 6 के बहुत निकट है)। आगे निम्न क्रियाएं करते हैं :

(1) मूलाधीन संख्या 40.00 में प्रथम सन्निकरण 6.4 से भाग देते हैं। प्राप्त होता है $40.00 : 6.4 = 6.25$। भागफल 6.25 दूसरे अंक में ही भाजक 6.4 से इतर हो जाता है। परिणाम 6.4 पर्याप्त शुद्ध नहीं है।

(2) द्वितीय सन्निकरण के रूप में भाजक और भागफल का समांतरी औसत लेते हैं। प्राप्त होता है $(6.40 + 6.25) : 2 = 6.325$। आशा की जा सकती है कि इस द्वितीय सन्निकरण में सभी चार नहीं, तो कम से कम प्रथम तीन अंक जरूर विश्वस्त हैं।

(3) जांच के लिए मूलाधीन संख्या 40.00 में द्वितीय सन्निकृत मूल 6.325 से भाग देते हैं (भाग पूरे चार अंकों तक देते हैं) : $40.00 : 6.325 \approx 6.324$। भागफल 6.324 भाजक 6.325 से सिर्फ चौथे अंक में इकाई इतर है। इससे निष्कर्ष निकलता है कि मूल ज्ञात हो गया है (इष्ट शुद्धता-कोटि से)।

सचमुच ही, संख्या 6.324 का वर्ग लेने पर, अर्थात् इसे 6.324 से गुणा करने पर ऐसी संख्या प्राप्त होती है जो गुणनफल $6.324 \cdot 6.325 \approx 40.00$ से कुछ कम होती है। यदि संख्या 6.325 का वर्ग लिया जाये, तो $6.325 \cdot 6.324 \approx 40.00$ से कुछ बड़ी संख्या मिलेगी। अत: इष्ट वर्गमूल संख्या 6.324 (या 6.325) से चौथे अंक में इकाई इतर होता है : $\sqrt{40.00} \approx 6.324$ (सभी चार अंक विश्वस्त हैं)।

उदाहरण 2. $\sqrt{23.5}$ इष्ट मूल 4 व 5 के बीच है, और 4 की अपेक्षा 5 के निकट है (क्योंकि 23.5 संख्या 16 की अपेक्षा संख्या 25 के निकट है)। प्रथम सन्निकरण में गोलमटोल संख्या 5.0 लेते हैं।

(1) मूलाधीन संख्या 23.5 में प्रथम सन्निकरण 5.0 से भाग देते हैं (तीन सार्थक अंकों तक) : 23.5 : 5.0 = 4.70 ।

(2) दूसरे सन्निकरण के रूप में समांतरी औसत (5.00 + 4.70) : 2 = 4.85 लेते हैं। आशा कर सकते हैं कि सभी तीन अंक शुद्ध हैं।

(3) जांच के लिए मूलाधीन संख्या 23.5 में द्वितीय सन्निकरण 4.85 से भाग देते हैं। प्राप्त होता है 23.5 : 4.85 ≈ 4.85 । चूंकि भागफल तीन अंकों की परिशुद्धता से भाजक के बराबर है, इसलिए वर्गमूल (महत्तम संभव शुद्धता से) ज्ञात होता है : $\sqrt{23.5} \approx 4.85$ ।

टिप्पणी. यदि मूलाधीन संख्या कोई दशमलव भिन्न है और उसके पूर्णांक वाले हिस्से में सिर्फ एक सार्थक अंक या शून्य है, तो प्रथम सन्निकरण ढूंढ़ने के लिए दशमलव बिंदु को 2, 4, 6, आदि स्थान दायें खिसका लेने की सलाह दी जाती है, ताकि पूर्णांक वाले हिस्से में कुछ सार्थक अंक आ जायें। इसके बाद उदाहरण 1 व 2 का अनुसरण करते हैं; अंतिम परिणाम में दशमलव बिंदु को 1, 2, 3, आदि स्थान वापस बायें खिसका देते हैं। इसी तरह से, जब मूलाधीन संख्या में कोई बहुअंकी पूर्णांक होता है, तब दशमलव बिंदु को 2, 4, 6, आदि घर बायें खिसकाते हैं और अंतिम परिणाम में 1, 2, 3, आदि घर दायें वापस कर देते हैं।

मूलाधीन संख्या में दशमलव बिंदु को *सिर्फ सम संख्या जितने अंक* पार करा सकते हैं।

उदाहरण 3. $\sqrt{0.008732}$. दशमलव बिंदु को चार अंक (घर) दायें खिसकाते हैं। इससे प्राप्त होता है 87.32; प्रथम सन्निकरण में सिर्फ पूर्णांक पर ध्यान देंगे। प्रथम सन्निकरण के रूप में, उदाहरणतया, संख्या 9.3 लेते हैं।

(1) 87.32 में 9.3 से भाग देते हैं। चार सार्थक अंकों तक भाग देकर 87.32 : 9.3 ≈ 9.389 प्राप्त करते हैं।

(2) समांतरी औसत (9.300 + 9.389) : 2 ≈ 9.344 मिलता है।

(3) जांच के लिए भाग 87.32 : 9.344 ≈ 9.345 संपन्न करते हैं। इसका मतलब है कि दोनों ही संख्याओं 9.344 और 9.345 में सभी चार अंक विश्वस्त हैं (पहली संख्या अपर्याप्त सन्निकरण है और दूसरी अतिरिक्त सन्निकरण है)।

(4) चूंकि शुरू में हम दशमलव बिंदु को चार घर दायें खिसका चुके हैं, इसलिए अब उसे वापस दो घर बायें खिसकाते हैं। प्राप्त होता है :

$$\sqrt{0.008732} \approx 0.09344.$$

उदाहरण 4. $\sqrt{8732000}$. दशमलव बिंदु को 6 अंक बायें ले जाते हैं,

जिससे प्राप्त होता है 8.732 (यदि बिंदु को चार अंक दायें खिसकायेंगे, तो 873.2 मिलेगा, पिछले उदाहरण की भाँति 87.32 नहीं !)। प्रथम सन्निकरण के लिए संख्या 3 लेते हैं।

(1) 8.732 : 3 = 2.911.

(2) (3.000 + 2.911) : 2 = 2.955.

प्रथम चरण में ही स्पष्ट हो जाता है कि प्रथम सन्निकरण (3.000) में दो सही अंक थे। अतः आशा की जा सकती है कि दूसरे सन्निकरण में 4 अंक विश्वस्त होंगे। जाँच से यह शुद्ध हो जाता है।

(3) चूँकि शुरू में हम दशमलव बिंदु 6 घर बायें ले गये थे तो अब उसे उल्टी दिशा में, तीन घर दायें लाते हैं :

$$\sqrt{8732000} \approx 2955.$$

§ 59 a. घनमूल निकालने के नियम

किसी संख्या का घनमूल निकालने के लिए पहले अंदाज से एक सन्निकरण करते हैं, फिर निम्न क्रम का अनुसरण करते हैं।

(1) प्रथम सन्निकृत मूल से दो बार भाग देते हैं (तुलना करें §44 के नियम से) : पहले मूलाधीन संख्या में भाग देते हैं, फिर प्राप्त भागफल में भाग देते हैं। यदि दूसरे विभाजन का फल प्रथम सन्निकरण से (अर्थात् भाजक से) अनुमत त्रुटि से ज्यादा का अंतर नहीं रखता, तो मानते हैं कि घनमूल ज्ञात हो चुका है।

(2) विपरीत स्थिति में तीन संख्याओं—दो बार भाजक और अंतिम भागफल—को लेकर समांतरी औसत ज्ञात करते हैं। (इस कदम की आवश्यकता उदाहरण 1 में समझायी गयी है)। इससे द्वितीय सन्निकरण प्राप्त होता है; यदि प्रथम सन्निकरण मूल के पर्याप्त निकट हो, तो द्वितीय सन्निकरण में तीन अंक विश्वस्त होंगे, चौथे अंक में ज्यादा से ज्यादा 1 की गड़बड़ी होगी।

(3) द्वितीय सन्निकरण की भी जाँच की जा सकती है, जैसे प्रथम सन्निकरण की हुई थी, पर प्रक्रिया अधिक उबाने वाली होती है।

उदाहरण 1. $\sqrt[3]{785.0}$ इष्ट मूल 9 और 10 के बीच है। प्रथम सन्निकरण के लिए 9.2 लेते हैं (क्योंकि मूलाधीन संख्या 9^3 से चार गुना निकट है, बनिस्बत कि 10^3 से)।

(1) मूलाधीन संख्या में पहले 9.2 से भाग देते हैं। फिर भागफल 785.0 : 9.2 में 9.2 से भाग देते हैं। इसके बजाय 785.0 में सीधा

$9.2^2 = 84.64$ से भाग देते हैं :

$785.0 : 9.2 : 9.2 = 785.0 : 84.64 \approx 9.275.$

जैसा कि देखते हैं, प्रथम सन्निकरण में दो अंक (9 और 2) विश्वस्त हैं। द्वितीय सन्निकरण का फल उत्तम हो, इसके लिए इस बात पर ध्यान दें कि मूलाधीन संख्या 785.0 तीन असमान संख्याओं के गुणनफल के बराबर है : $785.0 = 9.2 \cdot 9.2 \cdot 9.275$। पर हमें मूलाधीन संख्या को तीन समान संख्याओं के गुणनफल के रूप में प्रस्तुत करना है : $785.0 = x \cdot x \cdot x$ (जहां $x = \sqrt[3]{785.0}$)। यह मानना बिल्कुल स्वाभाविक होगा कि इन समान गुणकों में से प्रत्येक को गुणक 9.2, 9.2, 9.275 के समांतरी औसत के बराबर (सन्निकट रूप से) होना चाहिए।

(2) इस प्रकार, द्वितीय सन्निकरण के लिए समांतरी औसत $(9.275 + 9.200 + 9.200) : 3 = 9.225$ ज्ञात करते हैं। कलन संक्षिप्त विधि से संपन्न कर सकते हैं (दे. § 61)।

(3) जाँच के लिए द्वितीय सन्निकरण के फल 9.225 से पहले मूलाधीन संख्या 785.0 में भाग देते हैं, फिर इस भाग के भागफल में (या मूलाधीन संख्या में $9.225^2 \approx 85.09$ से भाग देते हैं)। प्राप्त होता है 9.225 (यदि कलन में एक अतिरिक्त अंक सुरक्षित न रखा जाये, तो 9.224 मिलेगा)।

$\sqrt[3]{785.0} \approx 9.225$ (सभी चार अंक सही हैं)।

टिप्पणी. प्रथम सन्निकरण के पहले मूलाधीन संख्या में दशमलव बिंदु को 3, 6, 9 आदि घर दायें या बायें खिसका लेना भी लाभदायक होता है (दे. टिप्पणी 2, § 59)। अंतिम परिणाम में दशमलव बिंदु को 1, 2, 3 आदि घर उल्टी दिशा में खिसका लेते हैं। मूलाधीन संख्या में बिंदु को जितने घर पार कराते हैं, उनकी संख्या को *तीन से विभाज्य* होना चाहिए।

उदाहरण 2. $\sqrt[3]{1835 \cdot 10}$. मूलाधीन संख्या 18350 में दशमलव बिंदु (जिसे इकाई के स्थान से पहले होना चाहिए) तीन स्थान बायें खिसका कर 18.35 प्राप्त करते हैं। यह संख्या $2^3 = 8$ और $3^3 = 27$ के लगभग बीच में है, अतः प्रथम सन्निकरण के रूप में संख्या 2.5 लेते हैं।

(1) 2.5 से दो बार भाग दें, या 18.35 में 2.5^2 से एक बार भाग दें : $18.35 : 2.5 : 2.5 = 18.35 : 6.25 \approx 2.94$।

जैसा कि देखते हैं, प्रथम सन्निकरण में सिर्फ एक विश्वस्त अंक है, अतः द्वितीय सन्निकरण में सिर्फ दो विश्वस्त अंक मिलने की आशा करनी चाहिए। इसलिए अगले चरण में सभी कलन दो अंकों की शुद्धता से करेंगे।

(2) द्वितीय सन्निकरण के रूप में समांतरी औसत निकालते है : $(2.5 + 2.5 + 2.9) : 3 \approx 2.6$ ।

(3) परिणाम जांचने के लिए 2.6 से दो बार भाग देते हैं :

$$18.35 : 2.6 : 2.6 = 18.35 : 6.76 \approx 2.715.$$

इस सन्निकरण से दो विश्वस्त अंक प्राप्त होते हैं, अतः तीसरे सन्निकरण में चार विश्वस्त अंक प्राप्त होने की संभावना है।

(4) तीसरे सन्निकरण के लिए समांतरी औसत ज्ञात करते हैं :

$$(2.715 + 2.600 + 2.600) : 3 = 2.638 \text{।}$$

परीक्षण से देख सकते हैं कि यहां सभी चार अंक विश्वस्त हैं :

$$\sqrt[3]{1835.10} \approx 26.38.$$

§ 60. औसत मान

यदि किसी राशि के कई मान प्रदत्त हों, तो इनके महत्तम व लघुतम मानों के बीच आने वाले किसी भी मान को औसत(**माध्य**)कहते हैं। अधिकतम प्रयुक्त औसत मान हैं—*समांतरी औसत मान* (समांतरी औसत) और *गुणोत्तरी औसत मान* (गुणोत्तरी औसत)।

समांतरी औसत प्रदत्त मानों के योगफल में उनकी संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है :

$$\mathbf{s.a.} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n},$$

जहां $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ प्रदत्त मान हैं, n उनकी संख्या है।

उदाहरण. संख्या 83, 87, 81, 90 प्रदत्त हैं;

$$\mathbf{s.a.} = \frac{83 + 87 + 81 + 90}{4} = 85\tfrac{1}{4}$$

गुणोत्तरी औसत प्रदत्त मानों के गुणनफल का उनकी संख्या जितना मूल निकालने से प्राप्त होता है :

$$\mathbf{g.a.} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots\ldots a_n},$$

जहां $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ प्रदत्त मान हैं; n उनकी संख्या है।

उदाहरण. संख्या 40, 50, 52 प्रदत्त हैं;

$$\mathbf{g.a.} = \sqrt[3]{40 \cdot 50 \cdot 52}$$

$$= \sqrt[3]{164000} \approx 54.74$$

गुणोत्तरी औसत समांतरी औसत से हमेशा छोटा होता है; अपवाद सिर्फ एक

स्थिति है -- जब सारी प्रदत्त संख्याएं समान होती हैं। इस स्थिति में दोनों औसत मान बराबर होते हैं। जब प्रदत्त संख्याओं में अन्तर अल्पांश होता है, तब s.a. और g.a. का भी अन्तर अल्पांश ही होता है।

s. a. का सभी व्यावहारिक क्षेत्रों में बहुत बड़ा महत्त्व है।

उदाहरण 1. दो बिंदुओं की आपसी दूरी दस मीटर लंबे फीते से नापी जा रही है, जिस पर अंश सेंटीमीटरों में अंकित हैं। 10 नापें ली गयीं। परिणाम हैं (मीटर में): 62.36, 62.30, 62.32, 62.31, 62.36, 62.35, 62.33, 62.32, 62.38, 62.37। नापों में अंतर का कारण नाप की आकस्मिक त्रुटियां हैं। इस स्थिति में समांतरी औसत मान ज्ञात करते हैं:

$$\text{s. a.} = (62.36+62.30+62.32+62.31+62.36+ 62.35+62.33+62.32+62.38+62.37) : 10 = 62.34.$$

यह संख्या नापी जाने वाली दूरी का अधिक विश्वस्त मान देती है, बनिस्बत नाप से प्राप्त संख्याएं। कारण कि औसत निकालने की प्रक्रिया में नाप की आकस्मिक त्रुटियां लगभग हमेशा एक-दूसरी का निराकरण कर देती है (दे. नीचे, § 61)।

उदाहरण 2. एक हजार वयस्क आदमियों का कद नापा गया। s. a. ज्ञात किया गया। यह तथाकथित "औसत कद" है। यह किसी व्यक्ति-विशेष के कद को नहीं व्यक्त करता। पर यदि बहुत बड़ी संख्या में किन्हीं दूसरे आदमियों का कद नाप कर s. a. निकाला जाये, तो उसका मान लगभग पहले जैसा ही मिलेगा। स्पष्टतः सैद्धांतिक तौर पर ऐसी स्थिति भी संभव है, जब सभी 1000 आदमी बौने हों, या बहुत ऊँचे कद के हों। पर सभी संभव स्थितियों के बीच इन विशेष स्थितियों का प्रतिशत अंश, जैसा कि कलन दिखाते हैं, नगण्य है। इसलिए व्यवहारतः हमेशा मान सकते हैं कि 1000 व्यक्तियों के किसी भी समूह में औसत कद लगभग स्थिर रहेगा; इस तरह के अनुमान में कोई गलती नहीं होगी। बहुल (बहुसंख्य) मापों का समांतरी औसत **सांख्यिकीय औसत** (या सिर्फ औसत) कहलाता है। सांख्यिकीय औसत मानों का व्यावहारिक महत्त्व बहुत ज्यादा है। उदाहरणार्थ, यदि नियत पोषण-परिस्थितियों में किसी खास जाति की गाय का औसत दोहन ज्ञात हो, तो औसत दोहन में गायों की कुल संख्या से गुणा करके पूरे झुंड के दोहन से प्राप्त दूध की मात्रा बतायी जा सकती है।

§ 61. समांतरी औसत का संक्षिप्त कलन

समांतरी औसत निकालने के लिए ली गयी संख्याएं अक्सर आपस में बहुत

कम का अंतर रखती हैं। ऐसी स्थितियों में निम्न विधि के प्रयोग से **s. a.** का कलन काफी सरल किया जा सकता है।

(1) कोई मनचाही संख्या चुन लेते हैं, जो दी गई संख्याओं के निकट हो। यदि प्रदत्त संख्याएं सिर्फ आखिरी अंक में एक-दूसरी से इतर हैं, तो चुनी हुई संख्या ऐसी होनी चाहिए, जिसका अंतिम अंक शून्य हो; यदि प्रदत्त संख्याएं अंतिम दो अंकों में एक-दूसरी से इतर हैं; तो अन्त में दो शून्य वाली संख्या चुनना सुविधाजनक होता है, इत्यादि।

(2) चुनी हुई संख्या को बारी-बारी से सभी प्रदत्त संख्याओं में से घटा देते हैं।*

(3) प्राप्त अंतरों का s. a. ज्ञात करते हैं।

(4) s. a. को चुनी हुई संख्या में जोड़ देते हैं।

उदाहरण. दस संख्याओं का s. a. निकालें :

62.36, 62.30, 62.32, 62.31, 62.36, 62.35, 62.33, 62.32, 62.38, 62.37 (तुलना करें § 60 के उदाहरण से)।

(1) संख्या 62.30 चुन लेते हैं।

(2) 62.30 को प्रदत्त संख्याओं में से घटाते हैं, अंतर प्राप्त करते हैं (शतांशों में) :

6, 0, 2, 1, 6, 5, 3, 2, 8, 7।

(3) अंतरों का s. a. निकालते हैं; प्राप्त होता है 4 (शतांश)।

(4) 0.04 को 62.30 में जोड़ देते हैं; 62.34 ही इष्ट **s. a.** है।

§ 62. समांतरी औसत की परिशुद्धता

यदि s. a. माप के अपेक्षाकृत कम प्रदत्त मानों से कलित किया जाता है (जैसे § 45 के उदाहरण 1 में सिर्फ दस मानों से), तो वास्तविक औसत कलित औसत से कुछ इतर होता है। तब यह जानना बहुत महत्वपूर्ण होता है कि दोनों में कितना अन्तर है। यहां सैद्धांतिक तौर पर कल्पनागत अन्तर की बात नहीं

---

* इससे धन और ऋण दोनों तरह की संख्याएं प्राप्त हो सकती हैं (ऋण संख्याओं के बारे में देखें § 68)। ऐसा न हो, इसलिए प्रदत्त संख्याओं में से अल्पतम संख्या ही चुनते हैं। पर कलन अधिक सरल होगा, यदि हम प्रदत्त संख्याओं में से कोई बीच की संख्या चुनेंगे।

चल रही है (यह मनचाहे रूप मे बड़ा हो सकता है); हमें ऐसा अन्तर चाहिए, जो व्यावहारिक तौर पर संभव हो (तुलना करें § 60 के उदाहरण 2 से)। यह अन्तर *औसत वर्गी विचलन* द्वारा निर्धारित होता है।

औसत वर्गी विचलन प्रदत्त संख्याओं और उनके s. a. के अन्तरों के वर्गों के समांतरी औसत का वर्गमूल है। औसत वर्गी विचलन को ग्रीक अक्षर σ (सिग्मा) से द्योतित करते हैं :

$$\sigma=\sqrt{\frac{(a_1-a)^2+(a_2-a)^2+\ldots\ldots+(a_n-a)^2}{n}}, \quad \cdots(A)$$

जहां $a=(a_1+a_2+\ldots+a_n):n$; σ=औसत वर्गी विचलन ($a_1, a_2, \ldots, a_n$ प्रदत्त सांख्यिक मान हैं, n उनकी संख्या है और a उनका समांतरी औसत है)।

टिप्पणी. सूत्र (A) में किसी भी अन्तर को उसके विपरीत मान से विस्थापित कर सकते हैं; इससे कलन में ऋण संख्याओं का आविर्भाव रोका जा सकता है (ऋण संख्याओं के बारे में देखें § 68)। इसका मतलब है कि यदि कोई प्रदत्त संख्या s. a. से छोटी होती है, तो उसे s. a. में से घटाते हैं (न कि उसमें से s. a. घटाते हैं)।

उदाहरण. पिछले अनुच्छेद में प्रदत्त संख्याओं का औसत वर्गी विचलन ज्ञात करें। वहां हमने इन संख्याओं का s. a.=62.34 कलित किया था। 62.36, 62.30, आदि संख्याओं का उनके s. a. से अंतर ज्ञात करते हैं (शतांशों में) : 2, 4, 2, 3, 2, 1, 1, 2, 4, 3। इन अंतरों का वर्ग लेने पर 4, 16, 4, 9, 4, 1, 1, 4, 16, 9 संख्याएं प्राप्त होती हैं। अंतरों के वर्गों का समांतरी औसत है :

$$\frac{4+16+4+9+4+1+1+4+16+9}{10}=6.8 \text{ (शतांशों में)}$$

इस संख्या का वर्गमूल $\sqrt{6.8}\simeq 3$ (शतांशों में); अत: σ=0.03।

यदि नापों की संख्या 10 के लगभग है, तो नापी गयी राशि के वास्तविक मान और औसत मापित मान में अंतर औसत वर्गी विचलन σ से अधिक नहीं हो सकता। यदि और सही कहें, तो σ से अधिक बड़े विचलन सिर्फ अपवादजनक स्थितियों में संभव हैं, जिनकी संख्या कुल संभव स्थितियों की तुलना में सिर्फ आधा प्रतिशत के करीब है। ऊपर के उदाहरण में वास्तविक मान और संख्या 62.34 का अंतर वस्तुत: 0.03 से अधिक नहीं हो सकता। अत: वास्तविक मान 62.34−0.03=62.31 और 62.34+0.03=62.37 के बीच ही होगा।

यदि 10 से अधिक बार नाप ली गयी है; तो वास्तविक मान का समांतरी औसत मान के गिर्द महत्तम व्यावहारिकत: संभव विचलन σ से कम ही होगा; वह $\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$ से अधिक नहीं होगा (n—नापों की संख्या)। यथा, यदि नापों की संख्या 1000 के करीब हो, तो व्यवहारत: सिर्फ ऐसे विचलन संभव हैं, जो 0.1σ से अधिक नहीं होंगे।

§ 63. व्यतिमान और अनुपात

एक संख्या को दूसरी से विभाजित करने से प्राप्त भागफल इन संख्याओं का **व्यतिमान** (पारस्परिक मान) कहलाता है। व्यतिमान की आवश्यकता तब पड़ती थी, जब एक राशि को उसके साथ समज दूसरी राशि (अर्थात् उसी जैसी दूसरी राशि) के अंशों में व्यक्त करना पड़ता था। उदाहरणतया, एक लंबाई को दूसरी लंबाई के अंशों में या एक क्षेत्रफल को दूसरे क्षेत्रफल के अंशों में व्यक्त करने के लिए भाग की संक्रिया संपन्न करनी पड़ती थी (दे. § 39)। भागफल का कुछ दूसरा अर्थ है; यह किसी राशि को किसी संख्या जितने भागों में बाँटने पर प्रत्येक भाग में आयी हुई राशि है। अब इस तरह का भेद नहीं करते; विषमज राशियों के व्यतिमान भी प्रयुक्त होते हैं, जैसे किसी पिंड के भार और आयतन का व्यतिमान। जब समज राशियों के व्यतिमान की बात चलती है, तो अक्सर उसे प्रतिशत अंशों में व्यक्त करते हैं। [इस प्रकार, व्यतिमान व भागफल दो (समज या विषमज) राशियों का **सापेक्षिक भाव या दर** दिखाते हैं।]

उदाहरण. पुस्तकालय में 10000 पुस्तकें हैं; उनमें से 8000 रूसी भाषा में हैं; कुल पुस्तकों की तुलना में रूसी किताबों का व्यतिमान ज्ञात करें। $8000 : 10000 = 0.8$। अत: इष्ट व्यतिमान 0.8 या $\frac{0.8 \times 100}{100} = 80$ प्रतिशत।

भाज्य को **पूर्वपद** (तुलनीय संख्या) और भाजक को **परपद** (आधार संख्या) कहते हैं। हमारे उदाहरण में 8000 पूर्वपद है और 10000 परपद।

दो बराबर व्यतिमान मिल कर ***अनुपात*** *बनाते हैं।* यथा, यदि एक पुस्तकालय की 10000 पुस्तकों में से 8000 पुस्तकें रूसी भाषा में हैं और दूसरे पुस्तकालय की कुल 12000 पुस्तकों में से 9600 पुस्तकें रूसी भाषा में हैं, तो रूसी में पुस्तकों की संख्या और कुल पुस्तकों की संख्या का व्यतिमान दोनों ही पुस्तकालयों में समान होगा, अर्थात् $8000 : 10000 = 0.8$ और $9600 : 12000 = 0.8$। यहां हमें एक अनुपात मिलता है, जिसे निम्न विधि से

लिखते हैं :—8000 : 10000 = 9600 : 12000 । कहते हैं कि "8000 (के) प्रति 10000 वैसा ही है, जैसा 9600 (के) प्रति 12000" । 8000 व 12000 **अनुपात का अंत्य पद** कहलाते हैं; 10000 व 9600 उसका **मध्य पद** कहलाते हैं ।

अंत्य पदों का गुणनफल मध्य पदों के गुणनफल के बराबर होता है । हमारे उदाहरण में $8000 \cdot 12000 = 96000000$; $10000 \cdot 9600 = 96000000$ । दोनों में से कोई एक अंत्य पद दोनों मध्य पदों के गुणनफल में दूसरे अंत्य पद से भाग देने पर मिलता है । ठीक इसी प्रकार, कोई एक मध्य पद दोनों अंत्य पदों के गुणनफल में दूसरे मध्य पद से भाग देने पर प्राप्त होता है । अर्थात् यदि

$$a : b = c : d,$$

तो

$$a = \frac{bc}{d},\ b = \frac{ad}{c} \text{ आदि ।}$$

हमारे उदाहरण में

$$8000 = \frac{10000 \cdot 9600}{12000}$$

इस गुण का उपयोग अनुपात के अज्ञात पद का कलन करने में होता है, जब बाकी तीन पद ज्ञात होते हैं । [अनुपात के एक पद को अन्य तीन की सहायता से व्यक्त करने की विधि **त्रैराशिक नियम** कहलाती है ।]

उदाहरण. $12 : x = 6 : 5$ (x से अज्ञात संख्या को द्योतित करते हैं) ।

$$x = \frac{12 \cdot 5}{6} = 10.$$

अनुपात के व्यावहारिक उपयोग देखें § 65 में ।

जिस अनुपात में मध्य पद समान (बराबर) होते हैं, उस अनुपात को **सतत अनुपात** कहते हैं; उदाहरणार्थ, $18 : 6 = 6 : 2$ । सतत अनुपात का मध्य पद अंत्य पदों के गुणोत्तरी औसत (दे. § 60) के बराबर होता है; हमारे उदाहरण में

$$6 = \sqrt{18 \cdot 2}$$

§ 64. अनुपातन

दो राशियों के मान परस्पर आश्रित रह सकते हैं । यथा, वर्ग का क्षेत्रफल उसकी भुजा की लंबाई पर निर्भर करता है, और इसका उल्टा, वर्ग की भुजा

की लंबाई उसके क्षेत्रफल पर निर्भर करती है ।

दो परस्पर आश्रित राशियों को **समानुपाती** *कहते हैं, जब उनके मानों के व्यतिमान सदा स्थिर होते हैं।*

उदाहरण. किरासन का भार उसके आयतन के साथ समानुपाती है; 2 l किरासन का भार 1.6 kg है, 5 l का 4 kg और 7 l का 5.6 kg है। भार और आयतन का व्यतिमान होगा $\frac{1.6}{2}=0.8$; $\frac{4}{5}=0.8$; $\frac{5.6}{7}=0.8$ आदि।

समानुपाती राशियों के इस स्थिर व्यतिमान को **अनुपातन का गुणांक** *कहते हैं।* अनुपातन-गुणांक यह दिखाता है कि एक राशि की कितनी इकाइयां दूसरी राशि की एक इकाई पर (या में) आती हैं; हमारे उदाहरण में—कितने किलोग्राम भार 1 l में मिलता है यह किरासन का विशिष्ट भार हुआ। [अनुपातन-गुणांक को **अनुपातन-दर** भी कह सकते हैं ।]

जब दो राशियां समानुपाती होती हैं, तब एक के कोई दो मान दूसरी के उसी क्रम में लिये गये दो तदनुरूप मानों के साथ अनुपात बनाते हैं। हमारे उदाहरण में 1.6 : 4 = 2 : 5; 1.6 : 5.6 = 2 : 7 आदि। इस तथ्य के अनुरूप अनुपातन की एक और परिभाषा (उपरोक्त के अतिरिक्त) दी जा सकती है: *यदि दो राशियां परस्पर इस प्रकार से आश्रित हों कि एक में वृद्धि के साथ-साथ दूसरी में भी उतने ही गुना वृद्धि होती हो, तो वे समानुपाती राशियां कहलाती हैं।*

परस्पर आश्रित दो राशियों में से एक के बढ़ने पर यदि दूसरी राशि उतने ही गुना घट जाती है, तो इन राशियों को **व्युतक्रमानुपाती** *कहते हैं।* उदाहरणार्थ, दो स्टेशनों के बीच की दूरी तय करने का समय गाड़ी के वेग के साथ व्युतक्रमानुपाती होता है। 50 km/h वेग होने पर मास्को-लेनिनग्राद की दूरी 13 h में तय होती है; 65 km/h वेग होने पर 10 h में। अर्थात् जब वेग व्यतिमान $\frac{65}{50}=\frac{13}{10}$ से बढ़ता है, समय उसी व्यतिमान $\frac{13}{10}$ से घटता है।

जब दो राशियां व्युतक्रमानुपाती होती है, तो एक राशि के कोई दो मान दूसरी के विपरीत क्रम में लिये गये दो तदनुरूप मानों के साथ अनुपात बनाते हैं। हमारे उदाहरण में 65 : 50 = 13 : 10।

दो व्युतक्रमानुपाती राशियों के मानों का गुणनफल सदा स्थिर रहता है। हमारे उदाहरण में 50·13 = 650; 65·10 = 650 (650 km मास्को और लेनिनग्राद के बीच की दूरी है)।

§ 65. अनुपातों के व्यावहारिक उपयोग. अंतर्वेशन

अनेक प्रश्नों के हल समानुपाती (या व्युतक्रमानुपाती) राशियों के साथ

संबंधित होते हैं; § 63 का नियम लागू कर ऐसे प्रश्नों को हम एक स्थिर आरेख के अनुसार यंत्रवत हल कर सकते हैं, जैसा कि निम्न उदाहरणों में दिखाया गया है।

उदाहरण 1. कारखाने में ईंधन की दैनिक मांग 1.8 टन है और ईंधन पर वार्षिक व्यय 3000 रूबल है। कारखाने में नवीन प्रयुक्तियों के कारण ईंधन की दैनिक मांग घट कर 1.5 टन हो गयी। कितनी धनराशि ईंधन पर प्रतिवर्ष खर्च होगी ?

एक सहज-साधारण हल इस प्रकार से संभव है। ज्ञात करते हैं : (1) पुरानी परिस्थितियों में ईंधन की वार्षिक मांग $1.8 \cdot 365 = 657$ टन; (2) 1 टन ईंधन की कीमत $3000 : 657 = 4.57$ रूबल; (3) नयी परिस्थितियों में ईंधन पर वार्षिक मांग $4.57 \cdot 1.5 \cdot 365 = 2500$ रूबल।

हल और भी सरलता और शीघ्रता से किया जा सकता है, यदि इस बात पर ध्यान दिया जाये कि ईंधन की दैनिक मांग और ईंधन पर वार्षिक व्यय परस्पर समानुपाती राशियां हैं (यह स्पष्ट है, क्योंकि ईंधन की दैनिक मांग बढ़ने पर वार्षिक व्यय में भी उतनी ही गुनी वृद्धि होती है; दे. § 64)।

हल का आरेख

1.8 टन—3000 रूबल;

1.5 टन—x रूबल;

$$x : 3000 = 1.5 : 1.8$$

$$x = \frac{3000 \cdot 1.5}{1.8} = 2500 \text{ रूबल।}$$

[तुलना करें **ऐकिक नियम** के आरेख से :

$\because$ 1.8 टन/दिन की मांग से वार्षिक व्यय $= 3000$ रूबल

$\therefore$ 1 ,, ,, ,, ,, $= \frac{3000}{1.8}$ रूबल

$\therefore$ 1.5 ,, ,, ,, ,, $= \frac{3000 \cdot 1.5}{1.8}$

$= 2500$ रूबल]

यद्यपि समानुपातिक निर्भरता बहुत ज्यादा मिलती हैं, फिर भी अनेक निर्भरताएं ऐसी हैं, जो अनुपातन के नियमों का पालन नहीं करतीं। पर महत्त्वपूर्ण बात यह है कि ऐसी राशियों के लिए भी अनुपाती कलन का आरेख निरर्थक नहीं होता। उदाहरणतया, यदि दो अनानुपातिक राशियों के परिवर्तनों की तुलना किसी *संकीर्ण* परास (या अंतराल) में की जाये, तो ये परिवर्तन **व्यावहारिकतः** अनुपाती (समानुपाती या व्युतक्रमानुपाती) होंगे।

इसे एक उदाहरण द्वारा समझते हैं। वर्ग की भुजा और उसका क्षेत्रफल अनुपाती नहीं हैं : भुजा 2 m होने पर क्षेत्रफल 4 m^2 होता है; भुजा **2.01 m**

होने पर क्षेत्रफल $(2.01)^2 = 4.0401 \approx 4.040$ m^2; भुजा 2.02 m होने पर क्षेत्रफल $(2.02)^2 = 4.0804 \approx 4.080$ m^2 आदि। भुजाओं का व्यतिमान (यथा, 2.01 : 1), जैसा कि हम देखते हैं, तदनुरूप क्षेत्रफलों के व्यतिमान (4.040 : 1) के बराबर नहीं होता है। पर विचाराधीन परास में *भुजा के परिवर्तनों* का व्यतिमान व्यावहारिकत: *क्षेत्रफल के परिवर्तनों* के व्यतिमान के बराबर है।

सचमुच में, जब भुजा 2 m से 2.01 m तक बढ़ती है, परिवर्तन सिर्फ 0.01 m के बराबर होता है; जब वह 2 m से 2.02 m तक बढ़ती है, परिवर्तन 0.02 m होता है। परिवर्तनों का व्यतिमान $0.02 : 0.01 = 2$ है। क्षेत्रफल में तदनुरूप परिवर्तन (तीसरे अंक तक की शुद्धता से) होंगे: प्रथम स्थिति में 0.040; दूसरी स्थिति में 0.080। परिवर्तनों का अनुपात 0.080 : 0.040 भी 2 के बराबर है। इस प्रकार, लंबाई का परिवर्तन क्षेत्रफल के परिवर्तन का समानुपाती है—यदि क्षेत्रफल के परिवर्तन को तीसरे दशमलव अंक तक की शुद्धता से लिया जाये। यदि दशमलव के बाद चौथा अंक भी लिया जाये, तो अनुपातन से थोड़ा-सा विचलन नजर आयेगा। चौथे दशमलव अंक में भी विचलन नहीं हो, इसके लिए परिवर्तनों को और भी छोटे परास में लेना पड़ेगा (जैसे 1 m से 1.02 m तक के परास की बजाय 1 m से 1.002 m तक के परास में)। व्यवहार में हमें दशमलव के बाद नियत संख्या में ही अंकों की जरूरत पड़ती है (तीन, चार, और पाँच की बहुत ही कम)। इसीलिए हम वर्ग की भुजा और उसके क्षेत्रफल के अल्प परिवर्तनों को समानुपाती राशियां मान सकते हैं। ऐसी ही संवृत्ति अनेकानेक अन्य परिस्थितियों में भी उत्पन्न होती है। इसी की सहायता से हम अपेक्षाकृत कम आंकड़ों वाली सारणी में ऐसे परिणाम भी देख लेते हैं, जो सारणी में बिल्कुल नहीं होते हैं।

उदाहरण 2. वर्गमूलों की सारणी देखें (सारणी 2, पृ. 18)। मान लें कि हमें $\sqrt{63.2}$ ज्ञात करना है, सारणी में संख्या 63.2 नहीं है, पर 63, 64, 65 आदि संख्याएं हैं।

मूलाधीन संख्या	वर्गमूल	वर्गमूलों का परिवर्तन
63	7.937	0.063
64	8.000	0.062
65	8.062	

कलन करें (दे. तीसरा स्तंभ) कि मूलाधीन संख्या में 1 का परिवर्तन (63 से 64 और 64 से 65) होने पर वर्गमूल में कितना परिवर्तन होता है। पता चलता है कि ये परिवर्तन सिर्फ तीसरे अंक में इकाई द्वारा परस्पर इतर हैं। असल में वे एक-दूसरे के और भी निकट हैं : वे चौथे अंक में परस्पर इतर हैं, पर सन्निकरण के कारण तीसरे अंक में ही भिन्नता रखने लगे हैं।)

यदि सिर्फ तीन अंक लिये जाएं, तो ये सारे परिवर्तन लगभग बराबर नजर आयेंगे, अर्थात् 63 और 65 की सीमाओं में तीन दशमलव अंक की शुद्धता से लिये गये वर्गमूलों का अंतर मूलाधीन संख्या के परिवर्तन के साथ समानुपाती है। इसलिए $\sqrt{63.2}$ ज्ञात करने के लिए निम्न क्रमारेख का अनुसरण करते हैं :

मूलाधीन संख्या में परिवर्तन	वर्गमूल में परिवर्तन
1	0.062
0.2	x

$$x : 0.62 = 0.2 : 1$$
$$x = \frac{0.062 \cdot 0.2}{1} = 0.012$$

अब $\sqrt{63.2}$ प्राप्त करते हैं : $\sqrt{63} \approx 7.937$ में कलित संख्या 0.012 जोड़ने पर

$$\sqrt{63.2} \approx 7.949.$$

यदि यह वर्गमूल तीसरे दशमलव अंक तक की शुद्धता से निकालेंगे, तो देखेंगे कि ऊपर प्राप्त परिणाम में सभी अंक सही हैं।

कलन की ऊपर दी गयी विधि को अंतर्वेशन (= बीच में रखना) कहते हैं। गणित में सभी ऐसी विधियां **अंतर्वेशन** कहलाती हैं, जिनकी सहायता से सांख्यिक आंकड़ों की सारणी में से बीच के कुछ अनुपस्थित आंकड़े ज्ञात किये जा सकते हैं। अंतर्वेशन की उपरोक्त सरलतम विधि **रैखिक अंतर्वेशन** कहलाती है।

अंतर्वेशन के उपयोग का लगभग हर प्रकार की सारणियों के परीक्षण में विस्तृत प्रचलन है।

III. बीजगणित

§ 66. बीजगणित की विषय-वस्तु

बीजगणित के अध्ययन की विषय-वस्तु है *समीकरण* (§§ 80-82) *और समीकरण सिद्धांत के विकास में उत्पन्न हुई अन्य समस्याएं*। [भारतीय गणितज्ञों ने इसे 'अव्यक्त गणित' अर्थात् 'अज्ञात राशियों के साथ कलन की कला' भी कहा है।] वर्तमान समय में जब गणित कई विशिष्ट शाखाओं में विभक्त हो गया है, तब बीजगणित सिर्फ एक विशेष प्रकार के समीकरणों—*बीजगणितीय समीकरणों** (§ 84)—का अध्ययन करता है। यूरोपीय भाषाओं में इसे 'अलजेब्रा' कहते हैं; इस नाम का उद्भव देखें § 67 में।

§ 67. बीजगणित के ऐतिहासिक विकास का एक सर्वेक्षण

बेबीलोन. बीजगणित का स्रोत गहन अतीत से चला आ रहा है। कोई चार हजार वर्ष पूर्व ही बेबीलोन के विद्वान वर्ग समीकरण (§ 94) का हल जान गए थे और वे दो समीकरणों का तंत्र (युगल समीकरण) भी हल कर लेते थे, जिनमें से एक समीकरण दूसरी घातकोटि (§ 98) का होता था। इन समीकरणों की सहायता से वे भूमिति, भवन-निर्माण तथा सैन्य कला आदि से संबंधित विभिन्न प्रश्न हल किया करते थे।

बेबीलोनवासी हमारी तरह वर्णात्मक प्रतीकों का उपयोग नहीं करते थे; समीकरणों को वे शब्दों में व्यक्त करते थे।

ग्रीस. अज्ञात राशियों के प्रथम संक्षेपणरूपी द्योतन प्राचीन ग्रीस के गणितज्ञ डायोफांटस (2-3-री शती) की कृतियों में मिलते हैं। अज्ञात राशि को वे 'अरिथ्मोस' (संख्या) और अज्ञात राशि की दूसरी घातकोटि को 'द्युनामिस'

---

* बीजगणित के स्कूली पाठ्यक्रम में अक्सर ऐसे प्रश्न भी शामिल कर लिये जाते हैं, जिनका समीकरण के अध्ययन से कोई सीधा संबंध नहीं होता। यथा, श्रेढ़ी, लघुगणक आदि अंकगणित के क्षेत्र में आते हैं। बीजगणित में इन्हें सिर्फ पठन-पाठन की सुविधा के लिए रखा जाता है।

(इसके अनेक अर्थ हैं : शक्ति, सामर्थ्य, बल आदि*) का नाम देते हैं। तीसरी घातकोटि का नाम उन्होंने 'क्युब्रोस' (घन) रखा, चौथी का—'द्युनामोद्युनामिस' (वर्ग गुणा वर्ग), पाँचवी का—'द्यु नामोक्युबोस', छठी का—'क्युबोक्युबोस', आदि। इन राशियों को उन्होंने तदनुरूप नामों के प्रथम वर्णों से द्योतित किया : *ar, du, cu, ddu, dcu, ccu* आदि। अज्ञात राशियों से ज्ञात राशियों में फर्क दिखाने के लिए ज्ञात राशियों के साथ '*mo*' (monas = इकाई) लिखते थे। जोड़ के लिए कोई चिह्न नहीं था, घटाव के लिए वे एक संक्षेपन प्रयुक्त करते थे, 'बराबर' (समता) दिखाने के लिए *is* (isos = तुल्य) का व्यवहार करते थे।

ऋण संख्याओं पर विचार न तो बेबीलोनवासियों ने किया, न ग्रीसवासियों ने ही। समीकरण *3ar 6mo is 2ar 1mo* $(3x+6=2x+1)$ को डायोफांटस 'बेतुका' मानते थे। डायोफांटस जब समीकरण में किसी राशि को एक तरफ से दूसरी तरफ ले जाते थे, तो कहते थे : योज्य अवकल्य हुआ, अवकल्य योज्य हुआ।

चीन. चीनी विद्वान 200 वर्ष ईसा पूर्व ही पहली कोटि के समीकरणों, उन के तंत्रों और साथ ही वर्ग समीकरणों का हल जान चुके थे। वे ऋण और अव्यतिमानी संख्याओं से भी परिचित थे। चीनी लिपि में हर चिह्न चूँकि किसी अवधारणा को व्यक्त करता है, इसलिए उनके बीजगणित में "संक्षिप्ति-द्योतन" संभव ही नहीं थे।

आगामी युगों में चीन का गणित नवीन उपलब्धियों से समृद्ध होता गया। यथा, 13-वीं शती के अंत में चीनवासी दुपदिक संगुणकों के बनने का नियम जाने गये थे (यह नियम अब 'पास्कल का त्रिभुज' नाम से प्रसिद्ध है; दे. § 72, पृ. 154)। पश्चिम यूरोप में इस नियम की खोज कोई 250 वर्ष बाद स्टिफेल ने की।

भारत. भारतीय विद्वान अज्ञात राशियों और उनकी कोटियों के लिए संक्षिप्ति-द्योतन का काफी विस्तृत प्रयोग करते थे। द्योतन तदनुरूप नामों के प्रथम वर्णों से करते थे। अज्ञात राशि को वे 'जितना (है) उतना' (यावत-तावत) कहते थे; प्रथम, द्वितीय, तृतीय आदि ज्ञात राशियों को रंगों के नाम से संकेतित करते थे (जैसे, काला, नीला, पीला, आदि)। भारतीय विद्वान ऋण और अव्यतिमानी संख्याओं का भी विस्तृत उपयोग करते थे (ग्रीक गणितज्ञ मूलों का सन्निकट

* अरबी में 'द्युनामिस' का अनुवाद 'माल' शब्द से हुआ था, जिसका अर्थ है "संपत्ति"। 12-वीं शती में फिर पश्चिम यूरोपीय गणितज्ञों ने 'माल' का अनुवाद लातीनी में एक समानार्थक शब्द 'सेंसम' से किया। 'क्वाद्रात' (वर्ग) शब्द लातीनी में सिर्फ 16-वीं शती में आया।

मान निकालना जानते थे; पर बीजगणित में अव्यतिमानता से कन्नी काटने की ही कोशिश करते) थे। ऋण संख्याओं के साथ-साथ संख्या-परिवार में शून्य का भी आगमन हुआ, जिसे पहले रिक्त स्थान (संख्या की अनुपस्थिति) से ही द्योतित करते थे।

अरबी भाषी देश. उज्बेकिस्तान. ताजिकिस्तान. प्राचीन भारत के विद्वानों ने बीजगणित की समस्याओं का उल्लेख ज्योतिर्विज्ञान की रचनाओं में किया है, पर स्वतंत्र विषय के रूप में बीजगणित मुस्लिम जगत की अंतर्राष्ट्रीय भाषा—अरबी—में लिखने वाले विद्वानों की कृतियों में प्रकट हुआ। विज्ञान-विशेष के रूप में बीजगणित के संस्थापक मध्य एशिया के गणितज्ञ मुहम्मद अल-खोरेज्मी को मानना चाहिए (अरबी में 'अल-खोरेज्मी' का मतलब 'खोरेज्म का निवासी' है)। बीजगणित पर नवीं शती में लिखी गयी उनकी रचना का नाम है "पारस्थापन और प्रतिस्थापन ग्रंथ"। समीकरण में अवकल्य को एक तरफ से दूसरी तरफ ला कर उसे योज्य में परिणत करने की क्रिया को मुहम्मद ने 'पारस्थापन' का नाम दिया था; प्रतिस्थापन का अर्थ था—अज्ञात राशियों को समीकरण में एक तरफ लाना और ज्ञात राशियों को दूसरी तरफ लाना। 'पारस्थापन' को अरबी में 'अल-जेबर' कहते हैं। 'अलजेब्रा' नाम इसी कृति के कारण प्रचलित हुआ है।

मुहम्मद अल-खोरेज्मी और उनके अनुयायियों ने बीजगणित का उपयोग व्यापार संबंधी हिसाब-किताब में बहुत विस्तृत पैमाने पर किया। संक्षिप्ति-द्योतन का प्रयोग न तो मुहम्मद अल-खोरेज्मी ने किया, न अरबी में लिखने वाले किसी अन्य विद्वान ने (इसकी उन्हें आवश्यकता भी नहीं थी। अरबी लिपि अपने आप में संक्षिप्त सी है : स्वर वर्ण अक्सर छोड़ दिये जाते हैं, व्यंजनों और अर्धव्यंजनों के संकेत सरल हैं और शब्द में मिल-जुल कर एक अकेला प्रतीक सा बन जाते हैं)। अरबी विद्वान ऋण संख्याओं को कोई मान्यता नहीं देते थे : ऋण संख्याओं के सिद्धांत के बारे में जो जानकारी उन्हें भारतीय स्रोतों से मिली थी, उसे वे पर्याप्त तर्कसंगत नहीं मानते थे। यह सही भी था, पर भारतीय विद्वान जहां एक ही पूर्ण वर्ग समीकरण से काम चला लेते थे, अल-खोरेज्मी और उनके अनुयायियों को तीन विभिन्न स्थितियों में भेद करना पड़ता था : $x^2+px=q$, $x^2+q=px$, $x^2=px+q$; p व q धन संख्याएं हैं।

मध्य एशियाई, अरबी व फारसी गणितज्ञों ने बीजगणित को कई नवीन उपलब्धियों से समृद्ध किया। उच्च घातकोटियों के समीकरणों के लिए वे बहुत बड़ी शुद्धता के साथ मूल ज्ञात कर सकते थे। यथा, मध्य एशिया के विख्यात दार्शनिक और ज्योतिर्विद अल-बरूनी (973-1048) ने (ये भी खोरेज्म के ही थे)

किसी दिये गये वृत्त में अंकित नवभुज की भुजा ज्ञात करने के प्रश्न को घन समीकरण $x^3 = 1 + 3x$ का रूप दिया और (षष्टभू अंशों में) x का सन्निकट मान भी ज्ञात कर लिया : $x = 1.52' \; 45'' \; 47''' \; 13''''$ (पढ़ें : एक पूर्णांक, 52 साठवां अंश, 45 तीन हजार छ: सौ-वां अंश, आदि)। यह मान $\frac{1}{60^4}$ अंशों तक की शुद्धता रखता है; दशमलव भिन्न में इससे सात विश्वस्त अंक मिलेंगे।

अपनी रूबाइयों के लिए प्रसिद्ध उमर खैयाम (1036-1123) ईरानी व ताजिकिस्तानी काव्य के क्लासिकी रचयिता ही नहीं थे, वह एक विख्यात गणितज्ञ भी थे। वह नैशापुर के रहने वाले थे। उन्होंने तीसरी घातकोटि के समीकरण का क्रमबद्ध अध्ययन किया। घन समीकरण के मूलों को संगुणकों में व्यक्त करने की सफलता उन्हें नहीं मिली। मुस्लिम जगत के अन्य विद्वान भी इस कार्य में सफल नहीं हो पाए, पर खैयाम ने एक विधि विकसित कर ली, जिसकी सहायता से घन समीकरण का मूल ज्यामितिक ढंग से प्राप्त किया जा सकता है (उनकी दिलचस्पी सिर्फ धनात्मक मूल में थी)।

मध्ययुगीन यूरोप. 12-वीं शती में अल-खोरेज्मी के "अलजेब्रा" से यूरोप भी परिचित हुआ; इसका अनुवाद लातीनी में किया गया। इस समय से बीजगणित का विकास यूरोपीय देशों में आरंभ होता है (शुरू-शुरू में पूर्वी विज्ञान के प्रभावाधीन ही)। अज्ञात राशियों के संक्षिप्त-द्योतन प्रयुक्त हुए, व्यापार की आवश्यकताओं से संबंधित अनेक नये प्रश्न हल किए गए, पर 16-वीं शती तक कोई खास प्रगति नहीं हुई। 16-वीं शती के प्रथम तृतीयांश में इटली के ढेल फेर्रो और तार्तालिया ने $x^3 = px + q$, $x^3 + px = q$, $x^3 + q = px$ रूप वाले घन समीकरणों का हल प्राप्त किया; 1545 में कार्दानो ने दिखाया कि किसी भी घन समीकरण को इन तीन समीकरणों में से किसी एक के रूप में व्यक्त किया जा सकता है; इसी समय कार्दानों के एक शिष्य फेर्रारी ने चौथी घातकोटि के समीकरण का हल प्राप्त किया।

इन समीकरणों के हल की जटिलता के कारण द्योतन (संकेतों, प्रतीकों) में सुधार की आवश्यकता हुई। यह प्रक्रिया करीब सौ साल तक चलती रही। 16-वीं शती के अन्त में फ्रांसीसी गणितज्ञ वियेटा ने वर्णात्मक द्योतन का रिवाज चलाया, और सिर्फ अज्ञात राशियों के लिए ही नहीं, बल्कि ज्ञात राशियों के लिए भी (अज्ञात राशियां बड़े व्यंजन वर्णों से द्योतित होती थीं और ज्ञात राशियां—बड़े स्वर वर्णों से)। संक्रियाओं के द्योतन के लिए भी छोटे चिह्न अपनाये गये। 17-वीं शती के मध्य में बीजगणितीय प्रतीकात्मकता ने फ्रांसीसी वैज्ञानिक डेकार्ट (1596-1650) के प्रयत्नों से लगभग वह स्वरूप प्राप्त

किया, जो आज है ।

ऋण संख्या. 13-वीं से 16-वीं शती तक यूरोपवासी ऋण संख्या पर सिर्फ विशेष स्थितियों में ही ध्यान दिया करते थे । घन समीकरण का हल मिल जाने के बाद ऋण संख्याओं को बीजगणित में प्रवेश तो मिला, पर लोग उन्हें 'मिथ्या' संख्या की ही संज्ञा देते रहे । 1629 में फ्रांस के जिरार ने ऋण संख्याओं के ज्यामितिक द्योतन की विधि दी, जो आज विश्वविख्यात है । इसके करीब बीस वर्ष बाद ही ऋण संख्याएं सर्वमान्य हो सकीं ।

मिश्र संख्या. बीजगणित में मिश्र संख्याओं (§ 93 व 99) का प्रवेश भी घन समीकरण के हल की खोज से संबंधित है ।

इस खोज के पहले वर्ग समीकरण $x^2+q=px$ को हल करने में ऐसी स्थितियां उत्पन्न होती थीं, जब $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ का वर्गमूल निकालने की आवश्यकता पड़ती थी (यहां राशि $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ छोटी है, बनिस्बत q के) । ऐसी स्थिति में वे निष्कर्ष निकाला करते थे कि समीकरण का कोई हल नहीं है । उस समय मिश्र संख्या को बीजगणित में प्रवेश देने की बात भी नहीं की जा सकती थी (खास कर ऐसी स्थिति में, जब ऋण संख्या ही 'मिथ्या' मानी जाती हो) । पर तार्तालिया के नियम से घन समीकरण का मूल निकालने के दौरान पता चला कि काल्पनिक संख्या के साथ संक्रिया के बिना वास्तविक मूल ज्ञात नहीं हो सकता ।

इस पर थोड़ा विस्तार के साथ गौर करें । तार्तालिया के नियमानुसार समीकरण

$$x^3=px+q \tag{1}$$

का मूल निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात हो सकता है :

$$x=\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}, \tag{2}$$

जहां u और v निम्न समीकरण-तंत्र के हल हैं :

$$u+v=q\ ;\ uv=\left(\frac{p}{3}\right)^3. \tag{3}$$

उदाहरणार्थ, समीकरण $x^3+9x+28$ ($p=9$, $q=28$) के लिये

$$u+v=28;\ uv=27,$$

जिससे या $u=27$, $v=1$; या $u=1$, $v=27$ । दोनों ही स्थितियों में

$$x=\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{1}=4.$$

विचाराधीन समीकरण का और कोई वास्तविक मूल नहीं है ।

पर कार्दानो ने पहले ही ध्यान दिया था कि तंत्र (3) का वास्तविक हल नहीं होने पर भी समीकरण (1) का मूल वास्तविक और *धनात्मक* हो सकता है। यथा, समीकरण $x^3 = 15x + 4$ का मूल $x = 4$ है, पर तंत्र

$$u + v = 4; \; uv = 125$$

के मूल मिश्र हैं : $u = 2 + 11i$, $v = 2 - 11i$

$$(\text{या } u = 2 - 11i, \; v = 2 + 11i).$$

इस रहस्यमय संवृत्ति की व्याख्या पहले-पहल बोंबेली ने 1572 में की। उन्होंने दिखाया कि $2 + 11i$ संख्या $2 + i$ का घन है और $2 - 11i$ संख्या $2 - i$ का घन है; अतएव, हम लिख सकते हैं कि $\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 + i$, $\sqrt[3]{2 - 11i} = 2 - i$; सूत्र (2) का प्रयोग करने पर

$$x = (2 + i) + (2 - i) = 4.$$

इस क्षण से मिश्र संख्या की उपेक्षा करना असंभव हो गया। पर मिश्र संख्याओं का सिद्धांत बहुत धीमी गति से विकसित हुआ : 18-वीं शती का आगमन हो गया और विश्व के बड़े-बड़े गणितज्ञ इस बहस में ही लगे रहे कि मिश्र संख्या का लघुगणक कैसे लिया जाये। मिश्र संख्याओं की सहायता से अनेक महत्त्वपूर्ण तथ्यों का पता चल सका, जिनका संबंध वास्तविक संख्याओं से है; फिर भी मिश्र संख्याओं की विद्यमानता पर शंका बनी ही रही। मिश्र संख्याओं के साथ संक्रियाओं के संपूर्ण नियम 18-वीं शती के मध्य में रूसी अकादमीशियन ऐलर ने दिये, जिनकी गणना विश्व के महानतम गणितज्ञों में होती है। 19-वीं शती के आरंभ में वेस्सेल (डेनमार्क) और आर्गान (Argand, फ्रांस) ने मिश्र संख्याओं का ज्यामितिक द्योतन (§ 105) प्रस्तुत किया (इस दिशा में पहला कदम इंगलैंड के वाल्लिस ने 1685 में उठाया था)। पर वेस्सेल और आर्गान के कार्यों पर किसी ने ध्यान नहीं दिया; हां, जब 1831 में जर्मनी के महान गणितज्ञ गौस ने इस विधि को विकसित किया, तब सबने इसे अपना लिया।

3-री और 4-थी कोटि के समीकरणों का हल जब ज्ञात हो गया, तो गणितज्ञ तेजी से 5-वीं कोटि के समीकरण के हल का सूत्र ढूँढ़ने में लग गये। पर रूफीनी (इटली) ने 19-वीं शती के आरंभ में सिद्ध किया कि पाँचवी कोटि का वर्ण-समीकरण $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, बीजगणितीय विधियों से हल *नहीं* किया जा सकता, अर्थात् बीजगणित की छः संक्रियाओं (जोड़, घटाव, गुणा, भाग, घातन, मूलन) की सहायता से वर्ण-राशियों a, b, c, d, e द्वारा इस समीकरण के मूल को व्यक्त नहीं किया जा सकता (रूफीनी के प्रमाण में कुछ कमियां थीं; 1824 में नार्वे के आबेल ने जो प्रमाण प्रस्तुत किया, उसमें कोई त्रुटि नही है)।

1830 में फ्रांस के गालुआ (Galois) ने सिद्ध किया कि 4 से ऊँची किसी भी घातकोटि का समीकरण बीजगणित में हल नहीं हो सकता।

फिर भी n-कोटि के किसी भी समीकरण के n मूल होते हैं (इनमें से कुछ बराबर भी हो सकते हैं, मिश्र संख्या के रूप में भी हो सकते हैं)। इस तथ्य में गणितज्ञों की आस्था 17-वीं शती में ही हो चुकी थी (पर वह असंख्य विशिष्ट स्थितियों के विश्लेषण मात्र पर आधारित थी); सिर्फ 19-वीं शती के आरंभ में गौस ने इसे एक प्रमेय के रूप में सिद्ध किया।

19-वीं व 20-वीं शतियों के बीजगणितज्ञ जिन समस्याओं के अध्ययन में लगे रहे, वे सरल गणित की सीमा से परे की हैं। सिर्फ इतना बता दें कि 19-वीं शती में समीकरणों के सन्निकृत हल की अनेक विधियां विकसित की गयीं। इस दिशा में अनेक महत्त्वपूर्ण परिणाम महान रूसी वैज्ञानिक निकोलाई लोबाचेव्स्की ने भी प्राप्त किये।

§ 68. ऋण संख्याएं

ऐतिहासिक विकास के सबसे आरंभिक चरणों में लोग सिर्फ नैसर्गिक संख्या (§ 17) ही जानते थे। पर सिर्फ इन संख्याओं से आदमी जीवन की सरलतम स्थितियों में भी काम नहीं चला सकता। सचमुच, यदि सिर्फ नैसर्गिक संख्या का ही उपयोग किया जाये, तो एक नैसर्गिक संख्या को दूसरी से हमेशा विभाजित नहीं किया जा सकता। पर जीवन में ऐसे भी अवसर आते हैं, जब (उदाहरणतया) 3 को 4 से विभाजित करना पड़ता है, 5 को 12 से, आदि। भिन्न संख्याओं के बिना नैसर्गिक संख्याओं का विभाजन एक असंभव संक्रिया है; भिन्न के जन्म से ही यह संक्रिया संभव हुई।

पर घटाव की संक्रिया भिन्न को अपनाने के बाद भी हमेशा संभव नहीं होती: छोटी संख्या में से बड़ी संख्या (जैसे 3 में से 5) नहीं घटा सकते। पर दैनिक जीवन में इस तरह से घटाने की आवश्यकता भी नहीं पड़ती, इसीलिए बहुत लंबे अर्से तक लोग यह मानते रहे कि यह असंभव ही नहीं वरन निरर्थक भी है।

बीजगणित के विकास ने दिखाया कि गणित में ऐसी संक्रिया को अपनाना आवश्यक है (दे. § 69), और भारतीय विद्वानों ने करीब 7-वीं शती में इसका प्रचलन शुरू किया; चीनियों ने कुछ पहले शुरू कर दिया था। जीवन में ऐसे घटाव का उदाहरण ढूँढ़ने के लिए प्रयत्नशील भारतीय गणितज्ञों ने इसकी व्याख्या व्यापारिक लेन-देन की दृष्टि से की। यदि व्यापारी के पास 5000 रूबल

हैं और वह 3000 रूबल का माल खरीदता है, तो उसके पास 2000 रूबल बच जाते हैं। पर यदि उसके पास 3000 रूबल हैं और वह 5000 रूबल का सामान खरीदता है, तो वह 2000 रूबल कर्ज में रहता है। भारतीय गणितज्ञों ने माना कि इसी स्थिति में घटाव 3000 – 5000 संपन्न होता है, जिसका फल है 'ऋण दो हजार' (लिखते थे '2000', अर्थात् 2000 के ऊपर एक मोटा बिंदु)।

यह व्याख्या कृत्रिम प्रकृति की थी। व्यापारी ऋण की राशि ज्ञात करने के लिए संक्रिया 3000 – 5000 कभी भी संपन्न नहीं करता था; वह हमेशा 5000 – 3000 संपन्न करता था। इसके अतिरिक्त, इस विधि से "ऊपर बिंदु वाली संख्याओं" के साथ जोड़ और घटाव के नियम यदि खींच-तान कर समझाये भी जा सकते थे, तो गुणा या भाग के नियम बिल्कुल नहीं समझाये जा सकते थे (संक्रियाओं के नियम दे. § 5 में)। फिर भी पाठ्यपुस्तकों में लंबे समय तक इस व्याख्या को स्थान दिया जाता रहा; कुछ किताबों में अब भी इसे आप देख सकते हैं।

छोटी संख्या में से बड़ी संख्या घटाना 'असंभव' है, इसका कारण यह है कि नैसर्गिक संख्याओं का क्रम सिर्फ एक दिशा में अनंत है। यदि (उदाहरणतया) 7 में से क्रमशः 1 घटाते चले जायें, तो निम्न संख्यायें मिलेंगी :

$$6, 5, 4, 3, 2, 1.$$

इसके बाद घटाने पर 'संख्या की अनुपस्थिति' बचेगी, अर्थात् ऐसा कुछ नहीं बचता, जिसमें से आगे कुछ घटाया जाये। यदि हम चाहते हैं कि घटाव हमेशा संभव हो, तो हमें चाहिए कि (1) 'संख्या की अनुपस्थिति' को भी एक संख्या (शून्य) मान लें; (2) इस आखिरी संख्या में से भी इकाई घटाना संभव मान लें, आदि।

इस प्रकार हमें नयी संख्याएं मिलती जाती हैं, जिनका आधुनिक द्योतन है :

$$-1, -2, -3, \text{ आदि ।}$$

इन संख्याओं को **पूर्ण ऋण संख्या** कहते हैं। इनके पहले स्थित चिह्न 'माइनस' दिखाता है कि ये संख्याएं एक-एक कर 1 घटाते जाने से प्राप्त हुई हैं। इस चिह्न को *'राशि का चिह्न'* कहते हैं; घटाव के चिह्न का भी यही रूप है, पर उसे *'संक्रिया का चिह्न'* कहते हैं।

पूर्ण ऋण संख्याओं को अपनाने के बाद **अपूर्ण ऋण संख्याओं** को भी अपनाना पड़ता है। यदि हम मानते हैं कि $0 - 5 = -5$, तो हमें यह भी मानना पड़ेगा कि $0 - \frac{12}{7} = -\frac{12}{7}$। संख्या $-\frac{12}{7}$ एक खंड ऋण संख्या है।

ऋण संख्याओं (पूर्ण और खंड) की विपरीत संख्याओं (पूर्ण और अपूर्ण) को, जिनका अध्ययन अंकगणित में होता है, **धन (पूर्ण व अपूर्ण) संख्या** कहते हैं। इस अंतर को और स्पष्ट करने के लिए धन संख्याओं के पहले 'प्लस' का चिह्न लिखते

है; इसका रूप जोड़ के चिह्न सा है, पर यहां पर यह राशि का चिह्न बनाता है, न कि संक्रिया का। उदाहरण : 2 को +2 लिखते हैं।*

धन व ऋण संख्याओं (पूर्ण व खंड) को स्कूली पाठ्यपुस्तकों में चिह्नित या सापेक्षिक संख्या कहा जाता है। पर वैज्ञानिक शब्दावली के अनुसार इन संख्याओं को (संख्या शून्य के साथ) **व्यतिमानी संख्या** कहा जाता है। इस नाम का मतलब तभी स्पष्ट होता है, जब हम अव्यतिमानी संख्याओं को अपनाते हैं (दे. § 92)। जब तक ऋण संख्या नहीं अपनायी जाती, धन संख्या का कोई अस्तित्व नहीं रहता और $\frac{3}{4}$ *सिर्फ* खंड संख्या बनी रहती है, *धन* खंड संख्या नहीं। ठीक इसी तरह से, जब तक हम अव्यतिमानी संख्याओं को नहीं अपनाते, $+5$, -5, $-\frac{3}{4}$, $+\frac{3}{4}$ आदि सिर्फ धन या ऋण, पूर्ण या खंड संख्याएं ही हैं, व्यतिमानी संख्या नहीं।

§ 69. ऋण संख्याओं और उनके साथ संक्रियाओं का इतिहास

छात्रों के लिए बीजगणित में सबसे कठिनता से आत्मसात होने वाली चीज शायद ऋण संख्याओं के साथ संक्रिया का सिद्धांत है। इसलिए नहीं कि इसके नियम जटिल हैं। इसके विपरीत, ये बहुत सरल हैं। वे सिर्फ दो प्रश्न नहीं समझ पाते : (1) ऋण संख्याओं को गणित में लाने की जरूरत क्या थी? (2) उनके साथ संक्रियाएँ अमुक नियमों से ही क्यों संपन्न होती हैं, किन्हीं अन्य नियमों से क्यों नहीं? विशेषकर यह समझने में दिक्कत होती है कि ऋण संख्याओं के गुणा-भाग से धनात्मक परिणाम कैसे मिल जाते हैं।

ऐसे प्रश्नों के उठने का कारण यह है कि विद्यार्थीगण समीकरण हल करना सीखने के पहले ही ऋण संख्याओं से परिचय पा लेते हैं और फिर बाद में ऋण संख्याओं के साथ संक्रिया के नियमों की ओर दुबारा कभी नहीं लौटते। लेकिन उपरोक्त प्रश्नों के उत्तर, समीकरण हल करने की प्रक्रिया में ही स्पष्ट हो सकते हैं। ऋण संख्याओं का जन्म ही इस प्रक्रिया में हुआ है, यह उनका इतिहास बताता है। समीकरण नहीं होते, तो ऋण संख्याओं की भी जरूरत नहीं पड़ती।

---

* राशि-चिह्न (+ व —) का संक्रिया-चिह्न के समान होना कलन की दृष्टि से बहुत लाभकर है, पर इसके कारण छात्रों को शुरू-शुरू में काफी दिक्कत होती है। इसीलिए आरंभिक पठन-पाठन में दोनों चिह्नों में भेद करना जरूरी है। इसके लिए 'ऋण दो' को —2 न लिखकर $\bar{2}$ के रूप में लिख सकते हैं, जैसा कि लघुगणकों के साथ कलन में किया जाता है।

पहले समीकरणों का अध्ययन ऋण संख्याओं की सहायता के बिना ही होता था; इसमें अनेक असुविधाएं उत्पन्न थीं, जिन्हें दूर करने के लिए ऋण संख्याओं को अपनाया गया। फिर भी बहुत-से बड़े-बड़े गणितज्ञ इनके उपयोग से इन्कार कर रहे थे, या इनका उपयोग करते भी थे तो बेमन से। यहां तक कि डेकार्ट भी इन्हें 'मिथ्या संख्या' ही कहते रहे।

असुविधा का अंदाज आपको निम्न उदाहरण से मिल सकता है। एक अज्ञात राशि वाले प्रथम कोटि के समीकरण, जैसे

$$7x-5=10x-11$$

के हल में हम पदों को इस प्रकार इधर-उधर करते हैं कि अज्ञात राशि वाले सारे पद समता-चिह्न के एक तरफ आ जायें और सभी ज्ञात राशियां उसके दूसरी तरफ आ जायें। इस क्रिया में राशियों के चिह्न विपरीत हो जाते हैं। अज्ञात राशियों को दायीं ओर और ज्ञात राशियों को बायीं ओर लाने पर मिलेगा :

$$11-5=10x-7x;\ 6=3x;\ 2=x.$$

इन रूपांतरणों को संपन्न करने के लिए ऋण संख्याओं की कोई जरूरत नहीं है; आप + व — को धन व ऋण राशियों का चिह्न नहीं मानकर जोड़ व घटाव (संक्रियाओं) का चिह्न मान सकते हैं। पर इसके लिए पहले से सोचकर रखना होगा कि अज्ञात राशियों को बायें लाना है या दायें। यदि उपरोक्त समीकरण में उन्हें बायें लायेंगे, तो प्राप्त होगा :

$$7x-10x=5-11.$$

ऋण संख्याओं को अपनाये बिना हम 5 में से 11 नहीं घटा सकते, $7x$ में से $10x$ नहीं घटा सकते। इसका मतलब है कि हम हल को आगे नहीं बढ़ा सकते। पर हमेशा यह पहले से नहीं बताया जा सकता (विशेषकर यदि समीकरण में ढेर सारे पद हैं) कि अज्ञात राशियों को किस तरफ लाने से ऐसी स्थिति उत्पन्न नहीं होगी। हलकर्ता को दुहरा काम करने के लिए तैयार रहना पड़ेगा, ताकि वह पदों की स्थिति में फिर से आवश्यकतानुसार हेर-फेर कर सके। कलन की व्यावहारिक क्षमता बढ़ाने के लिए ही ऋण संख्याएँ अपनायी गई हैं। यदि हम इस 'असंभव' अवकलन (घटाव) $5-11$ को संभव मान लें तथा इसे -6 से द्योतित करें, और इसी प्रकार $7x-10x$ से $-3x$ प्राप्त करें, तो

$$-3x=-6.$$

यहां से x का मान निकालें $x=(-6):(-3)$.

अब पता चलता है कि ऋण संख्या अपनाने के साथ-साथ निम्न नियम भी अपनाना जरूरी है : एक ऋण संख्या (-6) में दूसरी ऋण संख्या (-3) से भाग देने पर भागफल धन संख्या (2) के रूप में मिलती है। वस्तुतः इस भाग-

फल में अज्ञात राशि x का वही मान मिलना चाहिए, जो पिछली विधि से (बिना ऋण संख्याओं के ही) मिला था; वह 2 के बराबर था।

ऋण संख्याएं लगभग इसी तरह प्रचलित हुई थीं। उन्हें अपनाने का लक्ष्य था—कलन प्रक्रिया को अधिक कारगर बनाना। ऋण संख्याओं के साथ संक्रियाओं के नियमों का जन्म व्यावहारिक कलन में इस कारगर युक्ति के उपयोग के परिणामस्वरूप हुआ है।

विविध और दीर्घकालीन प्रयोगों ने सिद्ध कर दिया है कि यह युक्ति बहुत कारगर है और विज्ञान व तकनीक के सभी क्षेत्रों में सफलतापूर्वक इसे काम में लाया जा रहा है। कोई भी क्षेत्र हो, ऋण संख्याओं को अपनाने से ऐसी संवृत्तियों को भी एकल नियम से बांधने में सफलता मिल जाती है, जिनके लिए ऋण संख्याओं के बिना (सिर्फ धन संख्याओं की उपस्थिति में) दसियों नियम बनाने पड़ते।

इस प्रकार, उपरोक्त दोनों प्रश्नों का उत्तर निम्न है: (1) ऋण संख्याएं ऐसी कठिनाइयों को दूर करने के लिए अपनायी गयी हैं, जो विशेषकर समीकरण हल करते वक्त उत्पन्न होती हैं; (2) उनके साथ संक्रिया के नियम इस तरह बनाये गये हैं कि उनसे प्राप्त परिणाम वैसे ही हों, जैसे उनकी सहायता के बिना सिर्फ धन संख्याओं से प्राप्त होते।

ये सभी नियम (दे. § 70) सरलतम समीकरणों की सहायता से उसी तरह निर्धारित हो सकते हैं, जैसे ऊपर ऋण संख्या में ऋण संख्या से भाग देने का नियम निर्धारित किया गया है।

§ 70. व्यतिमानी संख्याओं के साथ संक्रियाओं के नियम

परम मान. ऋण संख्या का परम मान उसके चिह्न (—) को (+) में परिणत कर देने से प्राप्त धन संख्या है। —5 का परम मान +5, अर्थात् 5 है। शून्य और धन संख्या का परम मान स्वयं संख्या है।

परम मान का चिह्न दो खड़ी लकीरें हैं, जिनके बीच वह संख्या लिखी जाती है, जिसका परम मान निकालना होता है। उदाहरणार्थ, $|-5| = 5$, $|+5| = 5$, $|0| = 0$.

1. जोड़ (a) *समान चिह्न वाली दो संख्याओं को जोड़ने के लिए पहले उनके परम मानों को जोड़ते हैं, फिर योगफल के पहले दी हुई संख्याओं का समष्टिक चिह्न लगा देते हैं।*

उदाहरण. $(+8)+(+11)=19$;

$(-7)+(-3)=-10$.

(b) विपरीत चिह्नों वाली दो संख्याओं को जोड़ने के लिए उनके परम मान लेते हैं, बड़े मान में से छोटे को घटाते हैं, फल के पहले उस संख्या का चिह्न लगाते हैं, जिसका परम मान बड़ा होता है।

उदाहरण. $(-3)+(+12)=9;$

$(-3)+(-1)=-2.$

2. घटाव. एक संख्या में से दूसरी को घटाने की क्रिया को जोड़ की क्रिया में परिणत किया जा सकता है; इसके *लिए* **घटायी** *जाने वाली संख्या* **(व्यवकल्य)** *का चिह्न वही रखते हैं, घटाने वाली संख्या (व्यवकारी) का* **राशि-चिह्न** *विपरीत कर देते हैं।* [और संक्रिया-चिह्न (—) की जगह (+) लिख देते हैं।]

उदाहरण.

$$(+7)-(+4)=(+7)+(-4)=3$$
$$(+7)-(-4)=(+7)+(+4)=11$$
$$(-7)-(-4)=(-7)+(+4)=-3$$
$$(-4)-(-4)=(-4)+(+4)=0.$$

टिप्पणी. जोड़-घटाव के लिए सबसे अच्छा उपाय निम्नांकित है (विशेषकर यदि बहुत-सी संख्याएं प्रदत्त हों) : (1) सभी संख्याओं को कोष्ठक से मुक्त कर देते हैं; संख्या के पहले चिह्न (+) लिखते हैं, यदि कोष्ठक के भीतर का चिह्न (राशि-चिह्न) और कोष्ठक के पहले का चिह्न (संक्रिया-चिह्न) समान होते हैं; संख्या के पहले चिह्न (—) लगाते हैं, यदि राशि-चिह्न और संक्रिया चिह्न विपरीत होते हैं; (2) जिन संख्याओं के पहले चिह्न '+' हो, उनके परम मानों को एक साथ जोड़ देते हैं (योगफल-1); (3) जिन संख्याओं के पहले चिह्न '—' हो, उनके परम मानों को अलग से एक साथ जोड़ देते हैं (योगफल-2); (4) दोनों योगफलों में से छोटे योगफल को बड़े योगफल में से घटा लेते हैं; (5) फल के पहले वह चिह्न लगाते हैं; जो बड़े योगफल के अनुरूप होता है।

उदाहरण. कलन करें :

$$(-30)-(-17)+(-6)-(+12)+(+2).$$

हल : (1) $(-30)-(-17)+(-6)-(+12)+(+2)$

$= -30+17-6-12+2;$

(2) $17+2=19$ (योगफल-1)

(3) $30+6+12=48$ (योगफल-2)

(4) $48-19=29$

(5) फल : —29, क्योंकि बड़ा योगफल (48) उन संख्याओं के

परम मानों को जोड़ने में मिला है, जिनके पहले चिह्न '—' लगा था (व्यंजन $-30+17-6-12+2$ में)।

अंतिम व्यंजन को संख्या -30, $+17$, -6, -12, $+2$ का जोड़ भी मान सकते हैं, और संख्या -30 में संख्या 17 जोड़ने, फिर संख्या 6 घटाने, फिर 12 घटाने और अंत में 2 जोड़ने की क्रमिक क्रियाओं का परिणाम भी मान सकते हैं। यदि व्यापक रूप से देखा जाये, तो $a-b+c-d$ आदि जैसे व्यंजन को संख्या $(+a)$, $(-b)$, $(+c)$, $(-d)$ का जोड़ भी मान सकते हैं, और क्रमिक क्रियाओं—$(+a)$ में से $(+b)$ घटाने, फिर $(+c)$ जोड़ने और $(+d)$ घटाने—का फल भी मान सकते हैं।

3. **गुणा**. *दो संख्याओं को आपस में गुणा करने के लिए पहले उनके परम मानों को आपस में गुणा करते हैं, फिर गुणनफल के पहले धन चिह्न रखते हैं, यदि संगुणकों के चिह्न समान होते हैं (ऋण चिह्न रखते हैं. यदि संगुणकों के चिह्न विपरीत होते हैं)।*

आरेख (गुणा में चिह्न रखने का नियम)

$$+\cdot+=+$$
$$+\cdot-=-$$
$$-\cdot+=-$$
$$-\cdot-=+$$

उदाहरण. $(+2.4)\cdot(-5)=-12;$

$(-2.4)\cdot(-5)=12;$

$(-8.2)\cdot(+2)=-16.4.$

दो से अधिक संगुणक होने पर गुणनफल धनात्मक होता है, यदि ऋण संगुणकों की संख्या सम होती है (गुणनफल ऋणात्मक होता है, यदि ऋण संगुणकों की संख्या विषम होती है)।

उदाहरण.

(1) $(+\frac{1}{3})\cdot(+2)\cdot(-6)\cdot(7)\cdot(-\frac{1}{2})=-14$

ऋण संगुणकों की संख्या विषम (3) है।

(2) $(-\frac{1}{3})\cdot(+2)\cdot(-3)\cdot(+7)\cdot(+\frac{1}{2})=7$

ऋण संख्याओं की संख्या सम (2) है।

4. **भाग**. *एक संख्या में दूसरी से भाग देने के लिए पहली के परम मान को*

दूसरी के परम मान से विभाजित करते हैं, भागफल धनात्मक होता है, यदि दोनों संख्याओं के चिह्न समान होते हैं (भागफल ऋणात्मक होता है, यदि दोनों संख्याओं के चिह्न विपरीत होते हैं) । भागफल का चिह्न-निर्णय उसी आरेख के अनुसार होता है, जो गुणनफल के लिए दिया गया है [$a : b$ को $a \cdot \frac{1}{b}$ भी मान सकते हैं] ।

उदाहरण. $(-6):(+3) = -2;$
$(+8):(-2) = -4;$
$(-12):(-12) = +1.$

§ 71. इकपदों के साथ संक्रियाएं. बहुपदों का जोड़-घटाव

इकपद (इकपदी व्यंजन) दो या अधिक संगुणकों के गुणनफल को कहते हैं; इनमें से प्रत्येक संगुणक कोई संख्या, वर्ण या वर्ण का कोई घात हो सकता है। उदाहरणतया, $2d$, a^3d, $3abc$, $-4x^2y^2$ इकपद हैं। अकेली संख्या या अकेला वर्ण भी इकपद माना जा सकता है।

इकपद के किसी भी संगुणक को **संद** कह सकते हैं। अक्सर शब्द 'संद' का प्रयोग **सांख्यिक गुणक** या **गुणांक** के अर्थ में करते हैं (जैसे, व्यंजन $-4x^2yz^3$ में संख्या -4 संद है)। किसी गुणक को संद कहकर हम इस बात पर जोर देते हैं कि इसी गुणक के साथ बाकी गुणकों के गुणन से इकपद मिला है। सांख्यिक गुणक को संद के रूप में अलग करके इस बात पर जोर देते हैं कि मुख्य भूमिका **वर्णिक व्यंजन** (वर्ण से द्योतित राशि) का है, जो योज्य के रूप में किसी संख्या बार दुहराया गया है या अंशों में खंडित हुआ है।

इकपदों को **समरूप** मानते हैं, जब वे बिल्कुल एक जैसे होते हैं या जब उनमें सिर्फ संद भिन्न (इतर) होते हैं। स्पष्ट है कि दो इकपदों का समरूप या विषम-रूप होना इस बात पर निर्भर करता है कि उनमें कौन-सा गुणक संद माना गया है। यदि सांख्यिक गुणकों को संद माना जाये, तो वे सारे इकपद समरूप होंगे जिनका वर्णिक हिस्सा एक जैसा होगा। उदाहरणार्थ, ax^2y^2, bx^2y^2, cx^2y^2 समरूप इकपद होंगे, यदि a, b, c को संद माना जायेगा; इकपद $3x^2y^2$, $-5x^2y^2$, $6x^2y^2$ समरूप होंगे, यदि सांख्यिक गुणकों को संद माना जायेगा।

इकपदों का जोड़. यदि व्यापक रूप में देखा जाये, तो दो या अधिक पदों का योगफल सिर्फ द्योतित किया जा सकता है; जब तक हम वर्णों की जगह किन्हीं संख्याओं को नहीं रखते, इकपदों के जोड़ को कोई सरलतर रूप प्रदान करना

सामान्यतया संभव नहीं होता। उसे सरलतर रूप तभी दिया जा सकता है, जब योज्य पदों के बीच समरूप इकपद भी होते हैं : अनेक समरूप इकपदों की जगह सिर्फ एक समरूप इकपद लिखते हैं, जिसका संद विचाराधीन समरूप इकपदों के संदों को जोड़ने से मिलता है। इस क्रिया को समरूप इकपदों का *संयोजन* कहते हैं।

उदाहरण 1. $3x^2y^2-5x^2y^2+6x^2y^2=4x^2y^2$

उदाहरण 2. $ax^2y^2-bx^2y^2+cx^2y^2=(a-b+c)x^2y^2$

उदाहरण 3. $4x^3y^2-3x^2y^2-2x^3y^2+6x^2y^2+5xy=2x^3y^2+3x^2y^2+5xy$

विकोष्ठन. उदाहरण 2 में संपन्न क्रिया को विकोष्ठन कहते हैं; कहते हैं कि x^2y^2 को विकोष्ठित किया गया है (कोष्ठक से बाहर किया गया है)। वस्तुतः विकोष्ठन और इकपदों का संयोजन एक ही क्रिया है। विकोष्ठन को **समष्टिक गुणक** निकालना भी कहते हैं।

बहुपद. *इकपदों के संकल को बहुपद (बहुपदी व्यंजन) कहते हैं।* दो या अधिक बहुपदों का जोड़ और कुछ नहीं, एक नया बहुपद है, जिसमें प्रदत्त बहुपदों के सभी पद शामिल रहते हैं।

बहुपदों का घटाव और कुछ नहीं, अवकारी बहुपद के पदों का चिह्न विपरीत करके उसे अवकल्य बहुपद में जोड़ने की क्रिया है।

उदाहरण. $(4a\ +2b-2x^2y^2)-(12a^2-c)+(7b-2x^2y^2)$

$$=\underline{4a^2}+\underline{\underline{2b}}-\underline{\underline{\underline{2x^2y^2}}}-\underline{12a^2}+c+\underline{\underline{7b}}-\underline{\underline{\underline{2x^2y^2}}}$$

$$=-8a^2+9b-4x^2y^2+c.$$

(समरूप इकपदों के नीचे समान संख्या में पड़ी रेखाएं हैं)।

इकपदों का गुणा. व्यापक अर्थ में इकपदों का गुणा सिर्फ द्योतित किया जा सकता है (तुलना करें इकपदों के जोड़ के बारे में उक्ति से)। दो या अधिक इकपदों के गुणन को तभी सरल किया जा सकता है, जब उनमें समान वर्ण होते हैं (जिनके घातसूचक असमान हो सकते हैं) : गुणनफल में सभी गुणक इकपदों के सभी वर्ण शामिल रहते हैं; हर वर्ण का घातसूचक इकपदों के तदनुरूप घातों का योगफल होता है; सांख्यिक गुणकों को आपस में गुणा कर देते हैं।

उदाहरण. $5ax^2y^5(-3a^3x^4z)=-15a^4x^6y^5z$ [सांख्यिक गुणकों का गुणन $(5)\cdot(-3)=-15$ है, a के घात जोड़ने पर $1+3=4$, x के घात जोड़ने पर $2+4=6$, y के घात जोड़ने पर $5+0=5$, z के घात जोड़ने पर

$0+1=1$ मिलता है; $y^0=1$, $z^0=1$ की व्याख्या नीचे देखें, इकपदों के भाग में।]

इकपदों का भाग. इकपद में इकपद से भाग को भी सामान्यतः सिर्फ द्योतित कर सकते हैं। दो इकपदों का भागफल सरल तभी किया जा सकता है जब दोनों में एक ही प्रकार के कुछ वर्ण स्थित होते हैं (पर इन समान वर्णों के घातसूचक असमान हो सकते हैं) : सांख्यिक गुणक में सांख्यिक गुणक से भाग देते हैं; भाज्य मे स्थित वर्ण के घातसूचक में से भाजक का तदनुरूप घातसूचक घटा देते हैं।

उदाहरण . $12x^3y^4z^5 : 4x^2yz^2=\frac{12}{4}\cdot x^{3-1}\cdot y^{4-1}\cdot z^{5-2}=3xy^3z^3$.

टिप्पणी 1. यदि किसी वर्ण का घातसूचक भाज्य और भाजक में समान होता है, तो वह वर्ण गुणनफल में नहीं लिखा जाता (भाज्य और भाजक समान होने पर भागफल इकाई होता है)। इस वर्ण के घातसूचकों का अंतर शून्य होगा, अतः हमें यह मान लेना चाहिए कि *किसी भी संख्या का शून्य कोटि का घात 1 के बराबर होता है।*

उदाहरण. $4x^3y^3 : 2x^3y=2x^0y^2=2y^2$ $(x^0=1)$.

टिप्पणी 2. यदि किसी वर्ण का घातसूचक भाज्य में कम है और भाजक में अधिक है, तो भागफल में उसका घातसूचक ऋणात्मक होगा। ऋण घातसूचकों के बारे में सविस्तार देखें § 126। भागफल को व्यतिमान के रूप में लिखा जा सकता है, ताकि ऋण घातसूचक की आवश्यकता न रहे।

उदाहरण. $10x^2y^5 : 2x^6y^4=5x^{-4}y=\frac{5y}{x^4}\left(x^{-4}=\frac{1}{x^4}\right)$.

§ 72. योगफलों और बहुपदों का गुणा

दो या अधिक व्यंजनों के योगफल का किसी अन्य व्यंजन के साथ गुणनफल योज्य के रूप में प्रयुक्त व्यंजनों का इस व्यंजन के साथ अलग-अलग गुणनफलों का योगफल है। यथा,

$$(a+b+c)x=ax+bx+cx \text{ (कोष्ठक हटाना)}$$

वर्ण a, b, c की जगह कोई भी व्यंजन लिए जा सकते हैं, विशेषकर कोई भी इकपद। वर्ण x की जगह भी मनचाहा व्यंजन ले सकते हैं; यदि यह व्यंजन भी कई योज्य पदों का जोड़ है, जैसे $m+n$, तो : $(a+b+c)(m+n)=a(m+n)+b(m+n)+c(m+n)=am+an+bm+bn+cm+cn$, *अर्थात् जोड़ और जोड़ का गुणनफल एक जोड़ के हर योज्य पद का दूसरे जोड़ के हर योज्य पद के साथ अलग-अलग गुणनफलों का योगफल है।*

यह नियम विशेषकर बहुपद के साथ बहुपद के गुणा पर भी लागू होता है।

उदाहरण. $(3x^2-2x+5)(4x+2)=12x^3-8x^2+20x+6x^2-4x+10=12x^3-2x^2+16x+10.$

गुणा का आलेख :

$$\begin{array}{r} 3x^2-2x+5 \\ \times \quad 4x+2 \\ \hline 12x^3-8x^2+20x \quad\quad \\ +\quad 6x^2-4x+10 \\ \hline 12x^3-2x^2+16x+10. \end{array}$$

§ 73. बहुपदों के संक्षिप्त गुणा के लिए सूत्र

बहुपदों के गुणन की निम्न विशिष्ट स्थितियों से अक्सर वास्ता पड़ता रहता हैं, अतः उन्हें कंठस्थ कर लेना लाभप्रद रहेगा। नीचे के सूत्रों में a, b व्यंजन प्रयुक्त हुए हैं, व्यवहार में इनसे अधिक क्लिष्ट व्यंजन (जैसे इकपदी व्यंजन) मिल सकते हैं। वैसी स्थितियों में इन सूत्रों का प्रयोग सीखना विशेष महत्त्वपूर्ण है।

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. *दो राशियों के योग का वर्ग बराबर प्रथम का वर्ग प्लस पहली-दूसरी के गुणन का दुगुना प्लस दूसरी का वर्ग।*

उदाहरण 1. $104^2=(100+4)^2=10000+800+16=10816$

उदाहरण 2. $(2ma^2+0.1nb^2)^2=4m^2a^4+0.4mna^2b^2+0.01n^2b^4$.

सावधान : $(a+b)^2$ बराबर a^2+b^2 नहीं होता।

2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. *दो राशियों के अंतर का वर्ग बराबर प्रथम का वर्ग माइनस पहली-दूसरी के गुणन का दुगुना प्लस दूसरी का वर्ग।* इस सूत्र को पिछले का एक विशिष्ट रूप मान सकते हैं : b की जगह $(-b)$ ले सकते हैं।

उदाहरण 1. $98^2=(100-2)^2=10000-400+4=9604$.

उदाहरण 2. $(5x^3-2y^3)^2=25x^6-20x^3y^3+4y^6$.

सावधान : $(a-b)^2$ बराबर a^2-b^4 नहीं होता; दे. अगला सूत्र।

3. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. *दो राशियों के योग और अंतर का गुणन उनके वर्गों के अंतर के बराबर होता है।*

उदाहरण 1. $71\cdot69=(70+1)(70-1)=70^2-1=4899$.

उदाहरण 2. $(0.2a^2b+c^3)(0.2a^2b-c^3)=0.04a^4b^2-c^6$.

4. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. दो राशियों के योग का घन बराबर पहली का घन प्लस पहली के वर्ग से दूसरी के गुणन का तिगुना प्लस पहली से दूसरी के वर्ग के गुणन का तिगुना प्लस दूसरी का घन।

उदाहरण 1.

$12^3=(10+2)^3=10^3+3\cdot10^2\cdot2+3\cdot10\cdot2^2+2^3=1728.$

उदाहरण 2.

$(5ab^2+2a^3)^3=125a^3b^6+150a^5b^4+60a^7b^2+8a^9.$

सावधान. $(a+b)^3$ बराबर a^3+b^3 नहीं होता (दे. सूत्र 6)।

5. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$. दो राशियों के अंतर का घन बराबर पहली का घन माइनस पहली के वर्ग से दूसरी के गुणन का तिगुना प्लस पहली से दूसरी के वर्ग के गुणन का तिगुना माइनस तीसरी का वर्ग।

उदाहरण.

$99^3=(100-1)^3=1000000-3\cdot10000\cdot1+3\cdot100\cdot1-1$
$=970299.$

सावधान : $(a-b)^3$ बराबर a^3-b^3 नहीं होता (दे. सूत्र 7)।

6. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$. दो राशियों के योग के साथ उनके अंतर के अपूर्ण वर्ग का गुणन बराबर उनके घनों का योग।

7. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$. दो राशियों के अंतर के साथ उनके योग के अपूर्ण वर्ग का गुणन बराबर उनके घनों का अंतर।

§ 74. योगफलों और बहुपदों का भाग

दो या अधिक व्यंजनों के जोड़ में किसी अन्य व्यंजन से भाग इस व्यंजन से भाज्य के हर पद के अलग-अलग विभाजन के फलों का जोड़ है :

$$\frac{a+b+c}{x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x},$$

जहां a, b, c, x कोई भी व्यंजन हो सकते हैं; यदि ये इकपदी व्यंजन हैं, अर्थात् बहुपदी व्यंजन में इकपदी व्यंजन से भाग दिया जा रहा है, तो भागफल कभी-कभी सरल किया जा सकता है (दे. § 71)।

उदाहरण. $\frac{3a^2b+11ab^2}{ab}=\frac{3a^2b}{ab}+\frac{11ab^2}{ab}=3a+11b$

यदि a, b, c इकपद हैं और x कोई बहुपद है, अर्थात् बहुपद में बहुपद से भाग दिया जा रहा है, तो भागफल हमेशा बहुपद के रूप में नहीं प्रस्तुत किया जा

सकता (ठीक उसी तरह, जैसे पूर्ण संख्या में पूर्ण संख्या से भाग देने पर फल हमेशा पूर्ण संख्या नहीं होता)। अन्य शब्दों में, ऐसा बहुपद हमेशा नहीं मिलता, जिसमें भाजक बहुपद से गुणा करने पर भाज्य बहुपद प्राप्त हो।

उदाहरण. भागफल $\frac{b^2+x^2}{a+x}$ को बहुपद का रूप नहीं दिया जा सकता; भागफल $\frac{a^2-x^2}{a-x}$ को बहुपद का रूप दिया जा सकता है: $\frac{a^2-x^2}{a+x}=a-x$.

बहुपद में बहुपद से भाग व्यापक स्थिति में शेष के साथ ही संभव है (जैसा कि पूर्ण संख्याओं के विभाजन में होता है)। पर यह निर्धारित करना जरूरी है कि 'शेष के साथ बहुपद का विभाजन' है क्या। यदि हम किसी पूर्ण धन संख्या, जैसे 35 में पूर्ण धन संख्या, जैसे 4, से भाग देते हैं, तो 8 पूर्णांक और 3 शेष मिलता है। 8 और 3 का गुण यह है कि $4 \cdot 8+3=35$, अर्थात् यदि p भाज्य है, q भाजक है, m भागफल है और n शेष है, तो $mq+n=p$। पर भागफल और शेष की पूर्ण परिभाषा के लिए यह काफी नहीं है। यथा, हमारे उदाहरण में (जहां $p=35$, $q=4$), यही गुण संख्या $m=6$, $n=11$; $m=4$, $n=19$ भी रखते हैं। अतः यह वाक्य भी जोड़ना आवश्यक है कि संख्या n को संख्या q से कम *होना चाहिए*। पर इस बात को बहुपदों के भाग में बिल्कुल अक्षरशः लागू नहीं करना चाहिए, क्योंकि वर्णों का एक मान रखने पर एक ही व्यंजन दूसरे से बड़ा हो सकता है, और दूसरा मान रखने पर—छोटा हो सकता है। ऊपर जोड़े गये वाक्य में कुछ परिवर्तन लाना जरूरी है। हर बहुपद में कोई एक वर्ण प्रमुख माना जाता है, जो उसके हर पद में उपस्थित रहता है; *इस वर्ण के सबसे ऊंचे घात की कोटि को* **बहुपद की कोटि** *(या बहुपद की घातकोटि)* कहते हैं। अब शेष के साथ भाग की परिभाषा निम्न होगी :

बहुपद P में बहुपद Q से भाग देने का अर्थ है—बहुपद M (भागफल) और बहुपद N (शेष) ज्ञात करना, जो निम्न शर्तें पूरी करते हैं: (1) समता $MQ+N=P$ बनी रहनी चाहिए और (2) बहुपद N की कोटि बहुपद Q की कोटि से कम होनी चाहिए।

टिप्पणी. शेष N में प्रमुख वर्ण अनुपस्थित भी रह सकता है। इस स्थिति में कहते हैं कि *बहुपद N की कोटि शून्य है।*

इन शर्तों को पूरा करने वाले बहुपद M व N हमेशा ही ज्ञात किये जा सकते हैं और प्रमुख वर्ण के रूप में चुने गये वर्ण के सापेक्ष अनन्य होते हैं (एक से अधिक प्रकार के नहीं हो सकते)। यदि किसी दूसरे वर्ण को प्रमुख मान लिया

जाये तभी दूसरी तरह के M और N मिलेंगे। भागफल M और शेष N ज्ञात करने की क्रिया वैसी ही है, जैसी एक बहुअंकी संख्या में दूसरी बहुअंकी संख्या से भाग देकर भागफल और शेष ज्ञात करने की क्रिया है। इसमें उच्च श्रेणी के अंक की भूमिका वह पद निभाता है, जिसमें प्रमुख अंक की घातकोटि ऊंची होती है; निम्न श्रेणी की भूमिका वह पद निभाता है, जिसमें प्रमुख अंक की घात-कोटि निम्न होती है। भाग देते समय भाज्य और भाजक में पदों को ऐसे क्रम में लिखते हैं कि प्रमुख वर्ण की कोटि बायें से दायें की ओर घटती जाये।

भाग का आलेख.

$$\begin{array}{rl|l} - & 8a^3+16a^2-2a+4 & 4a^2-2a+1 \\ & 8a^3-4a^2+2a & \overline{\quad 2a+5} \\ \hline - & 20a^2-4a+4 & \\ & 20a^2-10a+5 & \\ \hline & 6a-1 & \end{array}$$

(1) भाज्य के प्रथम पद $8a^3$ में भाजक के प्रथम पद $4a^2$ से भाग देते हैं; फल $2a$ भागफल का प्रथम पद है।

(2) प्राप्त पद $(2a)$ से भाजक $4a^2-2a+1$ में गुणा करते हैं; गुणन-फल $8a^3-4a^2+2a$ को भाज्य के नीचे इस प्रकार लिखते हैं कि हर पद के नीचे उसका समरूप पद ही रहे।

(3) गुणनफल के पदों को भाज्य के तदनुरूप पदों में से घटाते हैं; भाज्य का अगला पद $(+4)$ उतारते हैं; $20a^2-4a+4$ मिलता है।

(4) इस शेष के प्रथम पद $20a^2$ में भाजक के प्रथम पद $4a^2$ से भाग देते हैं; फल 5 भागफल का दूसरा पद है।

(5) भागफल के दूसरे पद (5) से भाजक में गुणा करते हैं, गुणनफल $2a^2-1a+5$ को प्रथम शेष के नीचे लिखते हैं।

(6) गुणनफल का हर पद शेष के तदनुरूप पद में से घटाते हैं; दूसरा शेष $6a-1$ मिलता है। इसकी कोटि भाजक की कोटि से कम है। भाग पूरा हो चुका है; भागफल $2a+5$ है, शेप $6a-1$ है।

§ 75. बहुपद में प्रथम कोटि के द्विपद से भाग

यदि प्रमुख वर्ण x वाले किसी बहुपद में प्रथम कोटि के द्विपद $x-l$ से भाग दिया जाये, जहां l कोई संख्या है (धन या ऋण), तो शेष में सिर्फ शून्य कोटि

वाला बहुपद (दे. § 47) (अर्थात् कोई संख्या N) हो सकता है। संख्या N भागफल निकाले बिना भी ज्ञात की जा सकती है। वह भाज्य के उस मान के बराबर होती है, जो भाज्य में $x=l$ रखने पर मिलता है।

उदाहरण 1. बहुपद x^3-3x^2+5x-1 में $x-2$ से भाग देने पर कितना शेष बचेगा ?

हल. बहुपद में $x=2$ बैठाते हैं; $N=2^3-3\cdot 2^2+5\cdot 2-1=5$।

भाग देकर सचमुच में देखते हैं कि भागफल $M=x^2-x+3$ है और $N=5$ है।

उदाहरण 2. बहुपद x^4+7 बटा $x+2$ का शेष ज्ञात करें। यहां $l=-2$ है। x^4+7 में $x=-2$ रखने पर $N=(-2)^4+7=23$.

शेष के उपरोक्त गुण को बेजू का प्रमेय कहते हैं; इसे प्रथमतः फ्रांस के गणितज्ञ बेजू (Bezout; 1730-1783) ने निर्धारित किया था।

बेजू प्रमेय. *बहुपद*

$a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_m$ में $x-l$ से भाग देने पर शेष $N=a_0l^m+a_1l^{m-1}+a_2l^{m-2}+\ldots+a_m$ बचता है।

प्रमाण. भाग की परिभाषा (§ 74) के अनुसार

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m=(x-l)\ Q+N,$$

जहां Q कोई बहुपद है, N कोई संख्या है। इसमें $x=l$ रखने पर प्राप्त होगा :

$$a_0l^m+a_1l^{m-1}+\ldots+a_m=N.$$

टिप्पणी. यह भी संभव है कि $N=0$ हो। इस स्थिति में l समीकरण

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m=0 \qquad (1)$$

का मूल होगा।

उदाहरण 1. बहुपद x^3+5x^2-18 द्रुपद $x+3$ से बिला शेष विभाजित होता है (भागफल x^2+2x-6 मिलता है)। अतः समीकरण $x^3+5x^2-18=0$ का मूल -3 है। सचमुच ही, $(-3)^3+5(-3)^2-18=0$।

विलोम. यदि l समीकरण (1) का मूल है, तो समीकरण का वाम भाग दुपद $(x-l)$ से बिला शेष विभाजित होता है।

उदाहरण. संख्या 2 समीकरण $x^3-3x-2=0$ का मूल है $(2^3-3\cdot 2-2=0)$। अतः बहुपद x^3-3x-2 दुपद $x-2$ से बिला शेष विभाजित होता है। वस्तुतः,

$$(x^3-3x-2):(x-2)=x^2+2x+1.$$

§ 76. $x \mp a$ से दुपद $x^m \mp a^m$ की विभाज्यता

1. दो संख्याओं के समान घातों का अंतर इन संख्याओं के अंतर से (बिला शेष) विभाजित होता है; अर्थात् $x^m - a^m$ बिला शेष $x-a$ से विभाजित होता है। यह (और साथ ही अगला) लक्षण बेज़ू-प्रमेय (§ 75) का निष्कर्ष है।

भागफल में m पद होते हैं और उसका रूप निम्न है :

$$(x^m - a^m) : (x-a) = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1}.$$

(x के घात-सूचक क्रमशः इकाई द्वारा कम होते जाते हैं, जबकि a के घात-सूचक कमशः इकाई द्वारा बढ़ते जाते हैं, जिससे हर पद में घातसूचकों का योग $m-1$ स्थिर बना रहता है; सभी संद $+1$ के बराबर हैं।)

उदाहरण.

$(x^2 - a^2) : (x-a) = x+a;$
$(x^3 - a^3) : (x-a) = x^2 + ax + a^2;$
$(x^4 - a^4) : (x-a) = x^3 + ax^2 + a^2x + a^3;$
$(x^5 - a^5) : (x-a) = x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4.$

2. दो संख्याओं के समान *सम* कोटि वाले घातों का अंतर उनके अंतर से ही नहीं (दे. ऊपर 1.), बल्कि उनके योगफल से भी विभाजित होता है, अर्थात् m के सम संख्या होने पर $x^m - a^m$ में बिला शेष $x-a$ से भी भाग दिया जा सकता है और $x+a$ से भी। $x+a$ से भाग देने पर फल निम्न होता है : $x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-2} - \ldots$(अर्थात् धन और ऋण चिह्न बारी-बारी से आते रहते हैं)।

उदाहरण.

$(x^2 - a^2) : (x+a) = x-a;$
$(x^4 - a^4) : (x+a) = x^3 - ax^2 + a^2x - a^3;$
$(x^6 - a^6) : (x+a) = x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5.$

टिप्पणी. चूंकि समान सम कोटि वाले घातों का अंतर उनके अंतर $(x-a)$ से भी विभाजित होता है और योगफल $(x+a)$ से भी, इसलिए वह $x^2 - a^2$ से भी विभाज्य है।

उदाहरण

$(x^4 - a^4) : (x^2 - a^2) = x^2 + a^2;$
$(x^6 - a^6) : (x^2 - a^2) = x^4 + a^2x^2 + a^4;$
$(x^8 - a^8) : (x^2 - a^2) = x^6 + a^2x^4 + a^4x^2 + a^6.$

भागफल लिखने का नियम स्पष्ट है; उसे आसानी से 1. के नियम जैसा बना लिया जा सकता है, जैसे

$$(x^8-a^8):(x^2-a^2)=[(x^2)^4-(a^2)^4]:(x^2-a^2)$$
$$=(x^2)^3+a^2(x^2)^2+(a^2)^2x^2+(a^2)^3.$$

2a. दो संख्याओं के समान विषम कोटि वाले घातों का अंतर संख्याओं के योगफल से विभाजित नहीं होता।

उदाहरणार्थ, x^3-a^3, x^5-a^5 आदि $x+a$ से अविभाज्य हैं।

3. दो संख्याओं के समान कोटि वाले घातों का योगफल संख्याओं के अंतर से कभी भी विभाजित नहीं होता।

उदाहरणार्थ, x^2+a^2, x^3+a^3, x^4+a^4, आदि $x-a$ से अविभाज्य हैं।

4. दो संख्याओं के समान *विषम* कोटि वाले घातों का योगफल संख्याओं के योगफल से विभाज्य है (भागफल में धन व ऋण चिह्न बारी-बारी से आते हैं)।

उदाहरण :

$(x^3+a^3):(x+a)=x^2-ax+a^2;$

$(x^5+a^5):(x+a)=x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4.$

4a. दो संख्याओं के समान *सम* कोटि वाले घातों के योगफल न तो संख्याओं के अंतर से विभाजित होते हैं (दे. 3), न उनके योगफल से। उदाहरणार्थ, x^2+a^2 न तो $x-a$ से कटता है, न $x+a$ से।

§ 77. बहुपद का गुणनखंड

बहुपद को कभी-कभी दो या अधिक बहुपदों के गुणनखंड के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है। यह हमेशा संभव नहीं होता, पर जब संभव होता भी है, तो आवश्यक गुणनखंड ज्ञात करना सरल नहीं होता। गुणनखंड ज्ञात करने से व्यावहारिक लाभ यह है कि इससे व्यंजनों को अक्सर सरल रूप दिया जा सकता है, विशेषकर जब भिन्न के संख्यानाम और अंशनाम में समान गुणक निकालने में सफलता मिल जाती है (उदाहरण दे. पिछले अनुच्छेद में)। नीचे चंद सरलतर स्थितियां दी गयी हैं, जिनमें गुणनखंड निकालना संभव होता है।

1. यदि बहुपद के सभी पदों में कोई समान व्यंजन हो, तो उसे कोष्ठक के बाहर कर सकते हैं (दे. § 71 बहुपदों का जोड़)।

उदाहरण 1. $7a^2xy-14a^5x^3=7a^2x(y-2a^3x^2)$.

उदाहरण 2. $6x^2y^3-24xy^2+4u^2xy=2xy\ (3xy^2-uy+2u^2)$

2. कभी-कभी ऐसा भी होता है : पदों को कुछेक ग्रुपों में बाँट लेने पर हर ग्रुप में से कोई व्यंजन कोष्ठक से बाहर निकालने की संभावना बन जाती है; उन्हें कोष्ठक से बाहर कर देने पर हर ग्रुप के कोष्ठक में समान व्यंजन मिल जाते हैं; फिर इन कोष्ठकों को भी बाहर निकाल लिया जा सकता है।

उदाहरण 1. $ax+by+bx+ay=ax+bx+ay+by$
$=x(a+b)+y(a+b)=(a+b)\ (x+y).$

उदाहरण 2. $\underline{10a^3}-\underline{\underline{6b^3}}+\underline{\underline{4ab^2}}-\underline{15a^2b}$

$=5a^2\ (2a-3b)+2b^2\ (2a-3b)$
$=(2a-3b)\ (5a^2+2b^2).$

टिप्पणी. यह ध्यान में रखना लाभप्रद होता है कि व्यंजन $(a-b)$ को आवश्यकता पड़ने पर $-(b-a)$ के रूप में भी लिख सकते हैं, अत: असमान नजर आने वाले व्यंजनों को भी समान रूप दिया जा सकता है।

उदाहरण 3. $6ax-2bx+9by-27ay=2x(3a-b)+9y(b-3a)=2x(3a-b)-9y(3a-b)=(3a-b)(2x-9y).$

3. ऊपर 2. में समझाया गया रूपांतरण संपन्न करने के लिए कभी-कभी एक-दूसरे को रद्द कर देने वाले नये पद जोड़ने पड़ते हैं, या किसी एक पद को दो योज्य पदों में प्रस्तुत करना पड़ता है।

उदाहरण 1. $a^2-x^2=a^2\underline{+ax}-\underline{ax}-x^2$
$=a(a+x)-x(a+x)=(a+x)\ (a-x).$

दे. सूत्र 3, § 73।

उदाहरण 2. $p^2\underline{+pq}-2q^2=p^2\underline{+2pq-pq}-2q^2=p(p+2q)-q\ (p+2q)=(p+2q)\ (p-q).$

[अधिक व्यापक रूप में बहुपद ax^2-bx+c का गुणनखंड निकालने के लिए bx को दो पदों के योगफल $mx+nx$ के रूप में व्यक्त करते हैं। m व n का मान ज्ञात करने के लिए ac के गुणनखंडों का परीक्षण करते हैं; ac को दो ऐसे गुणनखंडों m व n में व्यक्त करते हैं कि $m+n=b$.

उदाहरण. $6x^2-7x-20$. हल का क्रम:

(1) $ac=6(-20)=-120$
$=-4\cdot30=-12\cdot10=-8\cdot15$ आदि.

(2) परीक्षण से $8-15=-7=b$

(3) अत: $6x^2-7x-20=6x^2+8x-15x-20$

$=2x\ (3x+4)-5\ (3x+4)=(3x+4)\ (2x-5).$

टिप्पणी. इस विधि का सैद्धांतिक आधार वियेटा का प्रमेय है (दे. § 95); व्यवहार में यह विधि तभी सफल और सरल होती है, जब m व n के परम मान पूर्ण संख्याओं में होते हैं, अन्यथा निराशा ही हाथ लगती है। विचाराधीन रूप वाले बहुपद का गुणनखंड निकालने की सबसे व्यापक विधि देखें § 96 में।]

4. कभी-कभी संक्षिप्त गुणन के सूत्रों को उलट कर प्रयुक्त करने से उपरोक्त विधि की आवश्यकता नहीं रह जाती (सूत्र दे. § 73 में) : $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$; $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$; $a^2-b^2=(a+b)\ (a-b)$, आदि।

उदाहरण 1. $4x^2+20xy+25y^2$. प्रथम सूत्र का उपयोग करने पर (यहां $a=2x$; $b=5y$),

$4x^2+20xy+25y^2=(2x+5y)^2$.

5. यदि बहुपद की कोटि 2 से अधिक है, तो बेजू-प्रमेय के निष्कर्ष का उपयोग किया जा सकता है (दे. § 75) :

यदि बहुपद $a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m$ में x का मान l रखने पर बहुपद का मान शून्य हो जाता है, तो बहुपद में $x-l$ से भाग देने पर शेष शून्य के बराबर होगा। अतः बहुपद को इस भाग के फल और $x-l$ के गुणन के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है। पर l ढूंढ़ना एक कठिन काम है; इसे ढूंढ़ने का मतलब है बहुकोटिक समीकरण का मूल ज्ञात करना। x की जगह ± 1, ± 2 आदि संख्याएं रख कर परीक्षण किया जाता है; यदि बहुपद का मान कुछेक पूर्ण संख्याओं में से किसी के द्वारा भी शून्य में परिणत नहीं होता, तो अक्सर छोड़ देते हैं; यह समस्या समीकरण सिद्धांत की है।

उदाहरण. बहुपद $P=2x^4+3x^2+4x-1$ में $x=-1$ रखने पर $P=0$। अत: P में $x+1$ से भाग देने पर शेष शून्य होगा। भाग देकर (§ 74) $P:\ (x+1)=2x^3-2x^2+5x-1=Q$ प्राप्त करते हैं, अत: $P=Q.(x+l)$।]

बहुपद का अधिक से अधिक संभव गुणनखंड ज्ञात करना उपरोक्त विधियों को आवश्यक क्रम में मिला कर उपयोग करने की क्षमता पर निर्भर करता है, जो अनुभव से ही आती है।

उदाहरण.

$$12+x^3-4x-3x^2$$
$$=12-3x^2+x^3-4x$$
$$=3\,(4-x^2)-x\,(4-x^2)$$
$$=(4-x^2)\,(3-x)$$
$$=(2+x)\,(2-x)\,(3-x).$$

§ 78. बीजगणितीय भिन्न

बीजगणितीय भिन्न किसी भी ऐसे व्यंजन को कहते हैं, जिसका रूप $\frac{A}{B}$ होता है; इसमें A व B कोई भी वर्णिक या सांख्यिक व्यंजन हो सकते हैं; पड़ी रेखा (बटा) भाग का चिह्न है । A को **संख्यानाम** कहते हैं और B को **अंशनाम** । अंकगणित में जिन भिन्नों पर विचार किया गया था, वे बीजगणितीय भिन्न के ही विशेष रूप हैं (संख्यानाम और अंशनाम की जगह सिर्फ पूर्ण धन संख्याएँ होती हैं) । बीजगणितीय भिन्नों के साथ संक्रियाएं उन्हीं नियमों के अनुसार संपन्न की जाती हैं, जिनसे अंकगणितीय भिन्नों के साथ संक्रियाएं संपन्न होती हैं (दे. §§ 31-37) । इसीलिए हम यहां पर सिर्फ कुछ सामान्य उदाहरण भर दे रहे हैं ।

भिन्न का कर्तन

उदाहरण 1. भिन्न $\frac{15a^2x^4}{21a^5x^3}$ को $3a^2x^3$ से काटते हैं : $\frac{15a^2x^4}{21a^5x^3}=\frac{5x}{7a^2}$

उदाहरण 2. $\frac{2a^2-ab-3b^2}{2a^2-5ab+3b^2}$ को $2a-3b$ से काटते हैं । इसके लिए संख्यानाम और अंशनाम का गुणनखंड ज्ञात करते हैं (दे. § 77 में 3.) :

$$\frac{2a^2-ab-3b^2}{2a^2-5ab+3b^2}=\frac{(2a-3b)(a+b)}{(2a-3b)(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}$$

भिन्नों का जोड़ व घटाव

उदाहरण 1. योगफल $\frac{m}{a^2b}+\frac{n}{ab^2}$ ज्ञात करने के लिए समष्टिक संख्या-नाम a^2b^2 लेते हैं, जिससे प्रथम योज्य का अतिरिक्त गुणक b होगा और द्वितीय का a :

$$\frac{m}{a^2b}+\frac{n}{ab^2}=\frac{mb+na}{a^2b^2}.$$

उदाहरण 2. $$\frac{a-b}{2a^2-ab-3b^2}-\frac{a+b}{2a^2-5ab+3b^2}$$
$$=\frac{a-b}{(2a-3b)(a+b)}-\frac{a+b}{(2a-3b)(a-b)}$$
$$=\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(2a-3b)(a+b)(a-b)}=\frac{-4ab}{(2a-3b)(a^2-b^2)}$$

टिप्पणी. भिन्नों के बहुपदी अंशनामों में हमेशा समष्टिक गुणक मौजूद हों, यह तभी होता है, जब इस तरह के उदाहरण चुने जायें। व्यवहार में यह स्थिति विरले ही मिलती है। यदि इस तरह के समष्टिक गुणक होते भी हैं, तो उन्हें ढूंढ़ना सरल नहीं होता। पर अभ्यास के लिए इन्हें ढूंढ़ना काफी लाभप्रद है और इसीलिए पाठ्यपुस्तकों में इस प्रश्न पर इतना ध्यान दिया जाता है। लेकिन इससे व्यावहारिक लाभ बहुत ही कम है। अधिकतर स्थितियों में अच्छा यही होता है कि समष्टिक अंशनाम ढूंढ़ने में समय नष्ट करने के बजाय समष्टिक अंशनाम के रूप में अंशनामों का गुणन ले लिया जाये।

भिन्नों का गुणा-भाग

उदाहरण 1. $\frac{4a^2b}{3c^2d}\cdot\frac{2c^3d^2}{3b^2}=\frac{8acd}{3b^2}$. कर्तन (काटने की क्रिया) संख्या-नामों व अंशनामों के गुणन (अलग-अलग गुणन) के पहले भी संपन्न कर सकते हैं और उसके बाद में भी।

उदाहरण 2. $$\frac{x^2-a^2}{x^2-bx+cx-bc}:\frac{x^2-ax-cx+ac}{x^2-b^2}$$

$$=\frac{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}{(x-b)(x+c)(x-a)(x-c)}$$

$$=\frac{(x+a)(x+b)}{(x+c)(x-c)}=\frac{(x+a)(x+b)}{x^2-c^2}.$$

§ 79. अनुपात

व्यतिमान और अनुपात की परिभाषाएं देखें § 63 में। अनुपात $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ से निष्कर्ष निकलता है : $ad=bc$ (मध्य पदों का गुणन बराबर अंत्य पदों का गुणन); इसके विपरीत, $ad=bc$ से निष्कर्ष स्वरूप निम्न अनुपात मिलते हैं :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d},$$

$$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}, \text{ आदि ।}$$

ये सभी अनुपात आरंभिक अनुपात $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ से निम्न नियमों की सहायता से मिल सकते हैं।

1. अनुपात $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ में अंत्य पद अपनी जगहों की अदला-बदली कर सकते हैं, इसी तरह से मध्य पद भी, या दोनों ही :

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d};\quad \frac{b}{d}=\frac{c}{a};\quad \frac{d}{c}=\frac{b}{a}.$$

2. अनुपात के दोनों व्यतिमानों को उलट सकते हैं। $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ से $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ मिलता है। यह अनुपात ऊपर भी मिल चुका है $\left(\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\text{ के रूप में}\right)$ । ऊपर प्राप्त तीन नये अनुपातों में भी दोनों व्यतिमानों को उलटने से कुछ भी नया नहीं मिलेगा।

व्युत्पन्न अनुपात. यदि $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, तो इससे प्राप्त निम्न अनुपात (तथाकथित *व्युत्पन्न अनुपात*) भी सत्य होंगे :

$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c};\quad \frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c};\quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d};$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d};\quad \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d};\quad \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d};$$

$$\frac{b}{a+b}=\frac{d}{c+d};\quad \frac{b}{a-b}=\frac{d}{c-d};\quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d};$$

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\quad \frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d};$$

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{c}=\frac{b}{d};\quad \frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

ये और इन जैसे अनेक अन्य सारे व्युत्पन्न अनुपात दो प्रमुख सूत्रों में बांधे जा सकते हैं :

$$\frac{ma+nb}{m_1a+n_1b}=\frac{mc+nd}{m_1c+n_1d}, \qquad (1)$$

$$\frac{ma+nc}{m_1a+n_1c}=\frac{mb+nd}{m_1b+n_1d} \qquad (2)$$

जहां m, n, m_1, n_1 कोई भी संख्याएं हैं।*

यथा, $m=n=m_1=1, n_1=0$ मानने पर सूत्र (1) से व्युत्पन्न अनुपात $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$ प्राप्त कर सकते हैं; और सूत्र(2) से अनुपात $\frac{a+c}{a}=\frac{b+d}{b}$ या, यदि मध्य पदों के स्थानों की अदला-बदली की जाये, $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$ आदि।

§ 80. समीकरण किसलिए

गणितीय प्रश्न प्रत्यक्ष भी हो सकते हैं, और परोक्ष भी।

---

* सूत्र (2) उन्हीं नियमों से प्राप्त होता है, जिनसे सूत्र (1), यदि दिये हुए अनुपात में मध्य पदों के स्थानों की अदला-बदली कर दी जाये।

प्रत्यक्ष प्रश्न का एक उदाहरण : मिश्र धातु के टुकड़े का वजन क्या होगा, यदि उसे बनाने में 0.6 dm^3 तांबा (विशिष्ट भार 8.9 kg / dm^3) और 0.4 dm^3 जस्ता (विशिष्ट भार 7.0 kg / dm^3) खर्च हुआ है ? हल के लिए हम खर्च किये गये तांबे का भार ($8.9 \cdot 0.6 = 5.34$ kg) ज्ञात करते हैं, फिर जस्ते का भार ($7.0 \cdot 0.4 = 2.8$ kg) ज्ञात करते हैं; अंत में, इष्ट वजन $= 5.34 + 2.8 = 8.14$ kg। संपन्न की गयी संक्रियाएं और उनका क्रम स्वयं प्रश्न की शर्तों द्वारा निर्धारित होते हैं।

परोक्ष प्रश्न का एक उदाहरण : तांबे और जस्ते से बने मिश्र धातु के एक टुकड़े के 1 dm^3 आयतन का भार 8.14 kg है। मिश्र धातु के टुकड़े में मिले तांबे और जस्ते की आयतनी मात्राएं बतायें। यहां प्रश्न की शर्त्तों से यह स्पष्ट नहीं होता कि कौन-सी संक्रियाओं से उत्तर मिलेगा। तथाकथित अंकगणितीय विधि में परोक्ष प्रश्न के हल का एक आरेख बनाने के लिए भी बड़ी पटुता की आवश्यकता हो सकती है। हर नये प्रश्न के लिए एक नया आरेख रचना पड़ता है। हलकर्ता का श्रम युक्तिसंगत रूप से नहीं खर्च होता। कलन-प्रक्रिया को युक्तिसंगत रूप देने के लिए ही समीकरणों की विधि को जन्म दिया गया है, जो बीजगणित की मुख्य विषय-वस्तु है (दे. § 66)। इस विधि का सार निम्न है।

(1) इष्ट राशियों का विशेष द्योतन होता है। इसके लिए हम वर्ण-प्रतीकों का उपयोग करते हैं (अक्सर लातीनी वर्णमाला के अंतिम वर्णों—x, y, z, u, v आदि का)। प्रश्न की शर्त्तों को इन प्रतीकों और संक्रिया-चिह्नों ($+, -$ आदि) की सहायता से व्यक्त करते हैं (अर्थात् उनका अनुवाद गणित की भाषा में करते हैं)। अन्य शब्दों में, प्रत्त (=प्रदत्त) और इष्ट राशियों के बीच का संबंध बोल-चाल की भाषा के शब्दों व वाक्यों द्वारा नहीं, गणितीय संकेतों द्वारा व्यक्त करते हैं। इस तरह का कोई "गणितीय वाक्य" ही समीकरण कहलाता है।

(2) इसके बाद हम समीकरण हल करते हैं, अर्थात् इष्ट अज्ञात राशियों के मान ज्ञात करते हैं। समीकरण को उसके व्यापक नियमों के अनुसार बिल्कुल यंत्रवत हल किया जाता है। हमें हर बार विचाराधीन प्रश्न की विशेषताओं को ध्यान में रखने की आवश्यकता नहीं पड़ती; हम सिर्फ निर्धारित नियमों और युक्तियों का अनुसरण करते जाते हैं (इन नियमों का निर्धारण ही बीजगणित के प्राथमिक लक्ष्यों में से एक हैं)।

इस प्रकार, समीकरणों की आवश्यकता यह है कि उनकी सहायता से कलन-कर्त्ता के श्रम का यंत्रीकरण किया जा सके। समीकरण बना लेने के बाद हल को बिल्कुल स्वचालित ढंग से प्राप्त किया जा सकता है (इसके लिए अब कई प्रकार

की स्वचालित मशीनें भी बन चुकी हैं)। प्रश्न हल करने की सारी कठिनाई समीकरण बनाने में है।

§ 81. समीकरण गढ़ना

समीकरण गढ़ने का अर्थ है—प्रत्त (ज्ञात) व इष्ट (अज्ञात) राशियों के पारस्परिक संबंध को गणितीय रूप में व्यक्त करना। कभी-कभी यह संबंध प्रश्न में इतने स्पष्ट रूप से व्यक्त रहता है कि उसके शब्दों की जगह तदनुरूप चिह्न, संकेत, आदि रखते जाने से ही समीकरण प्राप्त हो जाता है।

उदाहरण 1. इवानोव को काम के लिए जितनी राशि मिली, पेत्रोव को उसकी आधी से 16 रूबल अधिक मिली। दोनों को कुल मिलाकर 112 रूबल मिले। प्रत्येक को अलग-अलग कितने रूबल मिले हैं?

इवानोव की राशि को रूबलों में x से द्योतित करते हैं; इसका आधा हुआ $\frac{1}{2}x$; इसमें 16 जोड़ने पर पेत्रोव की राशि $\frac{1}{2}x+16$ होती है; दोनों ने मिल कर 112 रूबल प्राप्त किये हैं; इस अंतिम वाक्य का गणितीय आलेख निम्न होगा :

$$\left(\tfrac{1}{2}x+16\right)+x=112.$$

समीकरण तैयार है। इसे हमेशा के लिए निर्धारित किये गये नियमों (§ 85) से हल करने पर ज्ञात होता है कि इवानोव को $x=64$ रूबल मिले थे, अतः पेत्रोव का पारिश्रमिक $\frac{1}{2}\cdot x+16=48$ रूबल हुआ।

पर अक्सर ऐसा होता है कि प्रत और इष्ट राशियों का आपसी संबंध प्रश्न में प्रत्यक्ष रूप से निर्दिष्ट नहीं रहता; उसे प्रश्न की शर्त्तों के आधार पर निर्धारित करना पड़ता है। व्यावहारिक प्रश्नों में करीब-करीब हमेशा यही होता है। ऊपर का उदाहरण मनगढ़ंत है; जीवन में इस तरह के प्रश्न शायद ही कभी मिलते हैं।

इसीलिए समीकरण गढ़ने की क्रिया को पूर्णतया नियमबद्ध करना कठिन है। पर शुरू-शुरू में निम्न विधि का अनुसरण करना लाभप्रद होगा। इष्ट राशि (या राशियों के मान के रूप में कोई भी संख्या अंदाज से चुन लीजिए और इसके बाद परीक्षण कीजिए कि आपका अंदाज सही निकला या नहीं। यदि आपको परीक्षण में सफलता मिल जाती है और आपको पता चल जाता है कि आपका अंदाज सही था, या यह कि आपका अंदाज गलत था (इसकी उम्मीद बेशक ज्यादा है), तो आप फौरन आवश्यक समीकरण (एक या अधिक) गढ़ ले सकते हैं। आपको इतना ही करना होगा कि आप उन सारी संक्रियाओं को उसी

क्रम में लिख लेंगे, जिसमें उनका उपयोग आपने परीक्षण के लिए किया था; सिर्फ अंदाज से चुनी गयी संख्या की जगह अज्ञात राशि के लिए वर्ण-संकेत को काम में लायेंगे। आवश्यक समीकरण मिल जायेगा।

उदाहरण 2. तांबे और जस्ते से बने मिश्र धातु के 1 dm^3 का भार 8.14 **kg** है। मिश्र धातु में कितना आयतन तांबा है (तांबे का विशिष्ट भार 8.9 kg / dm^3 है और जस्ते का 7.0 **kg** / dm^3) ?

तांबे के इष्ट आयतन की जगह अंदाजी टक्कर कोई संख्या (उदाहरण के लिए 0.3 dm^3) लेते हैं। अब देखते हैं कि अंदाज सही है या नहीं। चूंकि 1 dm^3 तांबे का भार 8.9 **kg** है, इसलिए 0.3 dm^3 तांबे का भार $8.9 \cdot 0.3 = 2.67$ **kg** होगा। मिश्र धातु के विचाराधीन टुकड़े में जस्ते का आयतन $1 - 0.3 = 0.7$ dm^3 है। इसका भार होगा $7.0 \cdot 0.7 = 4.9$ **kg**। जस्ते और तांबे का कुल भार हुआ $2.67 + 4.9 = 7.57$ **kg**।

लेकिन शर्त्त के अनुसार दोनों का कुल भार 8.14 **kg** होना चाहिए। हमारा अंदाज गलत निकला। पर अब हम शीघ्र ही वह समीकरण बना लेंगे, जिसकी सहायता से सही उत्तर ज्ञात हो सकेगा।

तांबे के इष्ट आयतन को (dm^3 में) x द्वारा द्योतित करते हैं। पिछले संक्रिया-क्रम में हर जगह 0.3 dm^3 की जगह x रखें। तब गुणन $8.9 \cdot 0.3 = 2.67$ की जगह गुणन $8.9\,x$ लेंगे। यह मिश्र धातु में तांबे का भार है। $1 - 0.3 = 0.7$ की जगह $1 - x$ लेंगे; यह जस्ते का आयतन है। $7.0 \cdot 0.7 = 4.9$ की जगह $7.0\,(1 - x)$ लेंगे; यह जस्ते का भार है। $2.67 + 4.9$ की जगह $8.9x + 7.0\,(1 - x)$ लेंगे; यह जस्ते और तांबे का मिला-जुला भार है। शर्त्त के अनुसार इसे 8.14 **kg** के बराबर होना चाहिए; अतः $8.9x + 7.0\,(1 - x) = 8.14$ समीकरण मिलता है। इस समीकरण के हल से (दे. § 81) $x = 0.6$। उत्तर का परीक्षण विभिन्न विधियों से किया जा सकता है, हर विधि के अनुरूप समीकरण भी अलग-अलग रूप में मिलेगा; पर इन सभी से इष्ट राशि का मान एक ही जैसा मिलेगा; ऐसे समीकरणों को **समतुल्य समीकरण** कहते हैं (दे. § 82)।

जाहिर है कि समीकरण गढ़ने का अच्छा अभ्यास हो जाने पर काल्पनिक चुनी गयी संख्या के परीक्षण की जरूरत नहीं रह जाती; इष्ट राशि की जगह कोई संख्या नहीं लेकर कोई वर्ण ले सकते हैं (जैसे x, y आदि), और उसके साथ हम वे सारी संक्रियाएं संपन्न कर सकते हैं, जो किसी संख्या के परीक्षण के लिए करते।

§ 82. समीकरणों के बारे में सामान्य सूचनाएं

समता-चिह्न (=) से जुड़े हुए दो व्यंजन मिलकर एक **समिका** बनाते हैं। दोनों व्यंजन वर्णिक या सांख्यिक हो सकते हैं; समिका भी वर्णिक या सांख्यिक हो सकती है।

कोई भी सही सांख्यिक समिका, या कोई भी ऐसी वर्णिक समिका, जो उसमें उपस्थित वर्णों के किसी भी सांख्यिक मान के लिए सत्य हो, **समात्मिका** कहलाती है।

उदाहरण. (1) सांख्यिक समिका $5 \cdot 3+1=20-4$ समात्मिका है। (2) वर्णिक समिका $(a-b)\ (a+b)=a^2-b^2$ भी एक समात्मिका है, क्योंकि a व b की जगह कोई भी सांख्यिक मान क्यों न रखे जायें, बायें हिस्से से प्राप्त संख्या दायें हिस्से से प्राप्त संख्या के बराबर होगी।

ऐसी समिका, जो *समात्मिका नहीं* है और उसमें अज्ञात वर्णिक राशियां मौजूद हैं, **समीकरण** कहलाती है।* समीकरण में जब सारी या कुछेक *ज्ञात राशियां* वर्णों द्वारा द्योतित रहती हैं, तो उसे **वर्णिक समीकरण** कहते हैं, अन्यथा उसे **सांख्यिक समीकरण** कहते हैं।

समीकरण में कौन से वर्ण ज्ञात राशियों को द्योतित करते हैं और कौन से वर्ण अज्ञात राशियों को, यह अलग से निर्दिष्ट होना चाहिए। इसके लिए अज्ञात राशियों को अक्सर लातीनी वर्णमाला के अंतिम वर्णों x, y, z, u, v, w से द्योतित करते हैं। अज्ञात राशियों की संख्या के अनुसार दो, तीन, चार, आदि अज्ञात राशियों वाले समीकरण होते हैं।

---

* यह परिभाषा अर्वाचीन पाठ्यपुस्तकों में गृहीत परिभाषा से सिर्फ रूप में ही भिन्न है। मेरे विचार में इससे लाभ यह है कि इससे सांख्यिक व वर्णिक समीकरणों के हलों में जो अंतर है, वह तुरन्त स्पष्ट हो जाता है, और यह वैज्ञानिक और शैक्षणिक दोनों ही दृष्टिकोणों से महत्त्वपूर्ण है।

पर मुझे लगता है कि समीकरण की अधिक सरल परिभाषा—"समिका, जिसमें अज्ञात राशियां हैं"—अधिक उपयोगी है; इसमें वे स्थितियां भी शामिल हो जाती हैं, जब समिका समात्मिका होती है। हम पहले से जान तो सकते नहीं कि दी हुई समिका समीकरण है या समात्मिका है। यह जानने के लिए उन्हीं विधियों का प्रयोग करना पड़ता है, जो समीकरण हल करने में प्रयुक्त होती हैं। इसलिए वर्णिक समात्मिका को वर्णिक समीकरण की एक विशेष स्थिति मानना स्वाभाविक होगा। पहले ऐसा ही करते थे; समात्मिक समीकरण जैसा पारिभाषिक शब्द यही दर्शाता है।

सांख्यिक समीकरण को हल करने का मतलब है उसमें स्थित सभी अज्ञात राशियों के उन सभी सांख्यिक मानों को ज्ञात करना, जो विचाराधीन समीकरण को समात्मिका में परिणत कर देते हैं। इन मानों को **समीकरण का मूल** कहते हैं।

वर्णिक समीकरण को हल करने का मतलब है उसमें स्थित अज्ञात राशियों के लिए ऐसे व्यंजन ढूंढ़ना, जो ज्ञात राशियों के वर्णिक द्योतनों में व्यक्त हों और जिन्हें समीकरण में तदनुरूप अज्ञात राशियों की जगह पर रखने से समीकरण समात्मिका में परिणत हो जाता है। ये व्यंजन **समीकरण का मूल** कहलाते हैं।

उदाहरण 1. $\frac{2}{3+x}=\frac{1}{2}x$ एक अज्ञात राशि वाला सांख्यिक समीकरण है। $x=1$ होने पर $\frac{2}{3+x}$ और $\frac{1}{2}x$ समात्मिका बनाते हैं, अर्थात् दोनों एक ही संख्या $(\frac{1}{2})$ देते हैं, अत: $x=1$ विचाराधीन समीकरण का मूल है।

उदाहरण 2. $ax+b=cx+d$—एक अज्ञात राशि वाला वर्णिक समीकरण है; $x=\frac{d-b}{a-c}$ होने पर वह समात्मिका में परिणत हो जाता है, क्योंकि a, b, c, d का मान कुछ भी हो, व्यंजन $a\frac{d-b}{a-c}+b$ और $c\frac{d-b}{a-c}+d$ परस्पर बराबर संख्याएं देंगे (यदि इन व्यंजनों का थोड़ा रूपांतरण किया जाये, तो दोनों को $\frac{ad-bc}{a-c}$ के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है)। निष्कर्ष : मान $x=\frac{d-b}{a-c}$ समीकरण का मूल है।

उदाहरण 3. $3x+4y=11$ —दो अज्ञात राशियों वाला सांख्यिक समीकरण है। $x=1$, $y=2$ होने पर वह समात्मिका $3\cdot1+4\cdot2=11$ में परिणत हो जाता है। मान $x=1$, $y=2$ समीकरण के मूल हैं। मान $x=2$, $y=1\frac{1}{4}$ भी समीकरण के मूल हैं। इस *समीकरण के असंख्य मूल हैं, फिर भी यह समात्मिका नहीं है*, क्योंकि $x=2$, $y=3$ होने पर बायां और दायां हिस्से समान नहीं रहेंगे [अर्थात् x और y के ऐसे भी मान लिये जा सकते हैं, जो समीकरण को समात्मिका में परिणत नहीं करते।]

उदाहरण 4. $2x+3=2(x+1)$ एक अज्ञात राशि वाला सांख्यिक समीकरण है। x का कोई भी मान क्यों न लें, वह समात्मिका में परिणत नहीं होता (उसके दायें भाग को $2x+2$ के रूप में लिख सकते हैं; $2x$ का मान कुछ भी हो, $2x$ में संख्या 2 जोड़ने पर वही संख्या कभी नहीं मिल सकती, जो $2x$ में संख्या 3 जोड़ने पर मिलेगी)। इस समीकरण का एक भी मूल नहीं है।

[जब कोई राशि (या व्यंजन) किसी समीकरण को समात्मिका में परिणत करती है (अर्थात् जब वह समीकरण का मूल होती है), तो कहते हैं कि राशि **समीकरण को संतुष्ट करती है**। उदाहरण 4 का समीकरण किसी भी राशि से संतुष्ट नहीं होता।]

§ 83. समतुल्य समीकरण. समीकरण हल करने की युक्तियां

समान मूल वाले समीकरण **समतुल्य समीकरण** कहलाते हैं; यथा, समीकरण $x^2=3x-2$ और $x^2+2=3x$ समतुल्य हैं, क्योंकि दोनों के मूल हैं $x=1$ और $x=2$।

समीकरण हल करने की प्रक्रिया मूलतः विचाराधीन समीकरण को उसके समतुल्य समीकरणों से विस्थापित करने की प्रक्रिया है। समीकरण हल करने में मुख्यतया निम्न चालें प्रयुक्त होती हैं :

(1) एक व्यंजन को उसके समात्मिक व्यंजन से विस्थापित करना। उदाहरणतया, समीकरण

$$(x+1)^2=2x+5$$

में $(x+1)^2$ का समात्मिक व्यंजन x^2+2x+1 रखने पर विचाराधीन समीकरण का समतुल्य समीकरण मिलता है :

$$x^2+2x+1=2x+5.$$

(2) किसी योज्य पद का चिह्न विपरीत करके उसे समीकरण के एक हिस्से से दूसरे में लाना। उदाहरणार्थ, समीकरण $x^2+2x+1=2x+5$ में सभी पदों को बायें हिस्से में लाया जा सकता है; इस प्रक्रिया में दायें हिस्से के पद $+2x$ और $+5$ के चिह्न विपरीत (माइनस) हो जायेंगे। समीकरण $x^2+2x+1-2x-5=0$, या $x^2-4=0$ आरंभिक समीकरण के समतुल्य है। [इस चाल का आधार यह है कि समिका के दोनों हिस्सों में समान राशियां जोड़ने (या दोनों हिस्सों में से समान राशियां घटाने) पर

उनकी समता नष्ट नहीं होती; यथा, इसी उदाहरण में $x^2 + 2x + 1 - 2x - 5 = 2x + 5 - 2x - 5$, अर्थात् $x^2 - 4 = 0$ ।]

(3) समिका के दोनों हिस्सों में एक ही व्यंजन से गुणा किया जा सकता है या भाग दिया जा सकता है। *पर यह याद रखें कि जिस व्यंजन से गुणा (या भाग) हो रहा है, यदि उसके शून्य होने की संभावना है, तो प्राप्त समीकरण आरम्भिक समीकरण के समतुल्य नहीं भी हो सकता ।*

उदाहरण. समीकरण $(x-1)\ (x+2) = 4\ \ (x-1)$ दिया गया है। दोनों हिस्सों में $(x-1)$ से भाग देकर $x+2=4$ प्राप्त करते हैं। इस समीकरण का सिर्फ एक मूल $(x=2)$ है। आरंभिक समीकरण में $x=2$ के अतिरिक्त एक और मूल $x=1$ है। $x-1$ से भाग देने पर यह मूल "खो" जाता है। इसके विपरीत, समीकरण $x+2=4$ में दोनों तरफ $x-1$ से गुणा करने से इसमें मूल $x=+2$ के अतिरिक्त एक और मूल $x=1$ उत्पन्न हो जाता है [ध्यान दें कि दोनों ही स्थितियों में व्यंजन $(x-1)$ के शून्य होने की संभावना है (यदि $x=1$ हो जाये तो)] । पर इससे यह निष्कर्ष नहीं निकलता कि समीकरण के दोनों हिस्सों में ऐसे व्यंजन से गुणा-भाग करना ही नहीं चाहिए, जिसके शून्य होने की संभावना हो। सिर्फ हर बार जब ऐसी संक्रिया संपन्न करते हैं, इस बात का ख्याल रखते हैं कि कुछ पुराने मूल खो तो नहीं जाएंगे, या कुछ नये मूल उत्पन्न तो नहीं हो जाएंगे ।

(4) समीकरण के दोनों हिस्सों का किसी समान कोटि तक घातन या मूलन भी किया जा सकता है; पर इससे भी ऐसे समीकरण के मिलने की संभावना है, जो आरंभिक के समतुल्य नहीं होगा। उदाहरणार्थ, $2x=6$ का सिर्फ एक मूल है $x=3$; समीकरण $(2x)^2 = 6^2$, अर्थात् $4x^2 = 36$ के दो मूल हैं: $x=3$ और $x=-3$ ।

समीकरण का रूपांतरण करने के पहले हमेशा देख लेना चाहिए कि इससे कोई पुराना मूल खो तो नहीं जायेगा, या कोई नया मूल तो नहीं उत्पन्न हो जायेगा। पुराना मूल खो जायेगा या नहीं, यह निर्धारित करना विशेष महत्त्व-पूर्ण है; नये मूलों का उत्पन्न होना इतना खतरनाक नहीं है, क्योंकि उन्हें ज्ञात कर लेने के बाद आरंभिक समीकरण में किसी भी मूल को रखकर प्रत्यक्ष रूप से परीक्षण कर ले सकते हैं कि वह आरंभिक समीकरण को संतुष्ट करता है या नहीं ।

§ 84. समीकरणों का वर्गीकरण

बीजगणितीय समीकरण ऐसे समीकरण को कहते हैं, जिसका प्रत्येक हिस्सा अज्ञात राशियों के सापेक्ष किसी बहुपद या इकपद से बना होता है (इकपद, बहुपद दे. § 71)।

उदाहरण. $bx+ay^2=xy+2^m$ — दो अज्ञात राशियों वाला एक बीजगणितीय समीकरण है। $bx+ay^2=xy+2^x$ *बीजगणितीय समीकरण नहीं है*, क्योंकि समिका का दायां हिस्सा वर्ण x, y के सापेक्ष कोई बहुपद नहीं है (योज्य पद 2^x वर्ण x के सापेक्ष कोई इकपद नहीं है)।

बीजगणितीय समीकरण की कोटि. बीजगणितीय समीकरण के सभी पदों को समता-चिह्न के एक ओर लाते हैं और समरूप पदों को एक साथ जोड़-घटा लेते हैं; यदि इसके बाद समीकरण में सिर्फ एक अज्ञात राशि रह जाती है, तो *समीकरण की कोटि अज्ञात राशि के महत्तम घात-सूचक को कहते हैं।* यदि समीकरण में कई अज्ञात राशियां हैं, तो हर पद में *इन सबों के घात-सूचकों का योगफल* निकालते हैं और देखते हैं कि *कौन-सा योगफल सबसे बड़ा है; समीकरण की कोटि इसी योगफल को कहते हैं।*

उदाहरण 1. समीकरण $4x^3+2x^2-17x=4x^3-8$ दूसरी कोटि का समीकरण है, क्योंकि सभी पदों को बायें हिस्से में लाने के बाद समीकरण का रूप $2x^2-17x+8=0$ हो जाता है।

उदाहरण 2. समीकरण $a^4x+b^5=c^5$ प्रथम कोटि का समीकरण है, क्योंकि अज्ञात राशि x की महत्तम घात-कोटि 1 है।

उदाहरण 3. समीकरण $a^2x^5+bx^3y^3-a^8xy^4-2=0$ छठी कोटि का समीकरण है, क्योंकि पहले व तीसरे पदों में अज्ञात राशियों के घात-सूचकों के योगफल 5 के बराबर हैं, दूसरे पद में 6 और चौथे में शून्य के बराबर हैं, इन सब में सबसे बड़ा योगफल 6 है।

बीजगणितीय समीकरण की संज्ञा अक्सर उन समीकरणों को भी देते हैं, जिन्हें बीजगणितीय समीकरणों के रूप में हल किया जाता है। ऐसे समीकरणों की कोटि उस बीजगणितीय समीकरण की कोटि के बराबर होती है, जिसके रूप में उन्हें हल करते हैं।

उदाहरण 4. समीकरण $\frac{x+1}{x-1}=2x$ दूसरी कोटि का समीकरण है, यद्यपि इसमें अज्ञात राशि की दूसरी कोटि प्रत्यक्ष रूप में अनुपस्थित है। पर यदि

इसे इसके समतुल्य बीजगणितीय समीकरण द्वारा विस्थापित कर दिया जाये (अंशनाम से छुटकारा दिला दिया जाये), तो इसका रूप $2x^2-3x-1=0$ होगा।

प्रथम कोटि के समीकरण को (चाहे उसमें कितनी भी अज्ञात राशियां क्यों न हों) **रैखिक समीकरण** कहते हैं।

§ 85. एक अज्ञात राशि वाला प्रथमकोटिक समीकरण

एक अज्ञात राशि वाले 1-ली कोटि के समीकरण को आवश्यक रूपांतरणों के बाद $ax=b$ के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है, जिसमें a व b प्रदत्त संख्याएं या ज्ञात राशियों वाले वर्णिक व्यंजन हैं। हल (मूल) का रूप होता है $x=\frac{b}{a}$। तकनीकी कठिनाइयां सिर्फ रूपांतरण की प्रक्रिया में मिल सकती हैं।

उदाहरण 1. $\frac{3x-5}{2(x+2)}=\frac{3x-1}{2x+5}-\frac{1}{x+2}$

(1) समीकरण के दायें हिस्से को समष्टिक अंशनाम प्रदान करते हैं:

$$\frac{3x-5}{2(x+2)}=\frac{(3x-1)(x+2)-(2x+5)}{(2x+5)(x+2)}$$

(2) दायें हिस्से के संख्यानाम में कोष्ठक खोल कर समरूप पदों को आपस में जोड़-घटा लेते हैं:

$$\frac{3x-5}{2(x+2)}=\frac{3x^2+3x-7}{(2x+5)(x+2)}$$

(3) समीकरण को अंशनामों से छुटकारा दिलाने के लिए उसके दोनों हिस्सों में $2(2x+5)(x+2)$ से गुणा करते हैं (इस संक्रिया से समीकरण में नये मूल समाविष्ट होते हैं या नहीं, यह हल के अंत में देखेंगे):

$$(3x-5)(2x+5)=2(3x^2+3x-7)$$

(4) कोष्ठक खोलते हैं:

$$6x^2+5x-25=6x^2+6x-16$$

(5) सभी अज्ञात राशि वाले पदों को बायें हिस्से में लाते हैं और ज्ञात पदों को दायें; समरूप पदों को आपस में जोड़ते-घटाते हैं, जिससे $-x=11$ मिलता है, अतः समीकरण का मूल है $x=-11$।

आरंभिक समीकरण में यह मान रख कर देखते हैं कि यह कोई अतिरिक्त मूल नहीं है।

उदाहरण 2. $\frac{x^2}{(x-a)(x-b)}+\frac{(x-a)^2}{x(x-b)}+\frac{(x-b)^2}{x(x-a)}=3.$

(1) बायें हिस्से में समष्टिक अंशनाम

$$x(x-a)(x-b)$$

स्थापित करते हैं (अतिरिक्त गुणक : प्रथम भिन्न के लिए x, दूसरे भिन्न के लिए $(x—a)$, तीसरे भिन्न के लिए $(x-b)$:

$$\frac{x^3+(x-a)^3+(x-b)^3}{x(x-a)(x-b)}=3.$$

(2) समीकरण के दोनों हिस्सों में $x(x-a)(x-b)$ से गुणा करके अंशनाम से छुटकारा पा लेते हैं :

$$x^3+(x-a)^3+(x-b)^3=3x(x-a)(x-b).$$

(3) कोष्ठक खोलने पर :

$$x^3+x^3-3ax^2+3a^2x-a^3+x^3-3bx^2+3b^2x-b^3$$
$$=3x^3-3ax^2-3bx^2+3abx.$$

(4) अज्ञात पदों को बायीं तरफ ले जाते हैं और ज्ञात पदों को दायीं तरफ। समरूप पदों को जोड़ने-घटाने के बाद :

$$3a^2x-3abx+3b^2x=a^3+b^3,$$

या $$3(a^2-ab+b^2)x=a^3+b^3.$$

(5) इससे समीकरण का मूल

$$x=\frac{a^3+b^3}{3(a^2-ab+b^2)}$$

भिन्न को a^2-ab+b^2 से काट कर इसे सरल कर सकते हैं :

$$x=\frac{a+b}{3}$$

§ 86. दो अज्ञात राशियों वाले दो प्रथमकोटिक समीकरणों का तंत्र

पिछले अनुच्छेद में जिस तरह के रूपांतरण देखे गये थे, उन्हें संपन्न करने के बाद दो अज्ञात राशियों वाले किसी भी प्रथमकोटिक समीकरण को $ax+by=c$ के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है, जिसमें a, b, c प्रदत्त संख्याएं या वर्णिक व्यंजन हैं।

इस तरह के अकेले समीकरण में असंख्य मूल होते हैं। किसी एक अज्ञात

राशि (जैसे x) को आप बिल्कुल मनचाहा मान दे सकते हैं; समीकरण में x के इस मान को बैठाने पर एक अज्ञात राशि (y) वाला समीकरण प्राप्त होता है, जिससे y का तदनुरूप मान निकाला जा सकता है। उदाहरणार्थ, समीकरण $5x+3y=7$ में $x=2$ रख सकते हैं; इससे समीकरण $10+3y=7$ मिलता है, जिससे $y=-1$।

यदि अज्ञात राशियां x और y एक नहीं, दो प्रथमकोटिक समीकरणों से संबंधित होंगी, तो सिर्फ अपवादजनक स्थिति (दे. § 88) में ही वे असंख्य मान रख सकेंगी। आमतौर से, दो अज्ञात राशियों वाले दो प्रथमकोटिक समीकरण मूलों का सिर्फ एक संचि रख सकते हैं। ऐसा भी संभव है कि उनका एक भी हल नहीं होगा, पर यह भी एक अपवादजनक स्थिति में ही संभव है (दे. § 88)।

दो अज्ञात राशियों वाले दो प्रथमकोटिक समीकरणों के तंत्र को विभिन्न युक्तियों से एक अज्ञात राशि वाले प्रथमकोटिक समीकरण में परिणत करके हल निकाला जा सकता है। अगले अनुच्छेद में ऐसी दो युक्तियाँ समझायी गयी हैं।

दो अज्ञात राशियों वाले दो समीकरणों का तंत्र देने वाले प्रश्न को हमेशा ही एक अज्ञात राशि वाले एक समीकरण से हल किया जा सकता है, पर इससे ऐसे कलनों पर बहुत अधिक ध्यान देना पड़ता है, जो समीकरण-तंत्र का उपयोग करने पर तंत्र हल करने की प्रक्रिया में ही बिल्कुल औपचारिक विधियों द्वारा संपन्न होते जाते हैं। यही बात उन प्रश्नों के साथ भी लागू होती है, जो तीन (या अधिक) अज्ञात राशियों की सहायता से हल होते हैं। उन्हें एक-दो अज्ञात राशियों की सहायता से भी हल किया जा सकता है। प्रश्न हल करने में जितनी ही अधिक अज्ञात राशियों का उपयोग होगा, हर समीकरण को गढ़ना सामान्यतया उतना ही सरल होगा, पर तंत्र को हल करने की प्रक्रिया कठिन हो जायेगी। इसीलिए व्यवहार में वांछनीय है यथासंभव कम अज्ञात वर्णों का उपयोग करना, पर इस तरह से कि समीकरणों का हल फालतू झंझटों से न भर जाये।

उदाहरण. तांबे और जस्ते की मिश्र धातु का 1 dm^3 आयतन वाला टुकड़ा 8.14 kg भारी है। टुकड़े में कितना तांबा है और कितना जस्ता है (तांबे का विशिष्ट भार 8.9 kg/dm^3 है और जस्ते का– 7.0 kg/dm^3)?

तांबे और जस्ते का आयतन (dm^3 में) क्रमशः x और y से द्योतित करने पर दो समीकरण प्राप्त होते हैं :

$$x+y=1, \quad (1)$$

$$8.9x+7.0y=8.14. \quad (2)$$

प्रथम समीकरण का अर्थ है कि तांबे और जस्ते का कुल आयतन (dm^3 में)

इकाई के बराबर लिया गया है और दूसरे समीकरण का अर्थ है कि उनका कुल भार (kg में) 8.14 के बराबर लिया गया है ($8.9x$ तांबे का भार है और $7.0y$ जस्ते का भार है)। सामान्य नियमों के अनुसार (दे. § 87) समीकरण (1) व (2) को हल करने पर $x=0.6$, $y=0.4$ मिलता है। इस प्रश्न को हम लोगों ने § 81, उदाहरण 2 में सिर्फ एक अज्ञात वर्ण x की सहायता से हल किया था। § 81 में दिये गये निर्देश दो या अधिक अज्ञात राशियों वाले समीकरणों का तंत्र गढ़ने में भी काम आते हैं।

§ 87 दो अज्ञात राशियों वाले दो प्रथमकोटिक समीकरणों के तंत्र का हल

(a) **प्रतिस्थापन-विधि.** इस विधि में संक्रिया-क्रम निम्न है: (1) एक समीकरण के आधार पर एक अज्ञात राशि (जैसे x) को दूसरी अज्ञात राशि (जैसे y) की सहायता से व्यक्त करते हैं; (2) प्राप्त व्यंजन को दूसरे समीकरण में प्रथम अज्ञात राशि (x) की जगह रखते हैं, जिससे दूसरे समीकरण में सिर्फ एक अज्ञात राशि (y) रह जाती है; (3) दूसरे समीकरण के इस नए रूप से y का मान ज्ञात करते हैं; (4) अज्ञात राशि x के व्यंजन में y का मान रखते हैं, जिससे x का मान ज्ञात होता है।

उदाहरण. निम्न समीकरण-तंत्र हल करें :

$$8x-3y=46$$
$$5x+6y=13.$$

(1) प्रथम समीकरण से अज्ञात राशि x को y की सहायता से व्यक्त करते हैं [x का **प्रतिस्थापक व्यंजन** ज्ञात करते हैं] :

$$x=\frac{46+3y}{8}$$

(2) इस व्यंजन को दूसरे समीकरण में x की जगह रखते हैं:

$$5\cdot\frac{46+3y}{8}+6y=13.$$

(3) प्राप्त समीकरण को हल करते हैं :

$$5(46+3y)+48y=104,$$
$$230+15y+48y=104,$$
$$15y+48y=104-230,$$
$$63y=-126,\ y=-2$$

(4) ज्ञात मान $y = -2$ को प्रतिस्थापक व्यंजन $x = \frac{46+3y}{8}$ में रख कर x का मान ज्ञात करते हैं : $x = \frac{46-6}{8}$, अर्थात् $x = 5$.

(b) **जोड़ या घटाव की विधि.** इस विधि में संक्रिया-क्रम निम्न है : (1) एक समीकरण के दोनों हिस्सों को किसी गुणक से गुणित करते हैं; दूसरे समीकरण के दोनों हिस्सों को दूसरे गुणक से गुणित करते हैं। ये गुणक इस प्रकार चुने जाते हैं कि दोनों समीकरणों में किसी एक अज्ञात राशि के संदों के परम मान बराबर हो जायें। (2) यदि दोनों समीकरणों में तुल्य परम मान वाले संदों के चिह्न समान हैं, तो एक समीकरण में से दूसरे को घटा देते हैं; यदि संदों के चिह्न विपरीत हैं, तो एक समीकरण में दूसरे को जोड़ देते हैं; इस प्रक्रिया में एक अज्ञात राशि लुप्त हो जाती है। (3) अब एक अज्ञात राशि वाला एक समीकरण हल करते हैं। (4) दूसरी अज्ञात राशि का मान भी इसी तरह से ज्ञात किया जा सकता है, पर अक्सर पहली अज्ञात राशि का मान किसी एक समीकरण में रखकर एक अज्ञात राशि वाला समीकरण प्राप्त करके उसे हल करते हैं।

उदाहरण. निम्न समीकरण-तंत्र हल करें

$$8x - 3y = 46,$$
$$5x + 6y = 13.$$

(1) y के संदों के परम मानों को बराबर करना अधिक आसान है; प्रथम समीकरण के दोनों हिस्सों में 2 से गुणा करते हैं और दूसरे समीकरण के दोनों हिस्सों में 1 से गुणा करते हैं :

$$\begin{array}{r|c|r} 8x - 3y = 46 & 2 & 16x - 6y = 92, \\ 5x + 6y = 13 & 1 & 5x + 6y = 13. \end{array}$$

(2) दोनों समीकरणों को जोड़ते हैं :

$$\begin{array}{rr} & 16x - 6y = 92 \\ + & 5x + 6y = 13 \\ \hline & 21x \quad\quad = 105 \end{array}$$

(3) प्राप्त समीकरण को हल करते हैं :

$$x = \frac{105}{21} = 5.$$

(4) प्रथम समीकरण में मान $x=5$ बैठाते हैं, जिससे

$$40-3y=46;\ -3y=46-40;\ -3y=6;$$

$$y=\frac{6}{-3}=-2$$

जोड़ या घटाव की विधि को निम्न स्थितियों में प्रधानता देनी चाहिए : (1) जब प्रत्त समीकरणों में किसी एक अज्ञात राशि के संद परम मान के अनुसार बराबर हों (तब हल के प्रथम चरण अनावश्यक हो जाते हैं); (2) जब आसानी से तुरन्त दिख जाय कि किसी एक अज्ञात राशि के संख्यिक संद किसी छोटे-मोटे पूर्णांकी गुणक द्वारा बराबर किये जा सकते हैं; (3) जब समीकरण के संद में वर्णिक व्यंजन होते हैं।

उदाहरण. तंत्र को हल करें :

$$(a+c)x-(a-c)y=2ab,$$
$$(a+b)x-(a-b)y=2ac.$$

(1) x के संद बराबर करने के लिए प्रथम समीकरण के दोनों पक्षों में $(a+b)$ से गुणा करते हैं और दूसरे समीकरण में $(a+c)$ से :

$$(a+c)(a+b)x-(a+b)(a-c)y=2ab(a+b),$$
$$(a+c)(a+b)x-(a-b)(a+c)y=2ac(a+c)$$

(2) प्रथम में से दूसरे समीकरण को घटाने पर :

$$[(a-b)(a+c)-(a+b)(a-c)]y=2ab(a+b)-2ac(a+c)$$

प्राप्त समीकरण को हल करते हैं :

$$y=\frac{2ab(a+b)-2ac(a+c)}{(a-b)(a+c)-(a+b)(a-c)}$$

इस व्यंजन को सरल किया जा सकता है, पर काफी लम्बे और जटिल रूपांतरण सम्पन्न करने होंगे : संख्यानाम और अंशनाम में कोष्ठक खोलना होगा, समरूप पदों को जोड़ना-घटाना होगा, फिर गुणनखंड निकालना होगा। इसके बाद भिन्न कट जाएगा :

$$y=\frac{2a(ab+b^2-ac-c^2)}{(a^2-ab+ac-bc)-(a^2+ab-ac-bc)}$$

$$=\frac{2a[(ab-ac)+(b^2-c^2)]}{-2ab+2ac}$$

$$=\frac{2a[(b-c)a+(b-c)(b+c)]}{-2a(b-c)}$$

$$=\frac{2a(b-c)(a+b+c)}{-2a(b-c)}=-(a+b+c)$$

(4) x ज्ञात करने के लिए आरंभिक समीकरणों में y के संद बराबर करते हैं; इसके लिए प्रथम समीकरण में $(a-b)$ से गुणा करते हैं और दूसरे में $(a-c)$ से । एक समीकरण में से दूसरे को घटाने पर एक अज्ञात राशि वाला समीकरण मिलता है, जिसे हल करने पर

$$x=\frac{2ab(a-b)-2ac(a-c)}{(a-b)(a+c)\quad(a+)b(a-c)}.$$

पहले की तरह ही रूपांतरण संपन्न करने पर $x=b+c-a$ मिलता है। y का पहले से प्राप्त मान किसी आरंभिक समीकरण में रखकर x निकालने के लिए अधिक जटिल कलन करना पड़ता, जैसा कि अक्सर वर्णिक समीकरणों के हल में होता है।

§ 88. दो अज्ञात राशियों वाले दो प्रथमकोटिक समीकरणों का तंत्र हल करने का सामान्य सूत्र और उसके विशिष्ट रूप

निम्न प्रकार के समीकरण-तंत्र

$$ax+by=c, \tag{1}$$

$$a_1x+b_1y=c_1 \tag{2}$$

का हल और भी आसानी से ज्ञात किया जा सकता है, यदि इसके लिए सामान्य सूत्रों का प्रयोग किया जाये। ये सूत्र किसी भी विधि से, जैसे जोड़ या घटाव की विधि से, प्राप्त हो सकते हैं। हल का रूप होगा :

$$x=\frac{b_1c-bc_1}{ab_1-a_1b}, \tag{3}$$

$$y=\frac{ac_1-a_1c}{ab_1-a_1b}. \tag{4}$$

इन सूत्रों को सरलता से याद करने के लिए एक सर्वमान्य द्योतन का उपयोग करते हैं। प्रतीक $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$ से व्यंजन $ps-rq$ का द्योतन करते हैं, जो कटकुट रूप

में गुणा करके एक गुणनफल में से दूसरे को घटाने पर प्राप्त होता है (चिह्न + उस

गुणनफल का होता है, जो दायें की ओर नीचे उतरने वाले कर्ण पर मिलता है)।
उदाहरणार्थ, प्रतीक $\begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ का अर्थ है $5 \cdot 1 - 2 \cdot (-8) = 5 + 16 =$
$= 21$।

व्यंजन

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = ps - rq$$

को **दूसरी कोटि का निश्चायक** कहते हैं (इसी तरह से तीन, चार, पाँच, आदि अज्ञात राशियों वाले प्रथमकोटिक समीकरणों के तंत्र हल करने में तीसरी, चौथी, पाँचवी आदि कोटि के निश्चायक प्रयुक्त होते हैं)।

उपरोक्त द्योतन की सहायता से हम सूत्र (3) व (4) को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}, \qquad (5)$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}. \qquad (6)$$

यदि समीकरण (1) व (2) के साथ तुलना करेंगे, तो आप देखेंगे कि (5) और (6) दोनों में अंशनाम की जगह अज्ञात राशियों के संदों से बना हुआ निश्चायक है। इस निश्चायक में x के संदों की जगह स्वतंत्र पद (c, c_1) रखने पर x के व्यंजन (5) का संख्यानाम मिलता है; अंशनाम में स्थित निश्चायक में y के संदों (b, b_1) की जगह स्वतंत्र पद (c, c_1) रखने पर y के व्यंजन (6) का संख्यानाम मिलता है।

उदाहरण. निम्न तंत्र हल करें :

$$8x - 3y = 46,$$
$$5x + 6y = 13.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 46 & -3 \\ 13 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{46 \cdot 6 + 13 \cdot 3}{8 \cdot 6 + 5 \cdot 3} = \frac{315}{63} = 5,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 8 & 46 \\ 5 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}=\frac{8\cdot13-5\cdot46}{8\cdot6+5\cdot3}=\frac{-126}{63}=-2.$$

अन्वीक्षण से पता चलता है कि *समीकरण (1) व (2) का तंत्र हल करने में मूलतः तीन इतर स्थितियों से सामना हो सकता है।*

(1) अज्ञात राशियों के संद समानुपाती नहीं हैं, अर्थात् $\frac{a}{a_1}\neq\frac{b}{b_1}$ । इस स्थिति में स्वतंत्र पद चाहे कुछ भी हों, तंत्र का हल एकमात्र होगा, जो सूत्र (3), (4) या (5), (6) द्वारा मिलते हैं।

(2) अज्ञात राशियों के संद समानुपाती हैं : $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$ । तब यह जानना महत्त्वपूर्ण है कि स्वतंत्र पद भी इसी अनुपात में है या नहीं। यदि वे इसी अनुपात में हैं, अर्थात् $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$, तो समीकरण के असंख्य हल होंगे । इसका कारण यह है कि विचाराधीन स्थिति में एक समीकरण दूसरे का परिणाम है, दूसरे से निगमित है, अतः वास्तविकता में हमारे पास दो नहीं, सिर्फ एक समीकरण होता है।

उदाहरण. तंत्र

$$10x+6y=18,$$
$$5x+3y=9$$

में x और y के संद समानुपाती हैं : $\frac{10}{5}=\frac{6}{3}=2$ । स्वतंत्र पद भी इसी अनुपात में हैं : $\frac{18}{9}=2$ । इनमें से प्रत्येक समीकरण दूसरे का निष्कर्ष है; उदाहरणतया, दूसरे समीकरण के दोनों पक्षों में 2 से गुणा करने पर पहला समीकरण मिलता है। किसी भी समीकरण के असंख्य हलों में से कोई भी हल साथ-साथ दूसरे समीकरण का भी हल होगा।

(3) अज्ञात राशियों के संद समानुपाती हैं : $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$, पर स्वतंत्र पद इस अनुपात में नहीं हैं। इस स्थिति में तंत्र का कोई हल नहीं होता, क्योंकि दोनों समीकरण एक-दूसरे का विरोध करते हैं।

उदाहरण. तंत्र

$$10x+6y=20,$$
$$5y+3y=9$$

में संद समानुपाती हैं : $\frac{10}{5}=\frac{6}{3}=2$ । स्वतंत्र पदों का व्यतिमान अन्य है : $\frac{20}{9}=2\frac{2}{9}$ । तंत्र का हल नहीं है, क्योंकि दूसरे समीकरण में 2 से गुणा करने पर $10x+6y=18$ मिलता है, जो प्रथम समीकरण के विरुद्ध है। दोनों समीकरणों में x के मान समान होने पर और y के मान समान होने पर $10x+6y$ का मान एक साथ 20 और 18 नहीं हो सकता ।

§ 89. तीन अज्ञात राशियों वाले तीन प्रथमकोटिक समीकरणों का तंत्र

तीन अज्ञात राशियों x, y, z वाला समीकरण § 85 जैसे रूपांतरणों के बाद निम्न रूप ग्रहण करता है : $ax+by+cz=d$, जहां a, b, c, d प्रत्त संख्याएं या वर्णिक व्यंजन हैं । इस तरह के अकेले समीकरण या ऐसे दो समीकरणों के असंख्य हल होते हैं। तीन अज्ञात राशियों वाले तीन प्रथमकोटिक समीकरणों के तंत्र के हलों का सामान्यतः एक संचि होता है । अपवाद रूप स्थितियों में (दे. नीचे) इसके असंख्य हल हो सकते हैं या इसका हल होगा ही नहीं।

तीन अज्ञात राशियों वाले तीन प्रथमकोटिक समीकरणों के तंत्र का हल उन्हीं विधियों से ज्ञात किया जाता है, जिनसे दो अज्ञात राशियों वाले दो समीकरणों के तंत्र के हल ज्ञात होते हैं । यह निम्न उदाहरण से स्पष्ट हो जायेगा ।

उदाहरण. निम्न समीकरण-तंत्र को हल करें :

$$3x-2y+5z=7, \quad (1)$$
$$7x+4y-8z=3, \quad (2)$$
$$5x-3y-4z=-12. \quad (3)$$

तंत्र के दो समीकरण, जैसे (1) व (2), लेते हैं और किसी एक अज्ञात राशि को, जैसे z को, प्रदत्त राशि या ज्ञात राशि मान लेते हैं। दोनों समीकरणों को x और y के सापेक्ष § 87 की विधियों से हल करते हैं :

$$x=\frac{17-2z}{13}\,;\; y=\frac{59z-40}{26} \quad (4)$$

x, y के ये मान समीकरण (3) में रखने पर एक अज्ञात राशि वाला एक समीकरण मिलेगा :

$$\frac{5(17-2z)}{13}-\frac{3(59z-40)}{26}-4z=-12.$$

इस समीकरण को हल करने पर (दे. § 85) प्राप्त मान $z=2$ को व्यंजन 4 में रखकर $x=1$, $y=3$ प्राप्त करते हैं।

तंत्र

$$\begin{aligned} ax+by+cz&=d,\\ a_1x+b_1y+c_1z&=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z&=d_2 \end{aligned} \qquad (5)$$

के हल का सामान्य सूत्र इसी विधि से ज्ञात किया जा सकता है, पर हल का वास्तविक पूर्ण रूप बहुत जटिल होता है; उसे याद रखना मुश्किल होगा। सरलता से याद रखने के लिए और कलन की सुविधा के लिए **तीसरी कोटि का निश्चायक** प्रयुक्त होता है :

व्यंजन

$$ab_1c_2+bc_1a_2+ca_1b_2-cb_1a_2-ac_1b_2-ba_1c_2 \qquad (6)$$

के संक्षिप्त द्योतन

$$\begin{vmatrix} a & b & c\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad (7)$$

को तीसरी कोटि का निश्चायक कहते हैं।

व्यंजन (6) को कंठस्थ करने की आवश्यकता नहीं होती, इसे (7) की सहायता से सरलतापूर्वक प्राप्त कर सकते हैं। निम्न विधि का अनुसरण करें: सारणी (7) में प्रथम दो स्तंभों को दायीं ओर एक बार फिर से लिख लें; सारणी का रूप आरेख (8) जैसा हो जायेगा।

आरेख (8) में डैश-रेखा द्वारा दर्शित कर्ण खींचते हैं। छः में से हर कर्ण पर स्थित वर्णों का गुणनफल अलग-अलग लिख लेते हैं। दायीं ओर नीचे उतरने वाले कर्ण पर स्थित वर्णों का गुणनफल "+" चिह्न के साथ लेते हैं; बाकी तीन

गुणनफल " – " चिह्न के साथ लिखते हैं। इन गुणनफलों को एक पंक्ति में लिखने से व्यंजन (6) प्राप्त हो जायेगा।

उदाहरण '. तीसरी कोटि के निश्चायक का मान निकालें :

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & 4 & -8 \\ 5 & -3 & -4 \end{vmatrix} \tag{9}$$

आरेख (8) का रूप (8′) जैसा हो जायेगा।

निश्चायक (9) बराबर

$$3\cdot4\cdot(-4)+(-2)\cdot(-8)\cdot5+5\cdot7\cdot(-3)-5\cdot4\cdot3-3\cdot(-8)\cdot(-3)-(-2)\cdot7\cdot(-4)$$
$$=-48+80-105-100-72-56$$
$$=-301.$$

निश्चायकों की सहायता से तंत्र (5) का हल निम्न रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}};\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}};\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}, \tag{10}$$

अर्थात् प्रत्येक अज्ञात राशि एक भिन्न के बराबर है, जिसका अंशनाम सभी अज्ञात राशियों के सभी संदों से बना हुआ निश्चायक है और संख्यानाम इस निश्चायक में विचाराधीन अज्ञात राशि के संदों को तदनुरूप स्वतंत्र पदों द्वारा विस्थापित करने से प्राप्त निश्चायक है।

उदाहरण 2. समीकरण-तंत्र को हल करें :

$$3x-2y+5z=7$$
$$7x+4y-8z=3$$
$$5x-3y-4z=-12.$$

सूत्र (10) के समष्टिक अंशनाम का मान हम पिछले उदाहरण में ज्ञात कर चुके है; वह – 301 के बराबर है। (10) के प्रथम सूत्र का संख्यानाम (9) के प्रथम स्तम्भ को स्वतंत्र पदों से विस्थापित करने पर मिलता है। उसका रूप निम्न है :

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & -8 \\ -12 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

आरेख (४) के अनुसार इसका कलन करने पर -301 मिलता है। अतः

$x=\frac{-301}{-301}=1$ (तुलना करें समीकरण (1), (2), (3) के हल से)।

इसी प्रकार

$$y=\frac{-903}{-301}=3, \qquad z=\frac{-602}{-301}=2.$$

समीकरण-तंत्र (5) के हल की विशेष स्थितियां :

तंत्र (5) का अनूठा (एकमात्र) हल होता है, जब अज्ञात राशियों के संदों से बना हुआ निश्चायक शून्य नहीं होता। इस स्थिति में सूत्र (10) से, जिनके संख्यानामों की जगह यह निश्चायक स्थित है, तंत्र (5) का हल मिल जाता है।

जब संदों से बना हुआ निश्चायक शून्य के बराबर होता है, तब सूत्र (10) कलन के योग्य नहीं रह जाते। इस स्थिति में तंत्र (5) के या तो असंख्य हल होते हैं या एक भी हल नहीं होता।

तंत्र (5) के असंख्य हल होते हैं, जब सूत्र (10) में अंशनाम की जगह पर स्थित निश्चायक ही नहीं, संख्यानाम की जगह पर स्थित निश्चायक भी शून्य के बराबर होता है। *ध्यातव्य* है कि जब अंशनाम की जगह पर स्थित निश्चायक शून्य होता है और संख्यानाम की जगह पर स्थित निश्चायकों में से कोई एक निश्चायक शून्य के बराबर होता है, तो संख्यानाम की जगह पर स्थित अन्य दो निश्चायक भी जरूर शून्य के बराबर होते हैं।

असंख्य हल मिलने का कारण यह है कि तंत्र (5) के तीनों समीकरणों में से कोई एक समीकरण अन्य दो का निष्कर्ष होता है [या (5) के कोई दो समीकरण तीसरे का निष्कर्ष होते हैं], जिसके फलस्वरूप हमारे पास वास्तव में तीन नहीं, सिर्फ दो समीकरण रह जाते हैं (या सिर्फ एक समीकरण रह जाता है)।

उदाहरण 3. समीकरण-तंत्र

$$\begin{aligned} 2x-5y+z&=-2,\\ 4x+3y-6z&=1,\\ 2x+21y-15z&=8 \end{aligned} \qquad (11)$$

में संदों से बना निश्चायक शून्य है :

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 4 & 3 & -6 \\ 2 & 21 & -15 \end{vmatrix}=0$$

[दे. आरेख (8)]। सूत्र (10) के संख्यानामों की जगह पर स्थित निश्चायकों में से किसी एक को कलित करते हैं। यथा, (10) के प्रथम सूत्र में संख्यानाम की जगह निम्न निश्चायक होगा :

$$\begin{vmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \\ 8 & 21 & -15 \end{vmatrix}$$

इसका मान भी शून्य है। अत: (10) के दूसरे व तीसरे सूत्रों के संख्यानामों को ज्ञात करने की आवश्यकता नहीं है, वे भी शून्य होंगे। समीकरण-तंत्र (11) के असंख्य हल हैं, क्योंकि इसका एक समीकरण बाकी दो का निष्कर्ष है। उदाहरणतया, प्रथम समीकरण को -3 से और दूसरे समीकरण को 2 से गुणा करके उन्हें जोड़ने पर तीसरा समीकरण प्राप्त होता है।

तंत्र (5) का एक भी हल नहीं होता, जब (10) के सूत्रों में अंशनाम की जगह पर स्थित निश्चायक शून्य के बराबर है, परंतु संख्यानामों की जगह पर स्थित एक भी निश्चायक शून्य के बराबर नहीं है। यह निश्चित करने के लिए किसी एक संख्यानाम को ज्ञात कर लेना पर्याप्त है : यदि वह शून्य नहीं है, तो बाकी दो भी शून्य के बराबर नहीं हो सकते। हल नहीं होने का कारण यह है कि कोई एक समीकरण बाकी दो का (या उनमें से प्रत्येक का अलग-अलग) विरोध करता है।

उदाहरण. निम्न समीकरण-तंत्र पर गौर करें :

$$\begin{aligned} 2x-5y+z &= -2, \\ 4x+3y-6z &= 1, \\ 2x+21y-15z &= 3. \end{aligned} \tag{12}$$

यह तंत्र (11) से सिर्फ स्वतंत्र पदों में इतर है। अत: संदों से बना हुआ निश्चायक पहले जैसा ही है; वह शून्य के बराबर है। लेकिन संख्यानाम में स्थित निश्चायक इतर होंगे। यथा, (10) के प्रथम सूत्र में संख्यानाम होगा

$$\begin{vmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \\ 3 & 21 & -15 \end{vmatrix} = -135.$$

यह शून्य के बराबर नहीं है। अन्य दो संख्यानाम भी शून्य के बराबर नहीं होंगे। तंत्र (12) का हल नहीं है। वह विसंवादी है, क्योंकि प्रथम दो समीकरणों से निष्कर्ष-रूप में समीकरण $2x+21y-15z=8$ मिलता है (दे. उदा-

हरण 3) । लेकिन तंत्र (12) के तीसरे समीकरण का रूप है $2x+21y-15z=3$, अत: (12) का हल ऐसा होना चाहिए, जो $2x+21y-15z$ को एक ही साथ दो अलग-अलग मान (3 और 12) प्रदान करे; यह असंभव है ।

§ 90. घातों के साथ संक्रियाओं के नियम

(1) *दो या अधिक संगुणकों के गुणनफल का घात संगुणकों के उसी कोटि के घातों के गुणनफल के बराबर होता है :*

$$(abc...)^n=a^nb^nc^n...$$

उदाहरण 1. $(7\cdot2\cdot10)^2=7^2\cdot2^2\cdot10^2=49\cdot4\cdot100=19\,600.$

उदाहरण 2. $(x^2-a^2)^3=[(x+a)(x-a)]^3=(x+a)^3(x-a^3)$ (तुलना करें § 73; सूत्र 3) ।

अधिक व्यावहारिक महत्त्व इसके विपरीत रूपांतरण का है :

$$a^nb^nc^n...=(abc...)^n,$$

अर्थात् कई राशियों के समान कोटि वाले घातों का गुणनफल उन राशियों के गुणनफल के उसी कोटि वाले घात के बराबर होता है ।

उदाहरण 3. $4^3\cdot\left(\frac{7}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^3=\left(4\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{2}{7}\right)^3=2^3=8.$

उदाहरण 4. $(a+b)^2(a^2-ab+b^2)^2=$

$=[(a+b)(a^2-ab+b^2)]^2=$

$=(a^3+b^3)^2$ (तुलना करें § 73, सूत्र 6 से) ।

(2) *भागफल (या भिन्न) का घात भाज्य के उसी कोटि वाले घात में भाजक के उसी कोटि वाले घात से भाग देने पर प्राप्त भागफल के बराबर होता है ।*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

उदाहरण 5. $\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81}.$

उदाहरण 6. $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^3=\frac{(a+b)^3}{(a-b)^3}.$

विपरीत रूपांतरण है : $\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$

उदाहरण 7. $\frac{7.5^3}{2.5^3}=\left(\frac{7.5}{2.5}\right)^3=3^3=27.$

उदाहरण 8. $\frac{(a^2-b^2)^2}{(a+b)^2}=\left(\frac{a^2-b^2}{a+b}\right)^2=(a-b)^2$

(तुलना करें § 79, सूत्र 3 से)।

(3) *समान आधार वाले घातों को गुणा करने पर उनके घात-सूचक जुड़ जाते हैं* (तुलना करें § 71 से) :

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

उदाहरण 9. $2^2 \cdot 2^5 = 2^{2+5} = 2^7 = 128$

उदाहरण 10. $(a-4c+x)^2\ (a-4c+x)^3 = (a-4c+x)^5.$

(4) *समान आधार वाले घातों के भाग में भाज्य का घात-सूचक भाजक के घात-सूचक द्वारा घट जाता है* (तुलना करें § 71 से) :

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

उदाहरण 11. $12^5 : 12^3 = 12^{5-3} = 12^2 = 144.$

उदाहरण 12. $(x-y)^3 : (x-y)^2 = x-y.$

(5) *घात का घातन करने में घात-सूचक गुणित हो जाते हैं :* $(a^m)^n = a^{mn}$

उदाहरण 13. $(2^3)^2 = 2^6 = 64.$

उदाहरण 14. $\left(\frac{a^2b^3}{c}\right)^4 = \frac{(a^2)^4 . (b^3)^4}{c^4} = \frac{a^8 \cdot b^{12}}{c^4}.$

§ 91. मूलों के साथ संक्रियाएं

नीचे दिये गये सूत्रों में चिह्न $\sqrt{\ }$ द्वारा मूल का परम मान द्योतित किया गया है।

(1) *मूल की कोटि को n गुना बढ़ाने पर और साथ ही मूलाधीन संख्या की घात-कोटि को n गुना बढ़ाने पर मूल का मान अपरिवर्तित रहता है :*

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m.n]{a^n}.$$

उदाहरण 1. $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3.2]{8^2} = \sqrt[6]{64}.$

(2) *मूल की कोटि को n गुना घटाने पर और साथ ही मूलाधीन संख्या का*

n-वां मूल लेने पर आरंभिक मूल का मान अपरिवर्तित रहता है :

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m:n]{\sqrt[n]{a}}$$

उदाहरण 2. $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6:3]{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}.$

टिप्पणी. यह गुण उस स्थिति में भी बना रहता है, जब $\frac{m}{n}$ का मान पूर्ण संख्या के रूप में नहीं होता; उपरोक्त दोनों गुण उस स्थिति में भी सुरक्षित रहते हैं जब n कोई भिन्न (अपूर्ण) संख्या होता है। पर इसके लिए पहले अपूर्ण सूचकों को अंगीकार करके घात और मूल की अवधारणाओं को विस्तृत करना होगा। (दे. § 126)।

(3) कई संगुणकों के गुणनफल का मूल उनके उसी कोटि के अलग-अलग मूलों के गुणनफल के बराबर होता है :

$$\sqrt[m]{abc...} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c...}$$

उदाहरण 3. $\sqrt[3]{a^6 b^2} = \sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{b^2} = a^2 \sqrt[3]{b^2}$

(अंतिम रूपान्तरण गुण 2 पर आधारित है।)

उदाहरण 4. $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$

विलोम : *समान कोटि वाले मूलों का गुणनफल मूलाधीन व्यंजनों के गुणन के उसी कोटि वाले मूल के बराबर होता है :*

$$\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c...} = \sqrt[m]{abc...}$$

उदाहरण 5. $\sqrt{a^3 b} \cdot \sqrt{ab^3} = \sqrt{a^4 b^4} = a^2 b^2.$

(4) भागफल का मूल भाज्य के उसी कोटि वाले मूल में भाजक के उसी कोटि वाले मूल से भाग देने पर प्राप्त भागफल के बराबर होता है :

$$\sqrt[m]{a : b} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b}.$$

विलोम : $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a : b}.$

उदाहरण 6. $\sqrt[3]{27 : 4} = \sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{4} = 3 : \sqrt[3]{4}.$

(5) मूल का कोई घात प्राप्त करने के लिए मूलाधीन संख्या का उस कोटि तक घातन करना काफी रहता है :

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}.$$

विलोम : *घात का मूल निकालने के लिए घात के आधार के मूल को उसी*

कोटि के घात तक उठाना पर्याप्त रहेगा :

$$\sqrt[m]{a^n}=(\sqrt[m]{a})^n.$$

उदाहरण 7. $(\sqrt[3]{a^2b})^2=\sqrt[3]{a^{42}b}=\sqrt[3]{a^3\cdot ab^2}=a\sqrt[3]{ab^2}.$

उदाहरण 8. $\sqrt{27}=\sqrt{3^3}=(\sqrt{3})^3.$

6. भिन्न (अपूर्णांक) के अंशनाम या संख्यानाम में से अव्यतिमानता दूर करना. मूल से युक्त भिन्नात्मक व्यंजनों का कलन सरल करने के लिए अक्सर अंशनाम या संख्यानाम में से "अव्यतिमानता को दूर" करना पड़ता है, अर्थात् व्यंजन को इस तरह रूपांतरित करना पड़ता है कि उसके संख्यानाम या अंशनाम में मूल न रहें।

उदाहरण 9. माना कि $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ का मान 0.01 तक की शुद्धता से निकालना है। यदि हम निर्दिष्ट क्रम में संक्रियाएं संपन्न करेंगे, तो पायेंगे : (1) $\sqrt{7}\approx 2.646$; (2) $\sqrt{6}\approx 2.499$; (3) $2.646-2.449=0\ 197$; (4) $\dfrac{1}{0.197}\approx 5.10$। अर्थात् परिणाम प्राप्त करने के लिए चार संक्रियाएं संपन्न करनी पड़ती हैं; इसमें भी, शतांश का विश्वस्त अंक प्राप्त करने के लिए वर्गमूल सहस्रांश तक की शुद्धता से निकालना पड़ता है, अन्यथा भिन्न $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ के भाजक में सिर्फ दो सार्थक अंक मिलेंगे और अंतिम परिणाम में तीन विश्वस्त सार्थक अंक प्राप्त करना असंभव होगा (दे. § 57)।

यदि प्रत्त भिन्न के संख्यानाम और अंशनाम में पहले $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ से गुणा कर दिया जाये, तो प्राप्त होगा :

$$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{6})^2}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{1}.$$

अब कलन के लिए सिर्फ तीन संक्रियाएं संपन्न करनी पड़ेंगी और वर्गमूल सिर्फ शतांश तक की शुद्धता से ज्ञात किये जा सकते हैं :

(1) $\sqrt{7}\approx 2.65$; (2) $\sqrt{6}\approx 2.45$; (3) $\sqrt{7}+\sqrt{6}\approx 5.10.$

चंद और प्रतिनिधिक उदाहरण :

उदाहरण 10. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{35}}{5}.$

उदाहरण 11. $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}$

$$=\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}.$$

इन उदाहरणों में अंशनाम को अव्यतिमानता से मुक्त किया गया है। नीचे के दो उदाहरणों में संख्यानाम को उससे मुक्त किया गया है।

उदाहरण 12. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}}=\frac{7}{\sqrt{35}}.$

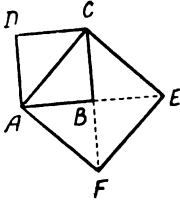
उदाहरण 13. $\frac{\sqrt{35}-\sqrt{34}}{3}=\frac{\sqrt{35}^2-\sqrt{34}^2}{3(\sqrt{35}+\sqrt{34})}$

$$=\frac{1}{3(\sqrt{35}+\sqrt{34})}.$$

उदाहरण 12 में प्रयुक्त रूपांतरण कलन की दृष्टि से लाभप्रद नहीं है, यह बात स्पष्ट है, क्योंकि व्यंजन $\frac{7}{\sqrt{35}}$ को कलित करने के लिए बहुअंकी संख्या से भाग देना पड़ेगा; $\frac{\sqrt{35}}{5}$ कलित करने के लिए पूर्णांक से भाग देना पड़ेगा (दे. उदाहरण 10)। पर उदाहरण 13 में प्रयुक्त रूपांतरण लाभप्रद है क्योंकि $\sqrt{35}$ और $\sqrt{34}$ उतने ही अंकों की शुद्धता से ज्ञात करना पड़ेगा, जितने अंकों की शुद्धता से परिणाम वांछनीय है। आरंभिक व्यंजन में कहीं अधिक अंकों की शुद्धता से मूल ज्ञात करना पड़ेगा (दे. उदाहरण 9)। अतः, जैसा कि स्कूलों में सिखाया जाता है, मूल को अंशनाम में से ही दूर करना हमेशा युक्तिसंगत नहीं होता।

§ 92. अव्यतिमानी संख्याएं

पूर्ण और अपूर्ण (भिन्न) संख्याओं का भंडार व्यावहारिक मापन के लिए पर्याप्त है (दे. § 46)। पर मापन-सिद्धांत के लिए यह भंडार काफी नहीं है।

उदाहरणतया, मान लें कि वर्ग *ABCD* (चित्र 1) के कर्ण *AC* की लम्बाई शुद्ध-शुद्ध ज्ञात करनी है; वर्ग की भुजा 1m के बराबर है। कर्ण को भुजा मान कर बनाये गये वर्ग *ACEF* का क्षेत्रफल वर्ग *ABCD* के क्षेत्रफल से दुगुना है (त्रिभुज *ACB* वर्ग *ABCD* में दो बार आता है और *ACEF* में चार बार)। इसलिए यदि इष्ट लम्बाई *AC* को x के बराबर मान लें, तो $x^2=2$ होना चाहिए। पर ऐसी कोई भी पूर्ण या अपूर्ण संख्या नहीं है, जो इस समीकरण को सन्तुष्ट कर सके।

चित्र 1

हमारे पास सिर्फ दो विकल्प रह जाते हैं: या तो हम लंबाइयों को संख्याओं द्वारा शुद्ध-शुद्ध व्यक्त करने की आवश्यकता से इन्कार कर दें, या पूर्ण व अपूर्ण संख्याओं के अतिरिक्त नयी संख्याओं को स्थान दें। दीर्घकालीन संघर्ष के बाद दूसरे विचार की विजय हुई।

पैमाने की इकाई के साथ असंमित कर्त-लंबाइयों को(अर्थात् ऐसे रेखाखंडों की लंबाइयों को, जिन्हें किसी भी पूर्ण या अपूर्ण संख्या द्वारा व्यक्त नहीं किया जा सकता) *निरूपित करने वाली संख्याओं को* **अव्यतिमानी संख्याएं*** *कहते हैं।* अव्यतिमानी संख्याओं के विपरीत, पूर्ण व अपूर्ण संख्याओं को **व्यतिमानी संख्याएं** कहते हैं। ऋण संख्याओं को अपनाने के बाद (यह कुछ बाद में हुआ था, दे. § 67) उनके बीच भी व्यतिमानी व अव्यतिमानी संख्याओं का भेद होने लगा।

हर व्यतिमानी संख्या को $\frac{m}{n}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ m

---

* शब्द "अव्यतिमानी" का अर्थ है "जिसका कोई पारस्परिक मान (व्यतिमान) नहीं है।" शुरू-शुरू इससे अव्यतिमानी संख्या को नहीं, बल्कि उन राशियों को द्योतित करते थे, जिनका व्यतिमान अब हम अव्यतिमानी संख्याओं से व्यक्त करते हैं। उदाहरणतया, वर्ग के कर्ण और उसकी भुजा के व्यतिमान को हम अब संख्या $\sqrt{2}$ से निरूपित करते हैं। अव्यतिमानी संख्याओं को अपनाने से पहले कहा जाता था कि वर्ग के *कर्ण* और *उसकी भुजा का कोई व्यतिमान नहीं है।*

व n पूर्ण (धन या ऋण) संख्याएं हैं। अव्यतिमानी संख्या को इस रूप में शुद्ध-शुद्ध नहीं व्यक्त किया जा सकता। पर सन्निकृत रूप से हम हर अव्यतिमानी संख्या की जगह *किसी भी कोटि की परिशुद्धता के साथ* व्यतिमानी संख्या $\frac{m}{n}$ को रख सकते हैं; विशेषकर हम ऐसी दशमलव भिन्न (उचित या अनुचित) ढूंढ़ ले सकते हैं, जो प्रत्त अव्यतिमानी संख्या से यथेष्ट अल्पेतर हो ।

संख्या $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{3+\sqrt{2}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{5+\sqrt{7}}}$ आदि के साथ-साथ मूल के चिह्न ($\sqrt{\ }$, **करणी**) के अधीन स्थित व्यतिमानी संख्या वाले अनेक अन्य व्यंजन भी अव्यतिमानी होते हैं। इन्हें "करणियों द्वारा व्यक्त" अव्यतिमानी संख्याएं कहते हैं।

पर अव्यतिमानी संख्याओं का भंडार इतने से ही निःशेष नहीं हो जाता। 18वीं शती के अंत तक गणितज्ञों को पूरा विश्वास था कि व्यतिमानी संदों वाले किसी भी बीजगणितीय समीकरण के मूल को (यदि वह व्यतिमानी नहीं है तो) करणी की सहायता से व्यक्त किया जा सकता है। बाद में सिद्ध हुआ कि यह बात सिर्फ चौथी कोटि तक के समीकरणों के लिए सही है, इससे उच्च कोटि के समीकरणों के लिए सही नहीं है (§ 67)। 5वीं तथा अधिक ऊँची कोटि के समीकरणों के अव्यतिमानी मूल सामान्यतया करणियों की सहायता से व्यक्त नहीं हो सकते। पूर्णांकी संदों वाले बीजगणितीय समीकरणों के मूल व्यक्त करने वाली संख्याओं को **बीजगणितीय संख्याएं** कहते हैं; बीजगणितीय संख्याएं सिर्फ अपवादजनक स्थितियों में ही करणियों की सहायता से व्यक्त होती हैं; व्यतिमानी तो वे और भी कम स्थितियों में होती हैं।

पर अव्यतिमानी संख्याओं का भंडार बीजगणितीय संख्याओं तक ही सीमित नहीं है। उदाहरणतया, ज्यामिति से ज्ञात संख्या π (दे. § 153) भी अव्यतिमानी है, पर यह पूर्णांकी संदों वाले किसी भी बीजगणितीय समीकरण का मूल नहीं हो सकती। ठीक इसी प्रकार संख्या e (दे. § 129) भी बीजगणितीय संख्या नहीं है। दूसरे शब्दों में, पाइ (π) और ई (e) बीजगणितीय संख्याएं नहीं हैं।

ऐसी अव्यतिमानी संख्याएं, जो पूर्णांकी संद वाले किसी भी बीजगणितीय समीकरण का मूल नहीं हो सकतीं, **पारमित संख्याएं** कहलाती हैं।

1929 तक बहुत कम संख्याओं का पारमित होना सिद्ध हो सका था। 1871 में फ्रांसीसी गणितज्ञ हर्मिट (Hermite) ने संख्या e को पारमित सिद्ध किया। 1882 में जर्मन गणितज्ञ लिंडेमान (Lindemann) द्वारा संख्या π की

पारमेयता सिद्ध हुई। अकादमीशियन आ. मार्कोव (1856 – 1922) ने संख्या e व π की पारमेयता एक अन्य विधि से सिद्ध की। 1913 में द्मी. मोर्दुखाइ-बोल्तोव्स्कोइ (1877-1952) ने कई नयी पारमित संख्याएं दिखायीं, पर $3^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ आदि जैसी 'साधारण' संख्याएं पारमित हैं या नहीं, यह बात अज्ञात ही रही। सोवियत गणितज्ञ आ. गेल्फोंद (जन्म 1906) और रो. कुजमिन (1891 – 1949) ने 1929 व 1930 में सिद्ध किया कि ऐसी सभी संख्याएं पारमित हैं, जिनका रूप $\alpha^{\sqrt{n}}$ होता है, जहाँ α बीजगणितीय संख्या है (पर शून्य या इकाई के बराबर नहीं है) और n कोई पूर्ण संख्या है। संख्या $3^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ आदि का रूप ऐसा ही है। 1934 में आ. गेल्फोंद ने ये अन्वीक्षण समाप्त कर लिए। उन्होंने सिद्ध किया कि α^{β} रूप की सभी संख्याएं पारमित हैं (α और β कोई भी दो बीजगणितीय संख्याएं हैं, α का मान शून्य या एक के बराबर नहीं है, β अव्यतिमानी है)। उदाहरणार्थ, संख्या $(\sqrt[4]{5})^{\sqrt[3]{2}}$ पारमित है। α^{β} जैसी संख्याओं की पारमेयता से सरलतापूर्वक यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि सभी पूर्ण संख्याओं (बेशक 1, 10, 100, 1000 आदि को छोड़कर अन्य पूर्ण संख्याओं) के दशभू लघुगुणक पारमित होते हैं।

§ 93. वर्ग समीकरण. काल्पनिक और मिश्र संख्याएं

दूसरी कोटि के घात वाली अज्ञात राशि से युक्त बीजगणितीय समीकरण को वर्ग समीकरण कहते हैं। वर्ग समीकरण का सार्व रूप निम्नलिखित है :

$$ax^2+bx+c=0,$$

जहाँ a, b, c कोई प्रत संख्याएं हैं या ज्ञात राशियों वाले कोई प्रत वर्णिक व्यंजन हैं (इसमें a शून्य के बराबर नहीं हो सकता, अन्यथा समीकरण वर्ग नहीं रह जायेगा, प्रथमकोटिक में परिणत हो जायेगा। दोनों हिस्सों (पक्षों) में a से भाग देने पर प्राप्त होगा :

$$x^2+p(x)+q=0 \ \left(p=\frac{b}{a};\ q=\frac{c}{a}\right).$$

इस प्रकार का वर्ग समीकरण **अवकृत** कहलाता है; समीकरण ax^2+bx+c को **अनवकृत** कहते हैं। यदि b, c दोनों ही या दोनों में से कोई एक (b या c) शून्य हो, तो वर्ग समीकरण **अपूर्ण** कहलाता है; यदि b व c शून्य नहीं हों, तो वर्ग समीकरण **पूर्ण** कहलाता है।

उदाहरण.

$3x^2+8x-5=0$ पूर्ण अनवकृत वर्ग समीकरण;

$3x^2-5=0$ अपूर्ण अनवकृत वर्ग समीकरण;

$x^2-ax=0$ अपूर्ण अवकृत वर्ग समीकरण;

$x^2-12x+7=0$ पूर्ण अवकृत वर्ग समीकरण।

निम्न प्रकार का अपूर्ण वर्ग समीकरण

$$x^2=m \quad (m - \text{कोई ज्ञात राशि})$$

वर्ग समीकरण का सरलतम और सबसे महत्त्वपूर्ण रूप है, क्योंकि किसी भी वर्ग समीकरण को हल करने से पहले उसे इसी रूप में लाना पड़ता है। इस समीकरण के हल का रूप है :

$$x=\sqrt{m}.$$

तीन स्थितियां संभव हैं :

(1) यदि $m=0$, तो साथ ही $x=0$.

(2) यदि m कोई धन राशि है, तो उसके वर्गमूल $\sqrt{m}$ के दो मान होंगे — एक धनात्मक और दूसरा ऋणात्मक। उदाहरणार्थ, समीकरण $x^2=9$ को मान $x=+3$ और $x=-3$ संतुष्ट करते हैं। दूसरे शब्दों में, x के दो मान हैं : $+3$ और -3। इस बात को निम्न तरह से व्यक्त करते हैं : मूल के चिह्न (करणी) के पहले एक ही साथ जोड़ और घटाव, दोनों चिह्न लगा देते हैं, जैसे $x=\pm\sqrt{9}$। इस तरह से लिखने का अर्थ यह है कि व्यंजन $\sqrt{9}$ मूल के दो मूल्यों का परम मान व्यक्त करता है। हमारे उदाहरण में यह परम मान 3 है। राशि $\sqrt{m}$ अव्यतिमानी संख्या भी हो सकती है (दे. § 92)। ध्यातव्य है कि स्वयं m भी अव्यतिमानी संख्या हो सकती है। उदाहरणार्थ, मान लें कि समीकरण

$$x^2=\pi$$

को हल करना है (ज्यामिति की दृष्टि से इसका अर्थ है—इकाई त्रिज्या वाले वृत्त के बराबर क्षेत्रफल वाले वर्ग की भुजा ज्ञात करना)। इसका मूल है $x=\sqrt{\pi}$। संख्याओं का वर्गमूल निकालने की विधि दे. § 59 में)।

(3) यदि m कोई ऋण राशि है, तो समीकरण $x^2=m$ (जैसे $x^2=-9$) का न तो धनात्मक मूल होगा न ऋणात्मक ही, क्योंकि धन या ऋण किसी भी संख्या का वर्ग एक धनात्मक संख्या है। अतः कह सकते हैं कि समीकरण $x^2=-9$ का हल नहीं है, अर्थात् $\sqrt{-9}$ होता ही नहीं है।

ऋण संख्याओं को अपनाने के पहले समीकरण $2x+6=4$ के हल का अस्तित्व नकारने का आधार यही था। लेकिन ऋण संख्याओं को अपनाने के बाद यह समीकरण हल्य हो गया। इसी तरह, धन व ऋण संख्याओं के बीच हलातीत समीकरण $x^2=-9$ भी हल्य हो जाता है, जब हम एक नये प्रकार की संख्याओं – ऋण संख्याओं के वर्गमूलों– को अपना लेते हैं। इन संख्याओं को प्रथमतः इतालवी गणितज्ञ कार्दानो (Cardano) ने 16वीं शती के मध्य में घन समीकरण (दे. § 67) हल करने के सिलसिले में अपनाया था। कार्दानो इन्हें "पंडिताऊ" (सोफिस्टिक) संख्याएं कहते थे। 17वीं शती के चौथे दशक में डेकार्ट (Descartes) ने इनका नाम **"काल्पनिक संख्याएं"** रखा। यह नाम आज भी प्रचलित है। काल्पनिक संख्याओं के विपरीत, पहले की ज्ञात संख्याओं (धन, ऋण, और अव्यतिमानी संख्याओं) को **वास्तविक संख्या** का नाम दिया गया। वास्तविक व काल्पनिक संख्याओं के योग को **मिश्र संख्या** कहते हैं (यह गाउस (Gauss) द्वारा 1831 में रखे गये नाम complex से अनूदित है)। उदाहरणार्थ, $2+\sqrt{-3}$ एक मिश्र संख्या है। मिश्र संख्याओं को भी कभी-कभी काल्पनिक संख्याएं कहते हैं। मिश्र संख्याओं के बारे में सविस्तार देखें § 99 और आगे।

काल्पनिक संख्याओं को अपना लेने के बाद हम कह सकते हैं कि अपूर्ण वर्ग समीकरण $x^2=m$ के सदा दो हल होते हैं। यदि $m>0$, तो ये मूल वास्तविक होते हैं, इनका परम मान समान होता है, पर इनके चिह्न भिन्न होते हैं। यदि $m=0$, तो दोनों मूल शून्य के बराबर होते हैं; यदि $m<0$, तो वे काल्पनिक होते हैं।

§ 94. वर्ग समीकरणों का हल

अवकृत समीकरण $x^2+px+q=0$ का हल ढूंढने के लिए स्वतंत्र पद को दायें पक्ष में लाते हैं और दोनों पक्षों में $\left(\frac{p}{q}\right)^2$ जोड़ देते हैं। तब वाम

पक्ष पूर्ण वर्ग में परिणत हो जाता है और एक समतुल्य समीकरण प्राप्त होता है :

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

यह समीकरण सरलतम समीकरण $x^2=m$ से सिर्फ वाह्य रूप में भिन्न (इतर) है : x की जगह $x+\frac{p}{2}$ है और m की जगह $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$। अब

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

जिससे

$$\boxed{x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}} \qquad (1)$$

यह सूत्र दिखाता है कि किसी भी वर्ग समीकरण के दो मूल होते हैं। पर ये मूल काल्पनिक भी हो सकते हैं (यदि $\left(\frac{p}{2}\right)^2<q$)। यह भी संभव है कि दोनों मूल बराबर हों (यदि $\left(\frac{p}{q}\right)^2=q$)।

जब p कोई पूर्ण सम संख्या होता है, तो सूत्र (1) का उपयोग विशेष सुविधाजनक होता है।

उदाहरण 1.

$x^2-12x-28=0$; यहाँ $p=-12$, $q=-28$;

$x=6\pm\sqrt{6^2+28}\quad 6\pm\sqrt{64}=6\pm 8$;

$x_1=6+8=14$; $x_2=6-8=-2$.

उदाहरण 2. $x^2+12x+10=0$;

$x=-6+\sqrt{36-10}=-6\pm\sqrt{26}$;

$x_1=-6+\sqrt{26}\approx-0.9$; $x_2=-6-\sqrt{26}\approx-11.1$

उदाहरण 3. $x^2-2mx+m^2-n^2=0$;

$x=m\pm\sqrt{m^2-(m^2-n^2)}$

$=m\pm\sqrt{n^2}=m\pm n.$

$x_1=m+n$; $x_2=m-n.$

टिप्पणी. उदाहरण 2 में दोनों मूल वास्तविक ऋण संख्याएं हैं, पर वे अव्यतिमानी हैं (§ 92)। वर्ग समीकरण हल करने के लिए वर्गमूल कलन द्वारा भी निकाले जा सकते हैं (§ 59), और सारणी द्वारा भी (§ 2)।

p जब पूर्ण सम संख्या के बराबर नहीं होता है, तब दिये गये अवकृत वर्ग समीकरण को नीचे दिये गये सार्व सूत्र (3) से हल करना अधिक सुविधाजनक होता है; इस सूत्र में $a=1$ मान लेते हैं (दे. नीचे, उदाहरण 5)।

अनवकृत पूर्ण वर्ग समीकरण

$$ax^2+bx+c=0 \tag{2}$$

को निम्न सूत्र से हल कर सकते हैं

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \tag{3}$$

यह सूत्र समीकरण (2) के दोनों पक्षों में a से भाग देकर सूत्र (1) के प्रयोग से प्राप्त होता है।

उदाहरण 4. $3x^2-7x+4=0$

$$(a=3,\ b=-7,\ c=4).$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot3\cdot4}}{2\cdot3}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{6};$$

$$x_1=\frac{7+1}{6}=\frac{4}{3};\ x_2=\frac{7-1}{6}=1.$$

उदाहरण 5. $x^2+7x+12=0$

$$(a=1, b=7, c=12).$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-4\cdot12}}{2};$$

$$x_1=-3,\ x_2=-4.$$

उदाहरण 6. $0.60x^2+3.2x-8.4=0$

$$x\approx\frac{-3.2\pm\sqrt{(-3.2)^2-4\cdot0.60\cdot(-8.4)}}{2\cdot0.60};$$

$$x_1\approx\frac{-3.2+5.5}{2\cdot0.60}\approx1.9,$$

$$x_2 \approx \frac{-3.2-5.5}{2\cdot 0.60} \approx -7.2.$$

उदाहरण 6 में, जैसा कि व्यंजन $0.60x^2$ (न कि $0.6x^2$) से विदित होता है, संद सन्निकृत रूप में हैं। अतः सूत्र में निर्दिष्ट संक्रियाएं § 48-49 में बतायी गयी संक्षिप्त विधियों से सम्पन्न करनी चाहिए। हर हालत में यह ध्यान में रखा जाना चाहिए कि इन अनुच्छेदों में निरूपित नियमों के अनुसार फल में सिर्फ दो सार्थक अंक मिल सकते हैं। ध्यातव्य है कि हमारे उत्तर 0.1 तक की शुद्धता रखते हैं, पर इसका मतलब यह नहीं कि विचाराधीन समीकरण के वाम पक्ष में उनके मान रखने पर 0.1 तक की शुद्धता से शून्य के बराबर वाली संख्या मिल जाएगी। इसके विपरीत, वाम पक्ष में $x=1.9$ रखने पर मिलेगा :

$$0.60\cdot 1.9^2+3.2\cdot 1.9-8.4 \approx -0.2.$$

पर यदि x के मान में 0.1 जोड़ कर $x=2.0$ रखा जाये, तो मिलेगा :

$$0.60\cdot 2.0^2+3.2\cdot 2.0-8.4 \approx 0.4.$$

इस प्रकार, $x=1.9$ रखने पर वाम पक्ष ऋणात्मक था; $x=2.0$ रखने पर वह धनात्मक मिलता है। अतः वह शून्य के बराबर तब होगा, जब x का कोई ऐसा मान लेंगे जो 1.9 व 2.0 के बीच में कहीं हो। अतः $x=1.9$ रखने पर त्रुटि 0.1 से अधिक नहीं होती। इसी बात से इस कथन का अर्थ स्पष्ट होता है कि मूल 0.1 तक की शुद्धता से 1.9 के बराबर है।

यदि b कोई सम संख्या हो, तो सार्व सूत्र को निम्न रूप में भी लिख सकते हैं :

$$\boxed{x=\frac{-\frac{b}{a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}}.$$

उदाहरण 7. $3x^2-14x-80=0;$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{7^2+3\cdot 80}}{3}$$

$$=\frac{7\pm\sqrt{289}}{3}=\frac{7\pm 17}{3};$$

$$x_1=8;\quad x_2=-\frac{10}{3}.$$

संद a, b, c वर्णिक व्यंजनों के रूप में होने पर भी यह सूत्र सुविधाजनक होता है।

उदाहरण 8. $ax^2-2(a+b)+4b=0$;

$$x=\frac{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2-4ab}}{a}$$

$$=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2-2ab+b^2}}{a}$$

$$=\frac{a+b\pm(a-b)}{a};$$

$$x_1=2;\ x_2=2\frac{b}{a}.$$

§ 95. वर्ग समीकरण के मूलों के गुण

सूत्र

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

दिखाता है कि वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ हल करते वक्त निम्न तीन स्थितियां सामने आ सकती हैं :

(1) $b^2-4ac>0$; तब समीकरण के दोनों मूल वास्तविक तथा भिन्न (इतर) होंगे।

(2) $b^2-4ac=0$; तब समीकरण के दोनों मूल वास्तविक तथा परस्पर बराबर होंगे $\left(-\frac{b}{2a}\right.$ के बराबर होंगे। $\left.\right)$

(3) $b^2-4ac<0$; तब समीकरण के दोनों मूल काल्पनिक होंगे।

व्यंजन b^2-4ac, जिसके मान के आधार पर हम उपरोक्त तीन स्थितियों में भेद करते हैं, **विभेदक** कहलाता है।

जब मूल वास्तविक हों (अर्थात् जब $b^2-4ac\geqslant 0$ हो), तो उनके चिह्न का निर्णय मूलों के निम्न गुण के आधार पर करना चाहिए (**वियेटा प्रमेय**) :

अवकृत वर्ग समीकरण

$$x^2+px+q=0$$

के मूलों का योग अज्ञात राशि के प्रथमकोटिक घात के संद के बराबर पर चिह्न में विपरीत होता है, अर्थात्

$$x_1 + x_2 = -p;$$

मूलों का गुणन स्वतंत्र पद के बराबर होता है :

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

§ 96. वर्ग तिपद का गुणनखंड

वर्ग तिपद को प्रथम घात वाले (प्रथम कोटि के घात वाले) गुणनखंडों में निम्न प्रकार से विघटित किया जा सकता है : वर्ग समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ को हल करते है; यदि इस समीकरण के मूल x_1 व x_2 हैं, तो $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ।

उदाहरण 1. तिपद $2x^2 + 13x - 24$ को प्रथम घात वाले गुणनखंडों में तोड़ें । समीकरण $2x^2 + 13x - 24 = 0$ को हल करते हैं और मूल $x_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = -8$ ज्ञात करते हैं। अब तिपद $2x^2 + 13x - 24 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 8) = (2x - 3)(x + 8)$ ।

उदाहरण 2. $x^2 + a^2$ के गुणनखंड ज्ञात करें । समीकरण $x^2 + a^2 = 0$ के मूल काल्पनिक हैं : $x_1 = \sqrt{-a^2}$; $x_2 = -\sqrt{-a^2}$, इसलिए $x^2 + a^2$ को प्रथम घात के वास्तविक गुणनखंडों में नहीं तोड़ा जा सकता । काल्पनिक गुणनखंड निम्न प्रकार से व्यक्त होते हैं :

$$x^2 + a^2 = (x + \sqrt{-a^2}) \times (x - \sqrt{-a^2}) = (x + ai)(x - ai)$$

(i द्वारा काल्पनिक संख्या $\sqrt{-1}$ को द्योतित किया गया है) ।

§ 97. उच्च घातों वाले समीकरणों का वर्ग समीकरणों की सहायता से हल

उच्च घातों वाले चंद बीजगणितीय समीकरणों को वर्ग समीकरण का रूप देकर हल किया जा सकता है। निम्न स्थितियाँ महत्त्वपूर्ण हैं ।

(1) कभी-कभी समीकरण के वाम पक्ष को ऐसे गुणनखंडों में सुगमता से तोड़ा जा सकता है, जिनमें से कोई भी तीसरी कोटि से अधिक ऊँचे घात वाला बहुपद नहीं होता । ऐसी स्थिति में प्रत्येक गुणनखंड को अलग-अलग शून्य के

बराबर करने से प्राप्त समीकरणों को हल करते हैं। इनके मूल आरम्भिक समीकरण के मूल होते हैं।

उदाहरण 1. $x^4+5x^3+6x^2=0$.

बहुपद $x^4+5x^3+6x^2$ को सरलता से दो गुणनखंडों में तोड़ा जा सकता है: x^2 और (x^2+5x+6)। समीकरण $x^2=0$ हल करते हैं; इसके दो समान मूल हैं: $x_1=x_2=0$। समीकरण $x^2+5x+6=0$ हल करते हैं; इसके मूलों को x_3 व x_4 से द्योतित करने पर $x_3=-2$, $x_4=-3$ प्राप्त होता है। आरम्भिक समीकरण के मूल हुए : $x_1=x_2=0$; $x_3=-2$; $x_4=-3$।

उदाहरण 2. समीकरण $x^3=8$ हल करें।

इसे $x^3-8=0$ के रूप में लिखकर वाम पक्ष को गुणनखंडों में तोड़ते हैं : $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$। समीकरण $x-2=0$ से $x_1=2$ प्राप्त होता है। समीकरण $x^2+2x+4=0$ से मूल $x_2=-1+\sqrt{-3}$, $x_3=-1-\sqrt{-3}$ प्राप्त होते हैं। इस प्रकार, समीकरण $x^3=8$ के तीन मूल हैं—एक वास्तविक और दो काल्पनिक। अन्य शब्दों में, $\sqrt[3]{8}$ के एक स्पष्ट वास्तविक मान 2 के अतिरिक्त दो अन्य काल्पनिक मान भी हैं (तुलना करें § 112, उदाहरण 3 से)।

(2) यदि समीकरण का रूप $ax^{2n}+bx^n+c=0$ है, तो नई अज्ञात राशि $z=x^n$ प्रयुक्त करके इसे वर्ग समीकरण का रूप दे सकते हैं।

उदाहरण 3. $x^4-13x^2+36=0$। इसे $(x^2)^2-13x^2+36=0$ के रूप में लिखकर x^2 की जगह नई अज्ञात राशि z रखते हैं, जिससे समीकरण का रूप $z^2-13z+36=0$ हो जाता है। इसके मूल $z_1=9$, $z_2=4$ हैं। अब समीकरण $x^2=9$ तथा $x^2=4$ को हल करते हैं। पहले समीकरण के मूल $x_1=3$, $x_2=-3$ हैं और दूसरे समाकरण के मूल $x_3=2$, $x_4=-2$ हैं। प्रत्त समीकरण के मूल हुए : 3, −3, 2, −2।

इस तरह से $ax^4+bx^2+c=0$ रूप वाले किसी भी समीकरण को हल किया जा सकता है; इसे **दुवर्गी** समीकरण कहते हैं।

उदाहरण 4. $x^6-16x^3+64=0$। इस समीकरण को $(x^3)^2-16x^3+64=0$ में नई अज्ञात राशि $z=x^3$ रखते हैं। समीकरण $z^2-16z+64=0$ प्राप्त होता है जिसके दो समान मूल $z_1=z_2=8$ हैं। अब समीकरण $x^3=8$ हल करते हैं; इससे (दे. उदाहरण 2) x_1 2, $x_2=-1+\sqrt{-3}$, $x_3=-1-\sqrt{-3}$। अन्य तीन मूल दी हुई स्थिति में इन तीन मूलों के बराबर हैं।

§ 98. दो अज्ञात राशियों वाले द्वितीय घात के समीकरणों का तंत्र

दो अज्ञात राशियों वाले द्वितीय घात के समीकरण का सार्व रूप है :

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,$$

जिसमें a, b, c, d, e, f प्रत्त संख्याएं या ज्ञात राशियों वाले वर्णिक व्यंजक हैं। दो अज्ञात राशियों वाले द्वितीय घात वाले एक समीकरण के असंख्य हल होते हैं (तुलना करें § 86 से)।

दो अज्ञात राशियों वाले दो समीकरणों का तंत्र, जिनमें से एक वर्ग समीकरण है और दूसरा रैखिक, § 87 में वर्णित प्रतिस्थापन-विधि द्वारा हल किया जा सकता है। प्रथम घात वाले समीकरण की सहायता से एक अज्ञात राशि को दूसरी में व्यक्त करते हैं। प्राप्त व्यंजन को द्वितीय घात वाले समीकरण में रखने पर जो समीकरण प्राप्त होगा, उसमें सिर्फ एक अज्ञात राशि होगी। सामान्यत: यह कोई वर्ग समीकरण होता है (दे. उदाहरण 1)। पर ऐसा भी संभव है कि द्वितीय घात वाले व्यंजन परस्पर कट जाते हैं; इस स्थिति में हमें प्रथम घात वाला समीकरण मिलेगा (दे. उदाहरण 2)।

उदाहरण 1. $x^2-3xy+4y^2-6x+2y=0$, $x-2y=3$.

दूसरे समीकरण से $x=3+2y$ ज्ञात करते हैं। प्रथम समीकरण में x का यह मान रखने पर

$$(3+2y)^2-3\,(3+2y)y+4y^2-6(3+2y)+2y=0,$$

जिससे

$$9+12y+4y^2-9y-6y^2+4y^2-18y+2y=0,$$

$$2y^2-7y-9=0,$$

$$y=\frac{7\pm\sqrt{49+72}}{4};$$

$$y_1=\tfrac{9}{2},\ y_2=-1.$$

प्राप्त मान $y_1=\frac{9}{2}$, $y_2=-1$ को व्यंजन $x=3+2y$ में रखते हैं, जिससे $x_1=12$, $x_2=1$.

उदाहरण 2. $x^2-y^2=1$; $x+y=2$.

दूसरे समीकरण से $y=2-x$ ज्ञात करते हैं। प्रथम समीकरण में यह व्यंजन रखने पर $x^2-(2-x)^2=1$ मिलता है। समरूप पदों को साथ करने पर द्वितीय घात वाले पद परस्पर कट जाते हैं, जिसके कारण $-4+4x=1$ मिलता है; इससे $x=\frac{5}{4}$। यह मान व्यंजन $y=2-x$ में रखने पर $y=\frac{3}{4}$।

दो अज्ञात राशियों वाले दो द्वितीय घात के समीकरणों का तंत्र निम्न विधि से हल हो सकता है : यदि किसी एक समीकरण में पद ax^2 (या पद ay^2) अनुपस्थित है, तो इस समीकरण से x (या y) को y (या x) के जरिए व्यक्त करके प्रतिस्थापन-विधि का उपयोग करते हैं; यदि पद ax^2 व cy^2 दोनों ही समीकरणों में उपस्थित हैं, तो पहले जोड़-घटाव वाली विधि का उपयोग करते हैं, ताकि बिना ax^2 या cy^2 वाला समीकरण प्राप्त हो सके। इसके बाद प्रतिस्थापन-विधि से किसी एक अज्ञात राशि का उन्मूलन करते हैं और ऐसा समीकरण प्राप्त करते हैं, जिसमें सिर्फ एक अज्ञात राशि रह जाती है। अक्सर यह चौथे घात का समीकरण होता है, जिसे वर्ग समीकरण का रूप देना अपवाद-जनक स्थितियों में ही संभव होता है, पर ये स्थितियां ज्यामितिक प्रश्नों को हल करने में अक्सर उत्पन्न होती हैं।

उदाहरण 3.

$$x^2+xy+2y^2=74,\ 2x^2+2xy+y^2=73.$$

x^2 तथा y^2 वाले पद दोनों ही समीकरणों में मौजूद हैं, अत: जोड़-घटाव की विधि का प्रयोग करते हैं, ताकि बिना y^2 वाला समीकरण (उदाहरणस्वरूप) मिल सके :

$$\begin{array}{r|c|r} 2x^2+2xy+y^2=73 & 2 & 4x^2+4xy+2y^2=146 \\ x^2+xy+2y^2=74 & & x^2+xy+2y^2=74 \\ & & - \quad - \quad - \quad - \\ \hline & & 3x^2+3xy \quad = 72 \end{array}$$

अंतिम समीकरण से y को x के माध्यम से व्यक्त करते हैं :

$$y=\frac{24-x^2}{x}$$

यह व्यंजन किसी एक (उदाहरणतया, प्रथम) समीकरण में रखने पर :

$$x^2+x\frac{24-x^2}{x}+2\frac{(24-x^2)^2}{x^2}=74$$

सरल करने पर :

$$x^4+24x^2-x^4+1152-96x^2+2x^4=74x^2;$$
$$2x^4-146x^2+1152=0;$$
$$x^4-73x^2+576=0.$$

यह एक दुवर्गी समीकरण है (दे. § 97, उदाहरण 3)। $x^2=z$ मानकर इसे वर्ग समीकरण $z^2-73z+576=0$ का रूप देते हैं, जिससे

$$z = \frac{73 \pm \sqrt{73^2 - 4.576}}{2} = \frac{73 \pm \sqrt{3025}}{2} = \frac{73 \pm 55}{2}.$$

$$z_1 = 64; \ z_2 = 9.$$

प्रथम हल से $x_1 = 8$, $x_2 = -8$ और दूसरे हल से $x_3 = 3$, $x_4 = -3$ मिलता है। ये मान व्यंजन $y = \frac{24 - x^2}{x}$ में रखने पर y के तदनुरूप मान मिलेंगे :

$$y_1 = -5, \ y_2 = +5, \ y_3 = +5, \ y_4 = -5.$$

दूसरे घात के समीकरणों का तंत्र हल करने में कृत्रिम विधियों का भी सफलतापूर्वक प्रयोग हो सकता है, जिससे उत्तर शीघ्र और खूबसूरती के साथ मिलता है।

§ 99. मिश्र संख्याएं

बीजगणित के विकास के साथ-साथ (दे. § 67) ज्ञात धन व ऋण संख्याओं के अतिरिक्त एक नये प्रकार की संख्याओं को अपनाना पड़ा। इन्हें **मिश्र संख्याएं** कहते हैं।

मिश्र संख्या का रूप है $a + bi$; इसमें a तथा b वास्तविक संख्याएं हैं, और i एक नये प्रकार की संख्या है, जिसे **काल्पनिक इकाई** कहते हैं। "काल्पनिक" संख्याएं (इनके बारे में देखें § 93) मिश्र संख्याओं के विशेष रूप हैं, जिनमें $a = 0$ होता है। दूसरी ओर, वास्तविक (अर्थात् ऋण व धन) संख्याएं भी मिश्र संख्या के विशेष रूप हैं, जिनमें $b = 0$ होता है।

वास्तविक संख्या a को मिश्र संख्या $a + bi$ का **क्रमक भुज** कहते हैं; वास्तविक संख्या b को मिश्र संख्या $a + bi$ का **क्रमित भुज** कहते हैं।* संख्या i का प्रमुख गुण यह है कि गुणन $i \cdot i$ बराबर -1 होता है, अर्थात्

$$i^2 = -1. \qquad (1)$$

लंबे समय तक ऐसी कोई भौतिक राशि ज्ञात नहीं हो पायी थी, जिसके साथ संक्रियाएं मिश्र संख्याओं पर लागू नियमों के अनुसार (विशेषकर नियम (1) के अनुसार) संपन्न की जातीं। इसीलिए इस तरह के नाम दिये गये,

---

* [संक्षेप में सिर्फ क्रमक तथा क्रमित शब्दों का उपयोग करेंगे।]

जैसे "काल्पनिक" इकाई, "काल्पनिक" संख्या आदि। अब ऐसी अनेक भौतिक राशियां ज्ञात हैं और मिश्र संख्याएं सिर्फ गणित में ही नहीं, भौतिकी तथा तकनीक में भी प्रयुक्त हो रही हैं (जैसे प्रत्यास्थता-सिद्धांत, विद्युतकनीक, वातप्रवेगिकी, आदि में)।

आगे (§ 105 में) मिश्र संख्याओं की ज्यामितिक व्याख्या दी गयी है। इसके पहले (§§ 101-104 में) इनके साथ संक्रियाओं के नियम स्थापित किये गये हैं; इस सिलसिले में संख्या i के भौतिक या ज्यामितिक अर्थ के प्रश्न की उपेक्षा की गई है, क्योंकि विज्ञान के अलग-अलग क्षेत्रों में इसका अर्थ भिन्न हो सकता है।

मिश्र संख्याओं के साथ प्रत्येक संक्रिया के नियम इस संक्रिया की परिभाषा से निगमित हैं। पर मिश्र संख्याओं के साथ की संक्रियाओं की परिभाषाएं मन-चाहे ढंग से नहीं गढ़ी गई हैं। उन्हें इस प्रकार से निर्धारित किया गया है कि वे वास्तविक संख्याओं के साथ संक्रियाओं का विरोध न करें, उनके अनुरूप बनी रहें (तुलना करें § 35 से)। मिश्र संख्याएं वास्तविक संख्याओं से बिल्कुल अलग नहीं हैं।

§ 100. मिश्र संख्याओं के बारे में प्रमुख मान्यताएं

(1) वास्तविक संख्या a को $a+0\cdot i$ (या $a-0\cdot i$) के रूप में लिखते हैं।

उदाहरण. आलेख $3+0\cdot i$ का अर्थ वही है, जो आलेख 3 का है। आलेख $-2+0\cdot i$ का अर्थ -2 है। आलेख $\frac{3\sqrt{2}}{2}+0\cdot i$ का अर्थ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ है।

टिप्पणी. साधारण अंकगणित में भी कुछ इसी तरह करते हैं: आलेख $\frac{5}{1}$ से वही द्योतित करते हैं, जो 5 से। आलेख 002 का वही अर्थ है, जो 2 का, आदि।

(2) $0+bi$ रूप वाली मिश्र संख्या को "शुद्ध काल्पनिक संख्या" कहते हैं। आलेख bi का वही अर्थ है, जो $0+bi$ का।

(3) दो मिश्र संख्याएं $a+bi$, $a'+b'i$ परस्पर बराबर मानी जाती हैं, यदि उनके क्रमक भुज तथा क्रमित भुज अलग-अलग बराबर होते हैं, अर्थात् यदि $a=a'$, $b=b'$। ऐसी परिभाषा मानने का कारण निम्न विचार-क्रम है: यदि (उदाहरणार्थ) $2+5i=8+2i$ जैसी समता संभव होती, तो बीजगणित

14-01458

के नियमों के अनुसार $i=2$ होता, पर i को किसी वास्तविक संख्या के बराबर नहीं होना चाहिए।

टिप्पणी. मिश्र संख्याओं का *जोड़* क्या है, यह हम लोगों ने अभी तक निर्धारित नहीं किया है। इसलिए यदि सही कहा जाये तो, संख्या $2+5i$ को संख्या 2 और $5i$ का जोड़ मानना अभी गलत होगा। अधिक उपयुक्त यह कहना होगा कि हमारे पास **वास्तविक संख्याओं का युग्म** है: 2 (क्रमक भुज) और 5 (क्रमित भुज); ये संख्याएं एक नये प्रकार की संख्या को जन्म देती हैं जिन्हें हम *औपचारिकत:* $2+5i$ *से द्योतित करते हैं।*

§ 101. मिश्र संख्याओं का जोड़

परिभाषा. *मिश्र संख्या* $a+bi$ *तथा* $a'+b'i$ *का जोड़ मिश्र संख्या* $(a+a')+(b+b')i$ *है।*

यह परिभाषा सामान्य बहुपदों के साथ संक्रियाओं के नियमों पर आधारित है।

उदाहरण 1. $(-3+5i)+(4-8i)=1-3i$.

उदाहरण 2. $(2+0i)+(7+0\cdot i)=9+0i$। चूंकि आलेख $2+0i$ का अर्थ 2 है (दे. § 100) इसलिए संपादित संक्रिया का फल सामान्य अंकगणित के अनुरूप $(2+7=9)$ है।

उदाहरण 3. $(0+2i)+(0+5i)=0+7i$, अर्थात् (दे. § 100) $2i+5i=7i$।

उदाहरण 4. $(-2+3i)+(-2-3i)=-4$.

उदाहरण 4 में दो मिश्र संख्याओं का जोड़ एक वास्तविक संख्या है। ऐसी दो मिश्र संख्याएं, जिनके काल्पनिक भागों के चिह्न विपरीत हों, **संयुग्मी मिश्र संख्याएं** कहलाती हैं (जैसे $a+bi$ और $a-bi$)। इनका योग एक वास्तविक संख्या $(2a)$ है। दो असंयुग्मी संख्याओं का योग भी वास्तविक संख्या हो सकता है, जैसे $(3+5i)+(4-5i)=7$।

टिप्पणी. जोड़ की संक्रिया परिभाषित कर लेने के बाद अब हम मिश्र संख्या $a+bi$ को संख्या a तथा bi का योग कह सकते हैं। यथा, संख्या 2 (जिसे हम औपचारिकत: $2+0i$ लिखते हैं) और $5i$ (जिसे हम § 100 के अनुसार $0+5i$ से द्योतित करते हैं) जुड़कर (परिभाषानुसार) संख्या $2+5i$ बनाती हैं।

§ 102. मिश्र संख्याओं का घटाव

परिभाषा. *मिश्र संख्या $a+bi$ (अवकल्य) और $a'+b'i$ (व्यवकारी) का अंतर मिश्र संख्या $(a-a')+(b-b')i$ को कहते हैं।*

उदाहरण 1. $(-5+2i)-(3-5i)=-8+7i$.

उदाहरण 2. $(3+2i)-(-3+2i)=6+0i=6$.

उदाहरण 3. $(3-4i)-(3+4i)=-8i$.

टिप्पणी. मिश्र संख्याओं के घटाव को जोड़ की विपरीत संक्रिया के रूप में भी परिभाषित किया जा सकता है, अर्थात् घटाव की प्रक्रिया में हम ऐसी मिश्र संख्या $(x+yi)$ ढूंढ़ते हैं कि $(x+yi)+(a'+b'i)=(a+bi)$ हो जाये। § 101 की परिभाषा के अनुसार :

$$(x+a')+(y+b')i=a+bi$$

मिश्र संख्याओं की समता की शर्त्त के अनुसार (दे. § 100) :

$$x+a'=a, \ y+b'=b.$$

इन समीकरणों से हम देखते हैं $x=a-a'$, $y=b-b'$.

§ 103. मिश्र संख्याओं का गुणा

मिश्र संख्याओं के गुणा की परिभाषा इस प्रकार निर्धारित की गयी है कि (1) संख्याएं $a+bi$ और $a'+b'i$ को बीजगणितीय द्विपदों की तरह गुणित किया जा सके, और (2) i में ऐसा गुण होना चाहिए कि $i^2=-1$ हो। पहली शर्त्त के अनुसार $(a+bi)(a'+b'i)$ को $aa'+(ab'+ba')i+bb'i^2$ के बराबर होना चाहिए; शर्त्त (2) के अनुसार इस व्यंजन को $(aa'-bb')+(ab'+ba')i$ के बराबर होना चाहिए। निम्न परिभाषा इन्हीं विचारों के अनुरूप है।

परिभाषा. मिश्र संख्याओं $a+bi$ और $a'+b'i$ का गुणा निम्न मिश्र संख्या को कहते हैं :

$$(aa'-bb')+(ab'+ba')i \tag{1}$$

टिप्पणी 1. मिश्र संख्याओं के गुणा का नियम निर्धारित करने से पहले समता $i^2=-1$ सिर्फ एक मांग के रूप में थी। अब यह परिभाषा से विकसित होती है। आलेख i^2, अर्थात् $i \cdot i$ आलेख $(0+1\cdot i)\ (0+1\cdot i)$ के समतुल्य है। यहां $a=0$, $b=1$, $a'=0$, $b'=1$ है। यहां $aa'-bb'=-1$,

$ab'+ba'=0$ है और इसीलिए गुणनफल $-1+0i$ अर्थात् -1 है।

टिप्पणी 2 व्यवहार में सूत्र (1) के प्रयोग की कोई आवश्यकता नहीं है। प्रत्त संख्याओं को दुपदों की तरह गुणा करके $i^2=-1$ रख देना काफी है।

उदाहरण 1. $(1-2i)\ (3+2i)=3-6i+2i-4i^2$

$$=3-6i+2i+4=7-4i$$

उदाहरण 2. $(a+bi)\ (a-bi)=a^2+b^2$.

उदाहरण 2. दिखाता है कि संयुग्मी मिश्र संख्याओं का गुणन एक वास्तविक धन संख्या है। असंयुग्मी मिश्र संख्याओं का गुणनफल भी वास्तविक धन संख्या हो सकता है; उदाहरणतया, $(2+3i)\ (4-6i)=26$ (तुलना करें § 101, उदाहरण 4 से)। पर *यदि दो मिश्र संख्याओं का जोड़ और गुणा दोनों ही वास्तविक संख्याएं हैं, तो प्रत्त मिश्र संख्याएं निश्चित रूप से संयुग्मी हैं।*

§ 104. मिश्र संख्याओं का भाग

वास्तविक संख्याओं के भाग की परिभाषा के अनुरूप निम्न परिभाषा निर्धारित की गई है।

परिभाषा. *मिश्र संख्या $a+bi$ (भाज्य) में मिश्र संख्या $a'+b'i$ (भाजक) से भाग देने का अर्थ है ऐसी संख्या $x+yi$ (भागफल) ढूंढ़ना, जिसे भाजक से गुणा करने पर भाज्य मिल जाये।*

यदि भाजक शून्य के बराबर नहीं है, तो भाग हमेशा संभव है और भागफल एकल होता है (प्रमाण दे. टिप्पणी 2 में)। व्यवहार में भागफल निम्न विधि से प्राप्त करना सुविधाजनक होता है।

उदाहरण 1. भागफल ज्ञात करें $(7-4i) : (3+2i)$.

भिन्न $\dfrac{7-4i}{3+2i}$ लिखकर $3+2i$ की संयुग्मी संख्या $3-2i$ से इसका प्रसार करते हैं (तुलना करें § 103, उदाहरण 1, 2 से)। प्राप्त होता है:

$$\frac{(7-4i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{13-26i}{13}=1-2i.$$

उदाहरण 2. $\dfrac{-2+5i}{-3-4i}=\dfrac{(-2+5i)(-3+4i)}{(-3-4i)(-3+4i)}=\dfrac{-14-23i}{25}$

$$=-0.56-0.92i.$$

उदाहरण 3. $\frac{-6+21i}{4-14i}=-\frac{3}{2}$ । यहाँ सबसे सरल विधि है भिन्न को $-2+7i$ से काटना ।

उदाहरण 1 और 2 का अनुसरण करके सामान्य सूत्र भी ज्ञात किया जा सकता है :

$$(a+bi) : (a'+b'i)=$$
$$\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+\frac{a'b-b'a}{a'^2+b'^2}i. \qquad (1)$$

यह सिद्ध करने के लिए कि (1) का दायां पक्ष सचमुच में भागफल है, उसमें $a'+b'i$ से गुणा कर देना काफी रहेगा; इससे $a+bi$ मिल जायेगा ।

टिप्पणी 1. सूत्र (1) को भाग की परिभाषा भी माना जा सकता है (तुलना करें §§ 101-102 की परिभाषाओं से) ।

टिप्पणी 2. सूत्र (1) एक और विधि से प्राप्त हो सकता है । परिभाषा के अनुसार $(a'+b'i)(x+yi)=a+bi$ होना चाहिए । अतः (दे. § 100) निम्न दो समीकरण बनने चाहिए :

$$a'x-b'y=a;\ b'x+a'y=b \qquad (2)$$

समीकरणों के इस तंत्र का हल एकल हैं :

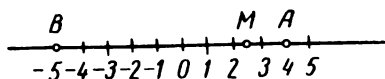
$$x=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2};\quad y=\frac{a'b+b'a}{a'^2+b'^2},$$

यदि $\frac{a'}{b'}\neq\frac{b'}{a'}$ (§ 88) अर्थात् यदि $a'^2+b'^2\neq 0$.

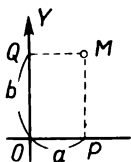
एक स्थिति $(a'^2+b'^2=0)$ पर विचार करना बाकी रह जाता है । यह स्थिति तभी संभव है, जब $a'=0$ और $b'=0$, अर्थात् जब भाजक $a'+b'i$ शून्य के बराबर है (यह न भूलें कि a' व b' वास्तविक संख्याएं हैं) । इस दशा में यदि भाजक $a+bi$ भी शून्य के बराबर है, तो भागफल एक अनिश्चित राशि है (दे. § 38) । यदि भाजक शून्य नहीं है, तब भागफल का अस्तित्त्व ही नहीं रह जाता (कहते हैं कि वह अनन्त हैं) (दे. § 38) ।

§ 105. मिश्र संख्याओं का ज्यामितिक निरूपण

मिश्र संख्याओं को चित्र 2 की भाँति सरल रेखा के बिंदुओं से दिखाया जा सकता है । चित्र में बिंदु A से संख्या 4 निरूपित है, बिंदु B से संख्या -5 ।

इन संख्याओं को कर्त (रेखाखंड) OA, OB से भी निरूपित किया जा सकता है, यदि इनकी लंबाई को ही नहीं, दिशा को भी ध्यान में रखा जाये।

चित्र 2

अंकरेखा का हर बिंदु M किसी न किसी वास्तविक संख्या का संकेत है (M किसी व्यतिमानी संख्या का संकेन देता है, जब लंबाई OM किसी इकाई लंबाई से नापी जा सकती है; यदि OM किसी भी इकाई लंबाई से पूर्ण संख्या में नहीं नापी जा सकती, तो M अव्यतिमानी संख्या द्योतित करता है)। इस प्रकार, अंकरेखा पर मिश्र संख्याओं के लिए स्थान नहीं बचता।

परंतु मिश्र संख्या को **अंकतल** पर व्यक्त किया जा सकता है। इसके लिए हम लोग समतल पर एक समकोणिक दिशांक-व्यूह का चयन करते हैं (§ 251), जिसके दोनों अक्षों पर समान पैमाना अंकित रहता है (चित्र 3)। मिश्र संख्या $a+bi$ को हम बिंदु M से द्योतित करते हैं, जिसका क्रमक x (चित्र 3 में $x=OP=QM$) मिश्र संख्या के क्रमक a के बराबर होता है और क्रमित y ($OQ=PM$) मिश्र संख्या के क्रमित के बराबर होता है।

चित्र 3

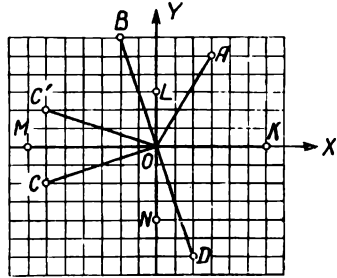
उदाहरण. चित्र 4 में क्रमक $x=3$ और क्रमित $y=5$ वाला बिंदु A मिश्र संख्या $3+5i$ को निरूपित करता है। बिंदु B मिश्र संख्या $-2+6i$ को व्यक्त करता है; बिंदु C मिश्र संख्या $-6-2i$ को; बिंदु D मिश्र संख्या $2-6i$ को।

वास्तविक संख्याओं को (जिनका मिश्र रूप $a+0i$ है) X-अक्ष के बिंदुओं से द्योतित करते हैं; शुद्ध काल्पनिक संख्याओं को (जिनका रूप $0+bi$ है) Y-अक्ष के बिंदुओं से द्योतित करते हैं।

उदाहरण. चित्र 4 में बिंदु K वास्तविक संख्या 6 (या मिश्र संख्या $6+0i$) को द्योतित करता है, बिंदु L शुद्ध काल्पनिक संख्या $3i$ (अर्थात् $0+3i$) को द्योतित करता है; बिंदु N शुद्ध काल्पनिक संख्या $-4i$ को

द्योतित करता है (जो $0-4i$ है)। दिशांक-मूल O संख्या 0 (अर्थात् $0+0i$) द्योतित करता है।

चित्र 4

संयुग्मी मिश्र संख्याएं क्रमक अक्ष के सापेक्ष सममित बिंदु-युग्मों द्वारा द्योतित होती हैं; यथा, चित्र 4 में बिंदु C व C' संयुग्मी संख्या $-6-2i$ व $-6+2i$ द्योतित करते हैं।

मिश्र संख्याओं को दिष्ट कर्तों (सदिशों) द्वारा भी द्योतित कर सकते हैं, जो बिंदु O से शुरू होते हैं और अंकतल के तदनुरूप बिंदु पर समाप्त होते हैं। यथा, मिश्र संख्या $-2+6i$ को सिर्फ बिंदु B से ही नहीं सदिश OB द्वारा भी द्योतित कर सकते हैं (चित्र 4); मिश्र संख्या $-6-2i$ सदिश OC से द्योतित होती है, इत्यादि।

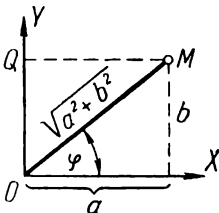
टिप्पणी. किसी कर्त (रेखाखंड) को **सदिश** का नाम देकर हम इस बात पर जोर देते हैं कि *कर्त की लंबाई ही नहीं, उसकी दिशा महत्त्वपूर्ण है*। दो सदिश तभी बराबर माने जाते हैं, जब उनकी लंबाइयां समान होती हैं और उनकी दिशाएं भी समान होती हैं।

§ 106. मिश्र संख्या का मापांक और अनुतर्क

मिश्र संख्या को निरूपित करने वाले सदिश की लंबाई को मिश्र संख्या का **मापांक** कहते हैं। किसी भी शून्येतर मिश्र संख्या का मापांक एक धन संख्या होता है। मिश्र संख्या $a+bi$ को $|a+bi|$ अथवा r से द्योतित करते हैं। आरेख (चित्र 5) से स्पष्ट है कि

चित्र 5

$$r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2} \qquad (1)$$

वास्तविक संख्या का मापांक उसके परम मान के बराबर होता है। संयुग्मी मिश्र संख्या $a+bi$ तथा $a-bi$ के मापांक एक जैसे होते हैं।

उदाहरण 1. मिश्र संख्या $3+5i$ का मापांक (अर्थात् सदिश OA की लंबाई, चित्र 4) है: $\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}\approx 5.83$

उदाहरण 2. $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\approx 1.41.$

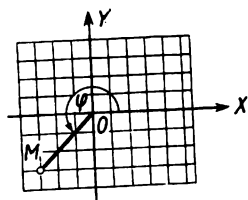
उदाहरण 3. $|-3+4i|=5.$

उदाहरण 4. संख्या -7 (अर्थात् $-7+0i$) का मापांक सदिश OM (चित्र 4) के बराबर है। यह लंबाई धन संख्या 7 से व्यक्त होती है, अर्थात्

$$|-7+0i|=\sqrt{(-7)^2+0^2}=7$$

उदाहरण 5. संख्या $-4i$ का मापांक (सदिश ON की लंबाई, चित्र 4) धन संख्या 4 के बराबर है।

उदाहरण 6. संख्या $-6-2i$ का मापांक (सदिश OC की लंबाई, चित्र 4) $\sqrt{40}\approx 6.32$ के बराबर है। संख्या $-6+2i$ (सदिश OC' की लंबाई, चित्र 4) भी $\sqrt{40}$ के बराबर है।

यदि सदिश OM किसी मिश्र संख्या $a+bi$ को द्योतित करता है, तो क्रमक अक्ष की धनात्मक दिशा और सदिश OM के बीच का कोण φ मिश्र संख्या $a+bi$ का **अनुतर्क** कहलाता है। चित्र 6 में सदिश OM मिश्र संख्या $-3-3i$ को द्योतित करता है। कोण XOM मिश्र संख्या का अनुतर्क है।

चित्र 6

संख्या 0 का अनुतर्क बिल्कुल अनिश्चित होता है।

प्रत्येक शून्येतर मिश्र संख्या के असंख्य अनुतर्क होते हैं और वे एक-दूसरे से पूरे चक्करों की पूर्ण संख्या (अर्थात् $360°k$, k कोई पूर्ण संख्या) का अंतर रखते हैं। यथा, मिश्र संख्या $-3-3i$ के अनुतर्क वे सारे कोण होते हैं, जिनका रूप $225°\pm 360°k$ जैसा होता है; उदाहरणार्थ, $225°+360°=585°$, $225°-360°=-135°$।

अनुतर्क φ मिश्र संख्या $a+bi$ के दिशांकों (a, b) के साथ निम्न सूत्रों से जुड़ा होता है (दे. चित्र 5):

$$\text{tg}\,\varphi=\frac{b}{a}, \qquad (2)$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{3}$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{4}$$

पर इनमें से एक भी सूत्र अपने-आप में पर्याप्त नहीं है कि वह क्रमक और क्रमित के आधार पर अनुतर्क ज्ञात करा सके (दे. नीचे के उदाहरण)।

उदाहरण 1. मिश्र संख्या $-3-3i$ का अनुतर्क ज्ञात करें।

सूत्र (2) के अनुसार $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-3}{-3} = 1$. इस शर्त्त को कोण 45° और 225° पूरा करते हैं। पर कोण 45° प्रत्त संख्या $-3-3i$ का अनुतर्क नहीं हो सकता (चित्र 6)। सही उत्तर होगा $\varphi = 225°$ (या $-135°$, या 585° आदि)। इस उत्तर का आधार यह है कि प्रत्त संख्या के क्रमक और क्रमित दोनों ही ऋणात्मक हैं और इसका मतलब है कि बिंदु M तीसरे चतुर्थांश में है।

दूसरी विधि. सूत्र (3) से $\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ज्ञात करते हैं। सूत्र (4) दिखाता है कि $\sin\varphi$ भी ऋणात्मक है। इसका मतलब है कि कोण φ तीसरे चतुर्थांश में है, इसलिए $\varphi = 225° \pm 360°k$.

उदाहरण 2. मिश्र संख्या $-2+6i$ का अनुतर्क ज्ञात करें। $\operatorname{tg}\varphi = \frac{6}{-2} = -3$ है। चूंकि क्रमक ऋणात्मक है और क्रमित धनात्मक है, इसलिए कोण φ दूसरे चतुर्थांश में है। सारणी की सहायता से ज्ञात करते हैं कि $\varphi \approx 180° - 72° = 108°$। दे. चित्र 4, जिसमें बिंदु B संख्या $-2+6i$ को द्योतित करता है।

अनुतर्क का अल्पतम परम मान वाला मूल्य उसका **मुख्य** मान कहलाता है। यथा, मिश्र संख्या $-3-3i$, $2i$, $-5i$ के अनुतर्क के मुख्य मान हैं। क्रमशः $-135°$, $+90°$, $-90°$।

वास्तविक धन संख्या के अनुतर्क का मुख्य मान 0° है; ऋण संख्याओं (वास्तविक) के अनुतर्क का मुख्य मान 180° माना गया है (न कि $-180°$)।

संयुग्मी मिश्र संख्याओं के अनुतर्क के मुख्य मानों के परम मान एक जैसे होते हैं, पर उनके चिह्न विपरीत होते हैं। यथा, संख्या $-3+3i$ और $-3-3i$ के अनुतर्क के मुख्य मान क्रमशः 135° और $-135°$ हैं।

§ 107. मिश्र संख्या का त्रिकोणमितिक रूप

मिश्र संख्या $a+bi$ के क्रमक a और क्रमित b को मापांक r तथा अनुतर्क φ के माध्यम से निम्न सूत्रों द्वारा व्यक्त किया जा सकता है (दे. चित्र 5) :

$$a=r\cos\varphi;\ b=r\sin\varphi.$$

इसलिए किसी भी मिश्र संख्या को $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जिसमें $r\geqslant 0$ ।

ऐसे व्यंजन को मिश्र संख्या का **अभिलंबी त्रिकोणमितिक रूप** या संक्षेप में सिर्फ त्रिकोणमितिक रूप कहते हैं।

उदाहरण 1. मिश्र संख्या $-3-3i$ को अभिलंबी त्रिकोणमितिक रूप में व्यक्त करें। चूंकि (§ 106) :

$$r=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2},$$

इसलिए $-3-3i=3\sqrt{2}\,[\cos(-135^\circ)+i\sin(-135^\circ)]$

या

$$-3-3i=3\sqrt{2}\,(\cos 225^\circ+i\sin 225^\circ) \text{ आदि ।}$$

उदाहरण 2. मिश्र संख्या $-2+6i$ के लिए

$$r=\sqrt{(-2)^2+6^2}=\sqrt{40}$$

और (§ 106, उदाहरण 2) $\varphi=108^\circ$ । अतः संख्या $-2+6i$ का अभिलंबी त्रिकोणमितिक रूप है :

$$\sqrt{40}(\cos 108^\circ+i\sin 108^\circ).$$

उदाहरण 3. संख्या 3 का अभिलंबी त्रिकोणमितिक रूप $3(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)$ है, या सार्व रूप में,

$$3(\cos 360^\circ k+i\sin 360^\circ k).$$

उदाहरण 4. संख्या -3 का अभिलंबी त्रिकोणमितिक रूप $3(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)$ है, या सार्व रूप में

$$3[\cos(180^\circ+360^\circ k)+i\sin(180^\circ+360^\circ k)].$$

उदाहरण 5. काल्पनिक इकाई i का अभिलंबी त्रिकोणमितिक रूप $\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ$ है, या

$$\cos(90^\circ+360^\circ k)+i\sin(90^\circ+360^\circ k).$$

यहां $r=1$.

उदाहरण 6. संख्या $-i$ का अभिलंबी त्रिकोणमितिक रूप $\cos(-90^\circ)+\sin(-90^\circ)$ है, या

$$\cos(-90^\circ+360^\circ k)+i\sin(-90^\circ+360^\circ k).$$

यहां $r=1$.

त्रिकोणमितिक रूप के विपरीत, $a+bi$ प्रकार के व्यंजन को मिश्र संख्या का **बीजगणितीय या दिशांकी रूप** कहते हैं।

उदाहरण 7. मिश्र संख्या $2[\cos(-40^\circ)+i\sin(-40^\circ)]$ को बीजगणितीय रूप में प्रस्तुत करें।

यहां $r=2, \varphi=-40^\circ$, अतः सूत्र से (दे. ऊपर) :

$$a=r\cos\varphi=2\cos(-40^\circ) \quad 2\cdot 0.766=1.532,$$

$$b=r\sin\varphi=2\sin(-40^\circ)\approx 2\cdot(-0.643)=-1.286.$$

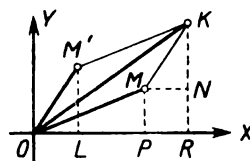
प्रत्त संख्या का बीजगणितीय रूप है (सन्निकृत तौर पर) : $1.532-1.286\,i$.

उदाहरण 8. संख्या $3(\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ)$ को बीजगणितीय रूप में परिणत करें। चूंकि $\cos 270^\circ=0$; $\sin 270^\circ=-1$, इसलिए प्रत्त संख्या -3 के बराबर है।

उदाहरण 9. यदि $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ किन्हीं संयुग्मी संख्याओं में से एक है, तो दूसरी संयुग्मी संख्या को $r[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]$ के रूप में लिखा जा सकता है, जो $r(\cos\varphi-i\sin\varphi)$ के बरावर है। अन्तिम व्यंजन अभिलंबी रूप नहीं है।

§ 108. मिश्र संख्याओं के जोड़-घटाव की ज्यामितिक व्याख्या

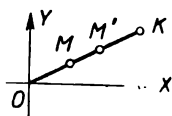
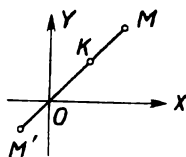
मान लें कि सदिश OM तथा OM' (चित्र 7) मिश्र संख्या $z=x+yi$ तथा $z'=x'+y'i$ को द्योतित करते हैं। बिंदु M से OM' के बराबर सदिश MK खींचते हैं (अर्थात् MK की लम्बाई और दिशा सदिश OM' जैसी है, दे. § 105, टिप्पणी)। इस स्थिति में सदिश OK प्रत्त संख्याओं के योगफल को द्योतित करता है (सचमुच में : त्रिभुज $OM'L$ तथा MKN बराबर हैं, जिससे $x'=OL=MN=PR$ तथा $y'=LM'=NK$; अतः क्रमक $OR=OP+PR=x+x'$; क्रमित $RK=y+y'$)।

उपरोक्त विधि से प्राप्त किये गये सदिश OK को सदिश OM तथा OM' का **ज्यामितिक जोड़** (या संक्षेप में, सिर्फ जोड़) कहते हैं। नाम "जोड़" इसलिए पड़ा है कि गतिमान पिंडों के वेग, किसी बिंदु पर क्रियाशील बल तथा अन्य अनेक भौतिक राशियां ठीक इसी तरह से जोड़ी जाती हैं ।

चित्र 7

इस प्रकार, *दो मिश्र संख्याओं का जोड़ उन्हें द्योतित करने वाले सदिशों का जोड़ होता है।*

त्रिभुज OMK की भुजा OK की लंबाई OM तथा MK के योगफल से कम और उनके अंतर से अधिक है। अत:

$$||z|-|z'|| \leqslant |z+z'| \leqslant |z|+|z'|$$

समता सिर्फ उस हालत में प्राप्त होती है, जब OM तथा OM' की दिशाएं समान (चित्र 8) या विपरीत (चित्र 9) होती हैं। प्रथम स्थिति में $|OM|+|OM'|=|OK|$, अर्थात् $|z+z'|=|z|+|z'|$ है तथा दूसरी स्थिति में $|z+z'| = ||z| - |z'||$ है।

चित्र 8 चित्र 9

उदाहरण 1. मान लें कि $z=4+3i$; $z'=5+12i$ है। तब

$$|z|=\sqrt{4^2+3^2}=5, \quad |z'|=\sqrt{5^2+12^2}=13;$$

$$z+z'=9+15i,$$

$$|z+z'|=\sqrt{9^2+15^2}=\sqrt{306}.$$

यहां $13-5<\sqrt{306}<13+5$, अर्थात् $8<\sqrt{306}<18$.

उदाहरण 2. मान लें कि $z=4+3i$; $z'=8+6i$ है। इन मिश्र संख्याओं का अनुतर्क एक ही है $(36°52')$, अर्थात् तदनुरूप सदिशों की दिशाएं समान हैं। यहां

$$|z|=5,\ |z'|=10;\ z+z'=12+9i,$$
$$|z+z'|=\sqrt{12^2+9^2}=15.$$

अत: $$10-5<15=10+5.$$

उदाहरण 3. मान लें कि $z=8-6i$; $z'=-12+9i$ हैं। ये मिश्र संख्याएं परस्पर विपरीत दिशाओं वाले सदिशों से द्योतित होती हैं (इनके अनुतर्क क्रमश: **323°08′** तथा **143°08′** के बराबर हैं)। यहां

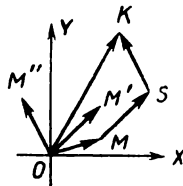
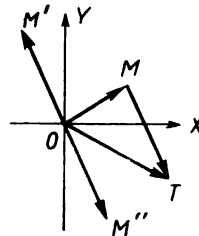
$$|z|=10,\ |z'|=15;$$
$$z+z'=-4+3i,\ |z+z'|=5.$$

अत: $$15-10=5<15+10.$$

तीन (और अधिक) मिश्र संख्याओं का जोड़ भी उन्हें द्योतित करने वाले सदिशों (जैसे OM, OM', OM'') का जोड़, अर्थात् सदिश OK है (चित्र 10 में), जो टूटी रेखा $OMSK$ के सिरों को जोड़ता है (सदिश MS सदिश OM' के बराबर है; सदिश SK सदिश OM'' के बराबर है)। योज्य सदिशों को किसी भी क्रम में लिया जा सकता है; टूटी रेखाएं अलग-अलग तरह की मिलेंगी, पर उनके सिरे संपाती होंगे। चूंकि OK टूटी रेखा $OMSK$ से अधिक लंबी नहीं है, इसलिए

$$|z+z'+z''|\leqslant|z|+|z'|+|z''|.$$

समता तभी प्राप्त होती है, जब सभी योज्य सदिशों की दिशाएं समान होती हैं।

मिश्र संख्याओं $a+bi$ तथा $a'+b'i$ का अंतर संख्याओं $a+bi$ तथा

चित्र 10 चित्र 11

$-a'-b'i$ के जोड़ के बराबर होता है, जिसमें दूसरे योज्य का मापांक $a'+b'i$ जैसा ही है, पर उसकी दिशा $a'+b'i$ से विपरीत होती है। इसीलिए OM तथा

OM' (चित्र 11) से द्योतित संख्याओं का अंतर सदिश OM तथा OM'' के जोड़ (सदिश OT) द्वारा निरूपित होता है।

§ 109. मिश्र संख्याओं के गुणा की ज्यामितिक व्याख्या

मान लें कि दो मिश्र संख्याएं z व z' सदिश OM व OM' (चित्र 12) द्वारा द्योतित होती हैं। संगुणकों को त्रिकोणमितिक रूप में लिखकर उनका गुणनफल निकालते हैं :

$$zz' = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$$
$$= rr'\big[(\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi') + $$
$$+ i(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi')\big],$$

अर्थात् (§ 232)

$$zz' = rr'\left[\cos(\varphi+\varphi') + i\sin(\varphi+\varphi')\right]. \qquad (1)$$

गुणनफल (चित्र में सदिश OL) का मापांक rr' है और गुणनफल का अनुतर्क $\varphi + \varphi'$ के बराबर है, अर्थात् *मिश्र संख्याओं को आपस में गुणा करने पर उनके मापांक गुणित होते हैं और अनुतर्क जुड़ जाते हैं।*

गुण्य संख्याएं कितनी भी क्यों न हों, यह नियम सदा लागू रहता है।

उदाहरण 1. चित्र 12 में सदिश OM तथा OM' से दर्शित मिश्र संख्याओं के मापांक $|OM| = \frac{3}{2}$ तथा $|OM'| = 2$ हैं और अनुतर्क $\angle XOM = 20°$ तथा $\angle XOM' = 30°$ हैं। सदिश OL से दर्शित उनके गुणनफल का मापांक $\frac{3}{2} \cdot 2 = 3$ है; गुणनफल का अनुतर्क (कोण XOL) $20° + 30° = 50°$ है। अतः गुणनफल होगा :

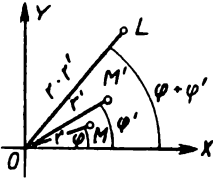
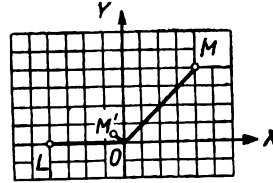
$$\tfrac{3}{2}(\cos 20° + i\sin 20°) \cdot 2(\cos 30° + i\sin 30°)$$
$$= 3(\cos 50° + i\sin 50°).$$

उदाहरण 2.

$$4\sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 135° + i\sin 135°)$$
$$= 4(\cos 180° + i\sin 180°) = -4 \text{ (चित्र 13)।}$$

प्रत्त संगुणकों का बीजगणितीय रूप होगा $4 + 4i$ और $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, जिन्हें गुणा करने पर पुनः -4 ही मिलता है।

उदाहरण 3. 2 $(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$, $3[\cos(-160^\circ) + i \sin(-160^\circ)]$ तथा $0.5\ (\cos 10^\circ + \sin 10^\circ)$ को गुणा करें। गुणन-

चित्र 12

चित्र 13

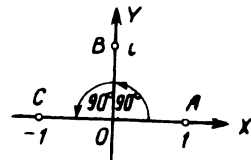
फल का मापांक $2 \cdot 3 \cdot 0.5 = 3$ होगा। गुणनफल का अनुतर्क $150^\circ - 160^\circ + 10^\circ = 0^\circ$ होगा। अतः गुणनफल है :

$$3(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = 3.$$

उदाहरण 4. $r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot r\ [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)] = r^2 (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = r^2$, अर्थात् *दो संयुग्मी मिश्र संख्याओं का गुणनफल एक वास्तविक संख्या है, जो उनके सामूहिक मापांक के वर्ग के बराबर होता है।*

उदाहरण 5. $\frac{3}{2}\ [\cos(-20^\circ) + i \sin(-20^\circ)] \cdot 2[\cos(-30^\circ) + i \sin(-30^\circ)] = 3[\cos(-50^\circ) + i \sin(-50^\circ)]$। उदाहरण 1 से तुलना करके देख सकते हैं कि *संगुणकों की जगह उनकी संयुग्मी संख्याएं रखने पर गुणनफल की जगह भी उसकी संयुग्मी संख्या ही मिलती है।* यह एक सामान्य गुण है और संगुणक कितने भी क्यों न हों, यह गुण बना रहता है।

टिप्पणी 1. वास्तविक संख्याओं के गुणा का नियम उपरोक्त नियम का एक विशेष उदाहरण है। यथा, संख्या -2 और -3 के अनुतर्कों का योग $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$ है, अतः उनका गुणनफल धन संख्या 6 [अर्थात् $6(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ]$ है।

टिप्पणी 2. जब किसी मिश्र संख्या $r\ (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ को काल्पनिक इकाई i से गुणा करते हैं (i का मापांक 1 है और अनुतर्क $+90^\circ$ है), तब गुणनफल का मापांक r ही रहता है, पर अनुतर्क में 90° की वृद्धि हो जाती है। इसका मतलब है कि प्रत्त संख्या का सदिश अपनी लंबाई स्थिर रखते हुए $+90^\circ$ के कोण पर घूम जाता है। विशेष

चित्र 14

स्थिति संख्या 1 (चित्र 14 में OA) और i का गुणन सदिश OA का स्थिति OB तक 90° के कोण पर घूर्णन है; i और i का गुणा OB का स्थिति OC तक 90° के कोण पर घूर्णन है। पर सदिश OC संख्या -1 को द्योतित करता है। इसलिए $i^2=-1$ है।

इस ज्यामितिक चित्रण में संख्या i संख्या -1 से ज्यादा "काल्पनिक" नहीं है।

§ 110. मिश्र संख्याओं के भाग की ज्यामितिक व्याख्या

भाग गुणा की प्रतीप संक्रिया है। इसलिए (दे. पिछला अनुच्छेद) *मिश्र संख्याओं के भाग में उनके मापांकों का भाग होता है* (भाज्य के मापांक में भाजक के मापांक से) *और उनके अनुतर्कों का घटाव होता है* (व्यवकल्य के अनुतर्क में से व्यवकारी के मापांक का), अर्थात्

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi):r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')$$

$$=\frac{r}{r'}\left[\cos(\varphi-\varphi')+i\sin(\varphi-\varphi')\right]. \qquad (1)$$

उदाहरण 1. $2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ):$
$6(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)=\frac{1}{3}[\cos(-15^\circ)+i\sin(-15^\circ)]$

उदाहरण 2. $-4:4\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$
$=4(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ):4\sqrt{2}(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$
$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ).$

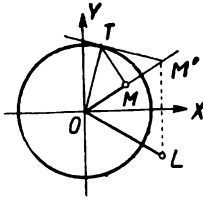
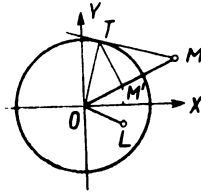
तुलना करें पिछले अनुच्छेद के उदाहरण 2 से।

बीजगणितीय रूप में :

$$-4:(4+4i)=\frac{-1}{1+i}=\frac{-1(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-1+i}{2}.$$

उदाहरण 3. 1 में मिश्र संख्या $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ से भाग दें। भाज्य को $1(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)$ के रूप में लिखते हैं। सूत्र (1) के अनुसार भागफल $\frac{1}{r}[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]$ होगा।

$$1 : r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)] \quad (2)$$

ज्यामितिक बनावट : केंद्र O से 1 त्रिज्या वाला वृत्त खींचते हैं। मान लें कि $|r| > 1$, अर्थात् उदाहरण 3 में प्रत्त भाजक को द्योतित करने वाला बिंदु

चित्र 15

चित्र 16

M वृत्त के बाहर है (चित्र 15)। स्पर्श रेखा MT खींचते हैं और T से OM पर लंब TM' खींचते हैं। क्रमक अक्ष के सापेक्ष बिंदु M' के साथ सममित बिंदु L इष्ट भाग को द्योतित करता है। सचमुच में, $|OL| = |OM'|$, और समकोण त्रिभुज OTM से (जिसमें TM' उसकी ऊँचाई है) ज्ञात करते हैं कि

$$|OT^2| = |OM| \cdot |OM'|, \text{ अर्थात् } 1 = r|OM'| \text{ या } |OM'| = \frac{1}{r}$$

है। सदिश OM और OL के अनुतर्क मान में बराबर, पर चिह्न में विपरीत हैं।

स्थिति $|r| < 1$ के लिए बनावट चित्र 16 में दिखाई गयी है।

सूत्र 2 से निष्कर्ष निकलता है कि 1 में मापांक $r = 1$ वाली मिश्र संख्या से भाग देने पर भाजक की संयुग्मी संख्या मिलती है।

उदाहरण 4. $2[\cos(-30°) + i\sin(-30°)]$: $6[\cos(-45°) + i\sin(-45°)] = \frac{1}{3}(\cos 15° + i\sin 15°)$. उदाहरण 1 से तुलना करके देखते हैं कि *भाज्य और भाजक की जगह उनकी संयुग्मी संख्याएं रखने पर भागफल भी अपनी संयुग्मी संख्या में परिणत हो जाता है।* सूत्र (1) दिखाता है कि यह गुण सामान्य है।

§ 111. मिश्र संख्या का पूर्ण संख्या से घातन

§ 109 के अनुसार

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi),$$

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^3=r^3(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi)$$

और सार्व रूप में :

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \qquad ...(A)$$

जहां n कोई पूर्ण धन संख्या है। सूत्र (A) को अब्राहम दे मुआवर (Abraham De Moivre, 1667-1754) के सम्मान में **मुआवर सूत्र** कहते हैं। यह पूर्ण ऋण घात-सूचक n (दे. § 126) के लिए भी सही है और $n=0$ के लिए भी।

उदाहरणार्थ,

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^{-3}=\frac{1}{[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^3}$$

$$=\frac{1}{r^2(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi)}.$$

इसलिए (पिछले अनुच्छेद के उदाहरण 3 से तुलना करें),

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^{-3}=r^{-3}[\cos(-3\varphi+i\sin(-3\varphi)].$$

इस प्रकार, मिश्र संख्या का किसी पूर्ण संख्या से घातन करने के लिए मापांक का उस पूर्ण संख्या से घातन करते हैं और अनुतर्क में घात-सूचक से गुणा करते हैं। अपूर्ण संख्या से घातन देखें § 113।

उदाहरण 1. संख्या

$$z=2(\cos 10°+i\sin 10°)$$

का 6 से घातन करें।

$$z^6=2^6(\cos 60°+i\sin 60°)=32+32\sqrt{3i}.$$

उदाहरण 2. संख्या

$$z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

का 20-वां घात ज्ञात करें।

संख्या z का मापांक 1 है और अनुतर्क $-60°$ है। अतः संख्या z^{20} का मापांक 1 होगा और अनुतर्क $-1200°=-3\cdot360°-120°$ होगा। अतः

$$z^{20}=\cos(-120°)+i\sin(-120°)=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

उदाहरण 3. *कोण 3φ के ज्या और कोज्या को कोण φ के ज्या और कोज्या में व्यक्त करें।*

हल. $\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i \cos^2\varphi \sin\varphi + 3i^2 \cos\varphi \sin^2\varphi + i^3 \sin^3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \sin^2\varphi + i\,(3\cos^2\varphi \sin\varphi - \sin^3\varphi)$.

क्रमकों और क्रमितों को अलग-अलग बराबर करने पर (§ 100) :

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi$$

और $$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

उदाहरण 4. इसी प्रकार से :

$$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$$

और

$$\sin 4\varphi = 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi$$

$\sin n\varphi$, $\cos n\varphi$ के लिए सार्व सूत्र भी इसी तरह से ज्ञात कर सकते हैं (दे. § 238)।

§ 112. मिश्र संख्या का मूलन

मूलन घातन की प्रतीप संक्रिया है (§ 29.6)। इसलिए (देखें पिछला अनुच्छेद) मिश्र संख्या का किसी पूर्ण संख्यावाला मूल निकालने के लिए प्रत्त मिश्र संख्या के मापांक का उसी कोटि वाला मूल निकालते हैं और अनुतर्क में मूल की कोटि (मूल-सूचक) से भाग देते हैं :

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right). \quad \text{(B)}$$

यहाँ $\sqrt[n]{r}$ से धन संख्या को द्योतित किया गया है (अर्थात् यह मापांक का अंकगणितीय मूल है)।

किसी भी मिश्र संख्या के n-वें मूल के n विभिन्न मान होते हैं। इन सबों के मापांक समान होते हैं—$\sqrt[n]{r}$; इनके अनुतर्क किसी एक के अनुतर्क में एक-एक कर $\frac{1}{n}\cdot 360^\circ$ जोड़ते जाने से प्राप्त होते हैं :

यह प्रमाणित करने के लिए मान लें कि मूलाधीन संख्या का अनुतर्क φ_0 है। तब $\varphi_0 + 360^\circ$, $\varphi_0 + 2\cdot 360^\circ$ आदि भी उसके अनुतर्क हैं। पर इन अनुतर्कों के अनुरूप मूल के जो मान होंगे, वे सदैव भिन्न (इतर) नहीं होंगे। यथा, z अनुतर्क $\frac{\varphi_0}{n} + \frac{n}{n}360^\circ$, अर्थात् $\frac{\varphi_0}{n} + 360^\circ$ से मूल का वही मान मिलेगा,

जो अनुतर्क $\frac{\varphi_0}{n}$ से; अनुतर्क $\frac{\varphi_0}{n}+\frac{n+1}{n}360^\circ=\frac{\varphi_0}{n}+\frac{1}{n}360^\circ$ से वही मिश्र संख्या मिलेगी, जो अनुतर्क $\frac{\varphi_0}{n}+\frac{1}{n}360^\circ$ से, आदि। मूल के *भिन्न मानों की संख्या ठीक n होगी* (दे. उदाहरण)।

उदाहरण 1. संख्या $-9i$ का वर्गमूल ज्ञात करें। इस संख्या का मापांक 9 है, अतः मापांक का प्रत्त संख्या के मूल का मापांक $\sqrt{9}=3$ होगा। मूलाधीन संख्या का अनुतर्क -90°, $-90^\circ+360^\circ$, $-90^\circ+2\cdot360^\circ$ आदि हैं।

प्रथम स्थिति में :

$$(-9i)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}\,[\cos(-45^\circ)+i\sin(-45^\circ)]$$
$$=\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}i. \qquad (1)$$

दूसरी स्थिति में :

$$(-9i)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}\,(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)=\frac{-3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}i. \qquad (2)$$

तीसरी स्थिति में :

$$(-9i)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}\,(\cos 315^\circ+i\sin 315^\circ)=\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}i, \qquad (3)$$

अर्थात् तीसरी स्थिति में वही मिश्र संख्या मिलती है, जो पहली स्थिति में मिली थी। $\varphi=-90^\circ+3\cdot360^\circ$, $\varphi=-90^\circ+4\cdot360^\circ$ या $\varphi=-90^\circ-360^\circ$, $\varphi=-90^\circ-2\cdot360^\circ$ आदि रखने पर हमें बारी-बारी से मान (1) तथा (2) मिलते जायेंगे।

उदाहरण 2. संख्या 16 का वर्गमूल ज्ञात करें। इस संख्या का अनुतर्क $360^\circ k$ (k कोई पूर्ण संख्या) है। वर्गमूल का अनुतर्क $360^\circ k:2=180^\circ k$ होगा। जब k शून्य या किसी सम संख्या के बराबर होता है, तब वर्गमूल का अनुतर्क शून्य या 360° का कोई अपवर्त्य होता है। अतः $16^{\frac{1}{2}}=4(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)=4$। जब k कोई विषम संख्या होता है, तब अनुतर्क

180° होता है या 180° के साथ 360° के किसी अपवर्त्य का अंतर रखता है। इस स्थिति में $16^{\frac{1}{2}} = 4(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = -4$ होगा।

उदाहरण 3. संख्या 1 का घनमूल निकालें। मूल का मापांक $\sqrt[3]{1} = 1$ होगा। मूलाधीन संख्या का अनुतर्क $360^\circ k$ है (k कोई पूर्ण संख्या है)। मूल का अनुतर्क $120^\circ k$ होगा। $k=0, 1, 2$ मानकर मूल के तीन अनुतर्क ज्ञात करते हैं : $0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$। मूलों के तदनुरूप मान होंगे :

$$z_1 = \cos 0^\circ + i \sin 0^\circ = 1,$$

$$z_2 = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

$$z_3 = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

चित्र 17 में ये मान बिंदु A_1, A_2, A_3 से निरूपित हैं। त्रिभुज $A_1A_2A_3$ समभुज है। वह इकाई त्रिज्या वाले वृत्त पर अंतरस्थ है (वृत्त पर अन्दर से स्थित है)।

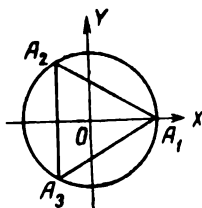
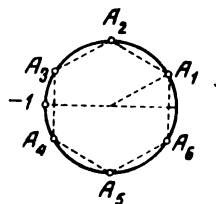
प्राप्त परिणामों की जाँच भी की जा सकती है। संख्या $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ में इसी संख्या से गुणा करने पर (देखें § 103) : $z_2^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = z_3$; एक बार और गुणा करने पर $z_2^3 = z_3 \cdot z_2 = 1$ मिलेगा। इसी प्रकार से अन्य मूल की भी जाँच की जा सकती है : $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$,

अत:

$$z_3^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = z_2,$$

$$z_3^3 = z_2 \cdot z_3 = 1.$$

उदाहरण 4. संख्या -1 का छठा मूल निकालें। मूलाधीन संख्या -1 का अनुतर्क $180^\circ + 360^\circ k$ है। मूल का अनुतर्क $30^\circ + 60^\circ k$ है। इसलिए

मूल के निम्न छः मान निकलते हैं :

चित्र 17

चित्र 18

$$z_1=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,$$

$$z_2=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ=i,$$

$$z_3=\cos 150^\circ+i\sin 150^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,$$

$$z_4=\cos 210^\circ+i\sin 210^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i,$$

$$z_5=\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ=-i$$

$$z_6=\cos 330^\circ+i\sin 330^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

इन मानों को द्योतित करने वाले बिंदु A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 (चित्र 18 में) नियमित षटकोण के शीर्ष हैं।

सूत्र (B) से निष्कर्ष निकलता है कि किसी मिश्र संख्या के सभी n मूल और उसकी संयुग्मी संख्या के तदनुरूप अनुतर्क वाले n मूल परस्पर संयुग्मी होते हैं।

उदाहरण 5. संख्या $16(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)=-8+8\sqrt{3}\,i$ के चौथे मूल निम्न हैं :

$$z_1=2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)=\sqrt{3}+i,$$
$$z_2=2(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)=-1+\sqrt{3}\,i,$$
$$z_3=2(\cos 210^\circ+i\sin 210^\circ)=-\sqrt{3}-i,$$
$$z_4=2(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)=1-\sqrt{3}\,i.$$

संयुग्मी मिश्र संख्या $16(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ) = -8 - 8\sqrt{3}\,i$ के तदनुरूप अनुतर्क वाले मूल निम्न हैं :

$$\bar{z}_1 = 2(\cos 30^\circ - i\sin 30^\circ) = \sqrt{3} - 1,$$
$$\bar{z}_2 = 2(\cos 120^\circ - i\sin 120^\circ) = -1 - \sqrt{3}\,i,$$
$$\bar{z}_3 = 2(\cos 210^\circ - i\sin 210^\circ) = -\sqrt{3} + i,$$
$$\bar{z}_4 = 2(\cos 300^\circ - i\sin 300^\circ) = 1 + \sqrt{3}\,i.$$

संख्या z_1 तथा $\bar{z}_1$, z_2 तथा $\bar{z}_2$ आदि परस्पर संयुग्मी हैं।

§ 113. मिश्र संख्या का किसी भी वास्तविक संख्या से घातन

वास्तविक संख्या का भिन्न संख्या से घातन § 126 में निर्धारित किया गया है। लेकिन वहाँ सिर्फ वास्तविक आधार वाले घात पर विचार किया गया है। यहाँ हमें अधिक व्यापक परिभाषा की आवश्यकता है।

यह परिभाषा यहां निम्न सूत्र के रूप में व्यक्त की जाती है :

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^p = r^p(\cos p\varphi + i\sin p\varphi), \quad \cdots(C)$$

p यहाँ कोई वास्तविक संख्या और r^p कोई धन संख्या है, जो मापांक r का p-वां घात व्यक्त करती है।

जब p पूर्ण संख्या होता है, तब सूत्र (C) सूत्र (A) (§ 111) का रूप ग्रहण करता है; जब p भिन्न $\frac{1}{n}$ होता है, तब सूत्र (C) का रूप सूत्र (B) (§ 112) जैसा होता है। जब $p = \frac{m}{n}$ (m व n पूर्ण संख्याएं हैं, तो (C), (A) तथा (B) से :

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^m}. \quad \cdots(D)$$

संबंध D अपूर्ण संख्या मे घातन की सामान्य परिभाषा के अनुरूप है।

किसी भी मिश्र संख्या (और साथ ही वास्तविक संख्या) का अपूर्णांकी घात n विभिन्न मान रखता है (संख्या n अपूर्ण घात-सूचक का अंशनाम है)। सूत्र (C) उस स्थिति में भी लागू होता है, जब घात-सूचक p अव्यतिमानी होता है; इस स्थिति में किसी भी संख्या के p-वें घात के असंख्य मान होते हैं।

उदाहरण 1. संख्या—16 का $\frac{3}{4}$ वां घात ज्ञात करें।
प्रत्त है :

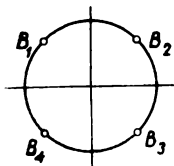
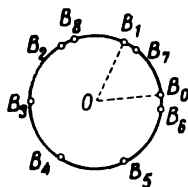
$$p=\tfrac{3}{4},\ r=16,\ \varphi=180^\circ+360^\circ k.$$

घात $(-16)^{\frac{3}{4}}$ का मापांक, सूत्र (C) के अनुसार, $16^{\frac{3}{4}}=8$ है। घात का अनुतर्क बराबर

$$\tfrac{3}{4}(180^\circ+360^\circ k)=135^\circ+270^\circ k.$$

यह मानकर कि $k=0, 1, 2, 3$ है (k के अन्य मानों सें कोई नया परिणाम नहीं मिलेगा), घात के निम्न चार मान ज्ञात करते हैं :

$$z_1=8(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)=-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,i,$$
$$z_2=8[\cos(135^\circ+270^\circ)+i\sin(135^\circ+270^\circ)]$$
$$=8(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)=4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\,i,$$
$$z_3=8[\cos(135^\circ+2\cdot 270^\circ)+i\sin(135^\circ+2\cdot 270^\circ)]$$
$$=8[\cos(-45^\circ)+i\sin(-45^\circ)]=4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\,i,$$
$$z_4=8[\cos(135^\circ+3\cdot 270^\circ)+i\sin(135^\circ+3\cdot 270^\circ)]$$
$$=[\cos(-135^\circ)+i\sin(-135^\circ)]=-4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\,i$$

ये मान बिंदु B_1, B_2, B_3, B_4 (चित्र 19) द्वारा द्योतित हैं।

चित्र 19

चित्र 20

उदाहरण 2. संख्या 1 का $\frac{1}{2\pi}$ वां घात ज्ञात करें। यहां $p=\frac{1}{2\pi}$, $r=1$, $\varphi=360^\circ k$। अतः (C) के अनुसार :

$$1^{\frac{1}{2\pi}}=\cos\frac{360^\circ}{2\pi}k+i\sin\frac{360^\circ}{2\pi}k.$$

चित्र 20 में बिंदु B_0, B_1, B_2, B_3,.... दिखाये गये हैं, जो विचाराधीन घात के मान द्योतित करते हैं; ये मान क्रमशः $k=0, 1, 2, 3,$...के अनुरूप हैं और सब के सब इकाई त्रिज्या वाले वृत्त की परिधि पर स्थित हैं। इनमें से कोई भी बिंदु

युग्म परस्पर संपात नहीं करते। सचमुच, कोण B_0OB_1, B_1OB_2 आदि में से प्रत्येक कोण एक रेडियन के बराबर है, अर्थात् चाप B_0B_1, B_1B_2 आदि में से प्रत्येक की लम्बाई त्रिज्या के बराबर है। यदि कोई बिंदु B_1 बिंदु B_0 के साथ संपाती होता, तो इसका मतलब होता कि परिधि पर s बार चक्कर लगाने से त्रिज्या की l गुनी लंबाई तय हो जाती, अर्थात् (परिधि $\times s$) = (त्रिज्या $\times l$) होता (s और l पूर्ण संख्याएं हैं)। इससे निष्कर्ष निकलता है कि परिधि और त्रिज्या का व्यतिमान ठीक-ठीक $\frac{l}{s}$ के बराबर होता है। पर परिधि त्रिज्या के अंशों में व्यक्त नहीं हो सकती। इसलिए बिंदु B_0, B_1, B_2,...... में से कोई भी जोड़ा संपात नहीं करता। जितने ही अधिक बिंदु हम लेंगे, परिधि बिंदुओं से उतनी ही घनी होती जायेगी। उसके हर बिंदु के पास असंख्य बिंदु B जमा होते जायेंगे। फिर भी सारी परिधि पर ऐसे बिंदु बचे रहेंगे, जहाँ इनमें से एक भी बिंदु B नहीं आ सकेगा। इस तरह का एक बिंदु है (उदाहरण के लिए) बिंदु B_0 के ठीक सामने का, या किसी नियमित बहुभुज का कोई भी शीर्ष (यदि B_0 उसके शीर्षों में से एक है)।

टिप्पणी. मिश्र संख्या के लिए मिश्र घात-सूचक वाले घात की परिभाषा भी निर्धारित की जा सकती है। ऐसे घात के भी असंख्य मान होते हैं, पर उनका जमघट बनना कोई जरूरी नहीं है।

§ 114. उच्च घातों वाले बीजगणितीय समीकरण : चंद सामान्य सूचनाएं

सार्वरूप में दिये गये तीसरे व चौथे घातों वाले समीकरणों का वर्णिक संदों के माध्यम से हल व्यक्त करने वाले सूत्र निर्धारित किये जा चुके हैं (§ 67)। इन सूत्रों में 2-री तथा 3-री कोटि के मूल वाले व्यंजन हैं। वे जटिल हैं और व्यावहारिक कार्यों के लिए अत्यधिक असुविधाजनक हैं। अधिक ऊंचे घातों (अधिक उच्च कोटि के घातों) वाले समीकरणों के लिए ऐसे सूत्र नहीं हैं। सिद्ध किया जा चुका है कि सांत संख्या में जोड़-घटाव, गुणा-भाग, घातन-मूलन की सहायता से चौथी कोटि से ऊँचे घात वाले सार्वरूप समीकरण के मूलों को वर्णिक संदों में व्यक्त नहीं किया जा सकता। इस तरह के व्यंजन उच्च घातों वाले वर्णिक समीकरणों के सिर्फ चंद विशेष रूपों के लिए ही दिये जा सकते हैं।

फिर भी सांख्यिक संदों वाले किसी भी बीजगणितीय समीकरण के मूल किसी भी कोटि की परिशुद्धता के साथ ज्ञात किये जा सकते हैं।

मिश्र संख्याओं के अपनाये जाने के पहले वर्ग समीकरण का हल भी सदा संभव नहीं होता था (§ 93)। मिश्र संख्याओं को संख्या-परिवार में स्थान देने के बाद से हर बीजगणितीय समीकरण का कम से कम एक मूल जरूर होता है (बीजगणितीय समीकरणों के संद बिल्कुल मनचाहे हो सकते हैं, यहाँ तक कि मिश्र भी)।

n-वें घात वाले समीकरण में विभिन्न मूलों की संख्या n से अधिक नहीं हो सकती, कम जरूर हो सकती है। उदाहरणार्थ, 5-वें घात वाले समीकरण $(x-3)(x-2)(x-1)^3=0$ (विकोष्ठित रूप में : $x^5-8x^4+24x^3-34x^2+23x-6=0$) के मूल हैं : $x_1=3$, $x_2=2$, $x_3=1$। अन्य मूल नहीं हैं। फिर भी माना जाता है कि इस समीकरण के पांच मूल हैं ($x_1=3$, $x_2=2$, $x_3=1$, $x_4=1$, $x_5=1$)। मूल 1 को तीन बार गिनते हैं, क्योंकि प्रत्त समीकरण के वाम पक्ष में गुणक $(x-1)$ की घात-कोटि 3 के बराबर है।

इस तरह से गिनती करने पर n-वें घात वाले किसी भी समीकरण

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots\dots+a_n=0 \qquad (a_0\neq 1) \qquad (1)$$

के मूलों की संख्या n हो जाती है। कारण निम्न है : समीकरण (1) को एकल प्रकार से निम्न रूप दिया जा सकता है :

$$a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots\dots(x-x_n)=0. \qquad (2)$$

संख्या $x_1, x_2, \dots\dots x_n$ समीकरण (1) के मूल हैं। इनमें से कुछेक ऐसे भी हो सकते हैं, जो एक समान मान रखते होंगे (पिछले उदाहरण में $x_3=x_4=x_5=1$ था)। इस मान को मूल के रूप में इतनी बार गिनते हैं, जितनी बार वह $x_1, x_2, \dots\dots x_n$ के बीच मिलता है। इस तरह से गिनती करने पर मूलों की कुल संख्या हमेशा n के बराबर होगी।

यदि बीजगणितीय समीकरण के संद वास्तविक हैं और कोई एक मूल मिश्र संख्या $a+bi$ है, तो इसकी संयुग्मी संख्या $a-bi$ भी एक मूल है। उदाहरणार्थ, मिश्र संख्या $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ समीकरण $x^4+1=0$ का एक मूल है, अत: संयुग्मी संख्या $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ भी इस समीकरण का एक मूल है (§ 112)। इस प्रकार, वास्तविक संदों वाले समीकरणों के मिश्र मूलों की संख्या सदा सम

होती है [मिश्र मूल से तात्पर्य है मूल, जिसका मान किसी मिश्र संख्या के बराबर है]।

वास्तविक संद वाले किसी विषम कोटिक घात के समीकरण का कम से कम एक मूल जरूर वास्तविक होता है (क्योंकि मिश्र मूलों की संख्या हमेशा सम होती है और विषम कोटि के घात वाले समीकरण के मूलों की कुल संख्या विषम होती है)।

समीकरण (1) के मूलों का योगफल $-\frac{a_1}{a_0}$ होता है और मूलों का गुणनफल $(-1)^n \frac{a_n}{a_0}$ के बराबर होता है। ये गुण फ्रांसीसी गणितज्ञ वियेटा ने 1591 में दिखाये थे।*

उदाहरण. समीकरण $x^5-8x^4+24x^3-34x^2+23x-6=0$ $n=5; a_0=1$ $a_1=-8; a_n=-6$) के मूल (दे. ऊपर) 3, 2, 1, 1, 1 हैं। इनका योगफल 8 $\left(\text{अर्थात्} -\frac{-8}{1}\right)$ है और गुणनफल 6 $\left(\text{अर्थात्}\right.$ $\left.(-1)^5\cdot\frac{-6}{1}\right)$ है।

§ 115. असमिका. सामान्य सूचनाएं

चिह्न "अधिक" (>) या चिह्न "कम" (<) से जुड़े हुए दो सांख्यिक या वर्णिक व्यंजन सांख्यिक या वर्णिक **असमिका** निर्मित करते हैं।

कोई भी सही सांख्यिक असमिका, या कोई ऐसी वर्णिक असमिका, जो उसमें निहित वर्णों के किसी भी वास्तविक मान के लिए सही हो, **समात्मिक असमिका** कहलाती है।

उदाहरण 1. सांख्यिक असमिका $2\cdot3-5<8-5$ (जो बिल्कुल सही है !) समात्मिक असमिका है।

---

* वियेटा ऋण संख्याओं को (तुलना करें, § 68 से) मान्यता नहीं दे रहे थे, इसलिए वह सिर्फ उन स्थितियों पर विचार करते थे, जिनके सभी मूल धनात्मक होते थे।

उदाहरण 2. वर्णिक असमिका $a^2 > -2$ भी समात्मिक है, क्योंकि a के किसी भी सांख्यिक (वास्तविक) मान के लिए a^2 का मान धनात्मक है या शून्य के बराबर है, और इसका मतलब है कि a^2 हमेशा -2 से अधिक है।

दो व्यंजन चिह्न $\leqslant$ ("कम या बराबर") और $\geqslant$ ("अधिक या बराबर") से भी जुड़े हो सकते हैं। यथा, $2a \geqslant 3b$ का अर्थ है कि राशि $2a$ या तो राशि $3b$ से अधिक है, या उसके बराबर है। इस तरह के आलेखों को भी असमिका ही कहते हैं।

असमिका में स्थित वर्ण ज्ञात राशियों को द्योतित कर सकते हैं या अज्ञात राशियों को (इस तरह ज्ञात या अज्ञात वर्णों की भी की बात चल सकती है)। कौन-सा वर्ण ज्ञात है और कौन-सा अज्ञात है, यह अलग से निर्दिष्ट होना चाहिए। अक्सर अज्ञात राशियों को लातीनी वर्णमाला के अंतिम वर्णों— x, y, z, u, v आदि से द्योतित करते हैं।

असमिका हल करने का मतलब है उन सीमाओं को निर्धारित करना, जिनके भीतर अज्ञात राशियों के (वास्तविक) मान विषमता को सत्य बनाये रखते हैं।

यदि कई परस्पर सम्बद्ध असमिकाएं प्रत्त हैं, तो इनके तंत्र को हल करने का मतलब है उन सीमाओं को निर्धारित करना जिनके भीतर अज्ञात राशियों के मान सभी प्रत्त असमिकाओं को सत्य बनाये रखते हैं।

उदाहरण 3. असमिका $x^2 < 4$ को हल करें। यह असमिका सत्य है, यदि $|x| < 2$, अर्थात् यदि x के मान -2 व $+2$ की सीमाओं में बंधे हैं। हल का रूप है : $-2 < x < +2$ ।

उदाहरण 4. असमिका $2x > 8$ को हल करें।

हल का रूप है : $x > 4$ । यहां x सिर्फ एक ओर से सीमित है।

उदाहरण 5. असमिका $(x-2)(x-3) > 0$ सत्य है, जब $x > 3$ है (इस स्थिति में $(x-2)$, $(x-3)$ दोनों ही संगुणक धनात्मक है) और साथ ही, जब $x < 2$ है (इस स्थिति में दोनों संगुणक ऋणात्मक हैं)। प्रत्त असमिका असत्य है, जब x के मान 2 और 3 की सीमाओं के बीच हैं (और साथ ही जब $x = 2$ और $x = 3$ है)। इसीलिए हल दो असमिकाओं के रूप में प्रस्तुत किया जाता है :

$$x > 3,\ x < 2.$$

उदाहरण 6. $x^2 < -2$ का कोई हल नहीं है। (तुलना करें उदाहरण 2 से)।

§ 116. असमिकाओं के मुख्य गुण

(1) यदि $a>b$, तो $b<a$; विलोम : यदि $a<b$, तो $b>a$।

उदाहरण. यदि $5x-1>2x+1$, तो $2x+1<5x-1$।

(2) यदि $a>b$ और $b>c$, तो $a>c$। ठीक इसी तरह, यदि $a<b$ और $b<c$, तो $a<c$।

उदाहरण. असमिका $x>2y$, $2y>10$ से निष्कर्ष निकलता है कि $x>10$ है।

(3) यदि $a>b$, तो $a+c>b+c$ (और $a-c>b-c$)। यदि $a<b$, तो $a+c<b+c$ (और $a-c<b-c$), अर्थात् *असमिका के दोनों पक्षों में एक ही राशि जोड़ी जा सकती है (या उनमें से घटायी जा सकती है)।*

उदाहरण 1. असमिका $x+8>3$ प्रत्त है। दोनों पक्षों में से 8 घटाने पर $x>-5$ मिलता है।

उदाहरण 2. असमिका $x-6<-2$ प्रत्त है। दोनों पक्षों में 6 जोड़ने पर $x<4$ प्राप्त होता है।

(4) यदि $a>b$ तथा $c>d$, तो $a+c>b+d$; ठीक इसी प्रकार, यदि $a<b$ और $c<d$, तो $a+c<b+d$, अर्थात् *दो समानार्थक असमिकाओं के (सानुरूप) पदों को जोड़ा जा सकता है* (दो विषमताएं **समानार्थक** होती हैं, जब दोनों में चिह्न > होता है या दोनों में चिह्न < होता है)। यह असमिकाओं की किसी भी संख्या के लिए सत्य है; उदाहरणतया, यदि $a_1>b_1$, $a_2>b_2$, $a_3>b_3$, तो $a_1+a_2+a_3>b_1+b_2+b_3$ होगा।

उदाहरण 1. असमिका $-8>-10$ तथा $5>2$ सही हैं। सानुरूप पदों को जोड़ने पर (अर्थात् अलग-अलग हर पक्ष के समरूप पदों को जोड़ने पर) असमिका $-3>-8$ मिलेगी, जो सही है।

उदाहरण 2. असमिका-तंत्र $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y<18$; $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y<4$ दिया गया है। सानुरूप पदों को जोड़ने पर $x<22$ मिलता है।

टिप्पणी. दो समानार्थक असमिकाओं को एक-दूसरी में से घटाया नहीं जा सकता, क्योंकि इससे प्राप्त नयी असमिका सही हो भी सकती है और नहीं भी। उदाहरणार्थ, यदि असमिका $10>8$ में से असमिका $2>1$ घटायी जाये

(अर्थात् उनके सानुरूप पदों को घटाया जाये) तो एक सही असमिका $8 > 7$ मिलेगी, लेकिन उसी असमिका $10 > 8$ में से असमिका $6 > 1$ घटाने पर बेतुकापन ही मिलेगा (तुलना करें अगले विवरण से)।

(5) यदि $a > b$ और $c < d$, तो $a - c > b - d$; यदि $a < b$ और $c > d$, तो $a - c < b - d$, अर्थात् *यदि दो विपरीतार्थक असमिकाएं दी गयी हैं, तो एक में से दूसरी को घटा सकते हैं, प्राप्त असमिका उस असमिका के साथ समानार्थक होगी, जिसमें से घटाया गया है।* (**विपरीतार्थक असमिकाएं** ऐसी होती हैं, जिनमें से एक में चिह्न $>$ और दूसरी में चिह्न $<$ होता है)।

उदाहरण 1. असमिका $12 < 20$ तथा $15 > 7$ सत्य है। प्रथम में से दूसरी को घटाने पर सही असमिका $-3 < 13$ मिलती है। दूसरी में से प्रथम को घटाने पर सही असमिका $3 > -13$ मिलती है।

उदाहरण 2. असमिका-तंत्र $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y < 18$; $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y > 8$ दिया गया है। प्रथम में से दूसरी को घटाने पर असमिका $y < 10$ मिलती है।

(6) यदि $a > b$ है और m कोई धन संख्या है, तो $ma > mb$ और $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$ सही असमिकाएं होंगी, अर्थात्

असमिका के दोनों पक्षों में किसी धन संख्या से गुणा या भाग किया जा सकता है (असमिका का चिह्न पहले जैसा ही रहेगा)।

यदि $a > b$ है तथा n कोई ऋण संख्या है, तो $na < nb$ तथा $\frac{a}{n} < \frac{b}{n}$ होगा, अर्थात्

असमिका के दोनों पक्षों में किसी ऋण संख्या से गुणा या भाग करने पर असमिका का चिह्न विपरीत हो जाता है।

ध्यातव्य. असमिका के दोनों पक्षों में शून्य से गुणा या भाग नहीं किया जा सकता।

उदाहरण 1. सही असमिका $25 > 20$ के दोनों पक्षों में 5 से भाग देने पर सही असमिका $5 > 4$ मिलती है। यदि असमिका $25 > 20$ के दोनों पक्षों में -5 से भाग देंगे, तो सही असमिका $-5 < -4$ होगी (न कि $-5 > -4$), अर्थात् आरंभिक असमिका $25 > 20$ में चिह्न $>$ चिह्न $<$ में परिणत हो जाता है।

उदाहरण 2. असमिका $2x < 12$ से $x < 6$ ज्ञात होता है।

उदाहरण 3. $-\frac{1}{3}x > 4$ से $x < -12$ ज्ञात होता है।

उदाहरण 4. असमिका $\frac{x}{k} > \frac{y}{l}$ दी गयी है, जिससे $lx > ky$ (यदि l तथा k के चिह्न समान हैं), या $lx < ky$ (यदि l तथा k के चिह्न विपरीत हैं)।

§ 117. चंद महत्त्वपूर्ण असमिकाएं

(1) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$. यहाँ a तथा b कोई भी वास्तविक या मिश्र संख्याएं हैं (पर $|a|$, $|b|$ तथा $|a+b|$ सदा वास्तविक और धनात्मक संख्याएं होंगी, दे. §§ 70, 106), अर्थात् *योगफल का मापांक मापांकों के योगफल से अधिक नहीं होता।* समता तभी संभव है, जब a व b दोनों ही संख्याओं के अनुतर्क (§ 106) समान होते हैं, विशेषकर जब दोनों ही संख्याएं धनात्मक या ऋणात्मक होती हैं।

उदाहरण 1. मान लें $a = +3$, $b = -5$ है। तब $a+b = -2$, $|a+b| = 2$, $|a| = 3$, $|b| = 5$ है। अतः $2 < 3+5$ है।

उदाहरण 2. मान लें $a = 4+3i$, $b = 6-8i$ है। तब

$a+b = 10-5i$, $|a+b| = \sqrt{10^2+(-5)^2} = \sqrt{125}$;

$|a| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$;

$|b| = \sqrt{6^2+(-8)^2} = 10$;

$|a| + |b| = 15$.

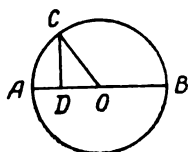
अतः $\sqrt{125} \leqslant 15$.

टिप्पणी. यह नियम उस स्थिति में भी लागू होता है, जब योज्य पदों की संख्या दो से अधिक होती है; यथा

$$|a+b+c| \leqslant |a| + |b| + |c|.$$

(2) $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ (a कोई धन संख्या है)। यहाँ समता तभी संभव है, जब $a = 1$ है।

(3) $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ (a व b धन संख्याएं हैं); अर्थात् *दो संख्याओं का गुणोत्तरी औसत उनके समांतरी औसत से अधिक नहीं होता* (औसत राशियां देखें § 60 में)। समता $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$ तभी संभव है, जब $a = b$ है।

उदाहरण 3. $a=2,\ b=8;\quad \sqrt{ab}=4;\quad \frac{a+b}{2}=5;$ अत: $4<5$ ।

चित्र 21

यह असमिका कोई 2000 वर्ष पहले से ज्ञात है। ज्यामितिक दृष्टि से यह बिल्कुल स्पष्ट है; देखें चित्र 21, जिसमें

$$CD=\sqrt{AD\cdot DB} \text{ तथा } CO=AO=\frac{AD+DB}{2}.$$

इस असमिका के व्यापकीकरण से निम्न असमिका प्राप्त होती है, जिसे 1821 में फ्रांसीसी गणितज्ञ कोशी (Cauchy) ने निर्धारित किया था :

(4) $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ (संख्याएं $a_1, a_2,\ldots, a_n$ धनात्मक हैं)। समता तभी संभव है, जब $a_1=a_2=\ldots=a_n$ है।

(5) $1:\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\leqslant\sqrt{ab}$ (a व b धनात्मक हैं)। समता तभी संभव है, जब $a=b$ है।

उदाहरण 4. $a=2,\ b=8;$

$1:\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{16}{5};\ \sqrt{ab}=4;$ मिलता है : $\frac{16}{5}<4.$

राशि $1:\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{2ab}{a+b}$ संख्या a व b के बीच की एक राशि है (मध्यस्थ या दरमियानी राशि), जिसे **संनादी औसत** कहते हैं (दे. § 60) (संगीतात्मक संनाद के प्राचीन युनानी सिद्धांत में दो तारों की लंबाइयों का संनादी औसत एक महत्त्वपूर्ण भूमिका अदा करता था, इसीलिए इसका नाम "संनादी" औसत पड़ा है)।

शब्दों में यह समिका निम्न प्रकार से व्यक्त होती है :

दो राशियों का संनादी औसत उनके गुणोत्तरी औसत से अधिक नहीं होता। यह गुण राशियों की किसी भी संख्या के लिए सत्य है। अत: विवरण 4 की असमिका के साथ इसे मिलाने पर :

$$1:\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

(6) $$\left|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right| \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$

(संख्या $a_1, a_2, \ldots, a_n$ धनात्मक हैं), अर्थात् समांतरी औसत का परम मान वर्गी औसत से अधिक नहीं होता। समता तभी संभव है, जब $a_1=a_2=\ldots=a_n$।

उदाहरण 5. $a_1=3,\ a_2=4,\ a_3=5,\ a_4=6$.

इनका समांतरी औसत $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=\frac{9}{2}$ है और वर्गी औसत

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}{4}} = \sqrt{\frac{9+16+25+36}{4}}=\frac{\sqrt{86}}{2}$$ है।

अतः $\frac{9}{2}<\frac{\sqrt{86}}{2}$ है।

(7) $$a_1 b_1+a_2 b_2+\ldots+a_n b_n \leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\ \sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2};$$

जहां $a_1, a_2, \ldots, a_n;\ b_1, b_2, \ldots, b_n$ मनचाही संख्याएं हैं। समता सिर्फ तब संभव है, जब $a_1 : b_1=a_2 : b_2=\ldots=a_n : b_n$.

उदाहरण 6. मान लें कि $a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=5;\ b_1=-3,\ b_2=1,\ b_3=2$ है। अतः

$$a_1 b_1+a_2 b_2+\ldots+a_n b_n=1\cdot(-3)+2\cdot1+5\cdot2=9;$$
$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}=\sqrt{1^2+2^2+5^2}=\sqrt{30};$$
$$\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}=\sqrt{(-3)^2+1^2+2^2}=\sqrt{14}.$$

अतः $9<\sqrt{30}\cdot\sqrt{14}$.

(8) **छेबीशेव की असमिका.** मान लें कि संख्या $a_1, a_2, \ldots, a_n;\ b_1, b_2, \ldots, b_n$ धनात्मक है।

यदि $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$

तथा $b_1\leqslant b_2\leqslant\ldots\leqslant b_n$,

तो

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\leqslant\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}. \quad \ldots(1)$$

किन्तु यदि $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$,
पर $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$,

तो

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \cdot \frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n} \geqslant \frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n} \quad \ldots(2)$$

समता दोनों ही स्थितियों में सिर्फ तब संभव है, जब सभी संख्याएं a_1, a_2, ..., a_n आपस में बराबर हों और साथ ही, जब सभी संख्याएं b_1, b_2,..., b_n आपस में बराबर हों।

उदाहरण 1. मान लें कि $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=7$ और $b_1=2$, $b_2=3$, $b_3=4$ है।

तब

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=\frac{1+2+7}{3}=\frac{10}{3},$$

$$\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}=\frac{2+3+4}{3}=3,$$

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}=\frac{1\cdot2+2\cdot3+7\cdot4}{3}=12.$$

अतः $\frac{10}{3}\cdot3<12.$

उदाहरण 2. मान लें कि $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=7$ तथा $b_1=4$, $b_2=3$, $b_3=2$ है।

तब

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}=\frac{10}{3}, \quad \frac{b_1+b_2+b_3}{3}=3,$$

$$\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{3}=8;$$

अतः $\frac{10}{3}\cdot3>8.$

असमिका (1) तथा (2) को शब्दों में निम्न प्रकार से प्रस्तुत कर सकते हैं :

यदि धनात्मक राशियों के दो क्रमों में पदों की संख्याएं समान हैं तथा दोनों क्रम अह्रासी हैं (या दोनों अवर्धी हैं), तो उनके समांतरी औसतों का गुणनफल उनके गुणन के समांतरी औसत से अधिक नहीं होता। यदि एक क्रम अह्रासी है और दूसरा अवर्धी है, तो विपरीत असमिका मिलती है।

[संख्याओं की सांत या अनंत क्रमबद्ध कतार को **क्रम** (संख्या-क्रम) कहते हैं। क्रम में स्थित हर संख्या इस क्रम का पद (**क्रम-पद**) कहलाती है। **ह्रासी क्रम** में पदों के मान उत्तरोत्तर कम होते जाते हैं। **अह्रासी क्रम** में पदों के मान उत्तरोत्तर बढ़ते हैं या स्थिर रहते हैं। **वर्धी क्रम** में पदों के मान उत्तरोत्तर बढ़ते हैं। **अवर्धी क्रम** में पदों के मान उत्तरोत्तर घटते हैं, या स्थिर रहते हैं। **दो क्रमों के गुणन** से तात्पर्य है एक क्रम के हर पद के साथ दूसरे क्रम के तत्स्थानी पद के साथ गुणा करते हुए एक नया क्रम प्राप्त करना। यदि गुण्य क्रम सांत हैं, तो जाहिर है कि गुणा के लिए उनमें पदों की संख्या समान होनी चाहिए। क्रमों के बारे में और भी देखें § 124 में।]

ये असमिकाएं 1886 में महान रूसी गणितज्ञ पफ्नूची छेबीशेव (1821-1894) द्वारा सिद्ध की गयी थीं। उन्होंने निम्न असमिकाएं सिद्ध करके (1) तथा (2) का व्यापकीकरण भी किया :

यदि $$0<a_1\leqslant a_2\leqslant\dots\leqslant a_n$$

तथा $$0<b_1\leqslant b_2\leqslant\dots\leqslant b_n,$$

तो

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n}}\sqrt{\frac{b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2}{n}}\leqslant\sqrt{\frac{(a_1b_1)^2+(a_2b_2)^2+\dots+(a_nb_n)^2}{n}}\qquad\dots(3)$$

$$\sqrt[3]{\frac{a_1^3+a_2^3+\dots+a_n^3}{n}}\sqrt{\frac{b_1^3+b_2^3+\dots+b_n^3}{n}}\leqslant\sqrt{\frac{(a_1b_1)^3+(a_2b_2)^3+\dots+(a_nb_n)^3}{n}}\qquad\dots(4)$$

इत्यादि।

यदि $$0<a_1\leqslant a_2\leqslant\dots\leqslant a_n$$

तथा $$b_1\geqslant b_2\geqslant\dots\geqslant b_n>0,$$

तो (3), (4) आदि में चिह्न $\leqslant$ की जगह चिह्न $\geqslant$ वाली असमिकाएं मिलेंगी।

§ 118. समतुल्य असमिकाएं. असमिका हल करने की प्रमुख विधियां

समान अज्ञात राशियों वाली दो समिकाएं समतुल्य समिकाएं कहलाती हैं, यदि वे इन अज्ञात राशियों के समान मानों के लिए ही सत्य होती हैं।

दो असमिका-तंत्रों की समतुल्यता की परिभाषा भी इसी तरह से दी जाती है।

उदाहरण 1. असमिकाएं $3x+1>2x+4$ तथा $3x>2x+3$ समतुल्य हैं, क्योंकि दोनों तभी सत्य हैं, जब $x>3$ है; $x\leqslant 3$ होने पर दोनों ही असत्य होंगी।

उदाहरण 2. असमिका $2x\leqslant 6$ तथा $x^2\leqslant 9$ समतुल्य नहीं हैं, क्योंकि प्रथम का हल $x\leqslant 3$ है और दूसरे का हल $-3\leqslant x\leqslant 3$ है। उदाहरणार्थ, $x=-4$ होने पर प्रथम असमिका सत्य रहती है, पर दूसरी नहीं।

असमिका हल करने की प्रक्रिया प्रत्त असमिका (या असमिका-तंत्र) को अन्य समतुल्य असमिकाओं से विस्थापित करने की प्रक्रिया है (असमिका हल करने की ग्राफ-विधि § 255 में देखें)। असमिका हल करने में निम्न युक्तियां काम आती हैं (तुलना करें § 83 से)।

(1) एक व्यंजन की जगह उसका समात्मिक व्यंजन रखना।

(2) किसी योज्य का चिह्न विपरीत करके उसे असमिका के एक पक्ष से दूसरे पक्ष में लाना (§ 116, विवरण 3 के आधार पर)।

(3) असमिका के दोनों पक्षों में किसी समान सांख्यिक (शून्येतर) राशि से गुणा करना। इस प्रक्रिया में यदि गुणक धनात्मक है, तो असमिका का चिह्न पहले जैसा ही रहता है; यदि गुणा के लिए चुनी गयी संख्या ऋणात्मक है, तो असमिका का चिह्न विपरीत हो जाता है (§ 116, विवरण 6)।

इनमें से किसी भी रूपांतरण से जो असमिका मिलती है, वह आरंभिक असमिका के समतुल्य होती है।

उदाहरण. असमिका $(2x-3)^2<4x^3+2$ दी गयी है। वाम पक्ष की जगह उसका समात्मिक व्यंजन $4x^2-12x+9$ रखते हैं। इससे समतुल्य समिका $4x^2-12x+9<4x^2+2$ मिलती है। दायें पक्ष से $4x^2$ को बायें पक्ष में लाते हैं और बायें पक्ष से 9 को दायें पक्ष में लाते हैं। समरूप पदों को जोड़ने के बाद $-12x<-7$ मिलता है। असमिका के दोनों पक्षों में -12 से भाग करते हैं और साथ-साथ असमिका का चिह्न विपरीत कर देते हैं। इससे प्रत्त असमिका का हल $x>\frac{7}{12}$ मिलता है।

असमिका में शून्य से गुणा नहीं करना चाहिए (शून्य से भाग देने का तो प्रश्न ही नहीं उठता)। वर्णिक व्यंजन से असमिका के दोनों पक्षों में गुणा या भाग करने से सामान्यतया आरंभिक के समतुल्य समिका नहीं मिलती।

उदाहरण. असमिका $(x-2)x<x-2$ दी गयी है। यदि दोनों पक्षों में $x-2$ से भाग दें, तो असमिका $x<1$ प्राप्त होगी। पर यह असमिका आरंभिक के समतुल्य नहीं है, क्योंकि, उदाहरणार्थ, मान $x=0$ असमिका $(x-2)x<x-2$ को सन्तुष्ट नहीं करता। असमिका $x>1$ भी आरंभिक के समतुल्य नहीं है, क्योंकि, उदाहरणार्थ, मान $x=3$ असमिका $(x-2)x<(x-2)$ को संतुष्ट नहीं करता।

§ 119. असमिकाओं का वर्गीकरण

अज्ञात राशियों वाली असमिकाओं को **बीजगणितीय** तथा **पारमित** असमिकाओं में विभाजित करते हैं; बीजगणितीय असमिकाओं का आगे *प्रथम, द्वितीय आदि घातों की असमिकाओं* में उपविभाजन करते हैं। यह वर्गीकरण ठीक वैसे ही किया जाता है, जैसे समीकरणों के लिए किया गया था (§ 84)।

उदाहरण 1. $3x^2-2x+5>0$ दूसरे घात की बीजगणितीय असमिका है।

उदाहरण 2. $2^x>x+4$ पारमित असमिका है।

उदाहरण 3. $3x^2-2x+5>3x(x-2)$ एक प्रथम घात वाली बीजगणितीय असमिका है, क्योंकि यह असमिका $4x+5>0$ में रूपांतरित हो जाती है।

§ 120. एक अज्ञात राशि वाली प्रथम घाती असमिका

एक अज्ञात राशि वाली प्रथम घाती असमिका को निम्न रूप दिया जा सकता है :

$$ax>b.$$

हल होगा :

$$x>\frac{b}{a}, \text{ यदि } a>0,$$

और

$$x < \frac{b}{a}, \text{ यदि } a < 0.$$

उदाहरण 1. असमिका $5x-3>8x+1$ हल करें।

हल. $5x-8x>3+1;\ -3x>4;\ x<-\frac{4}{3}.$

उदाहरण 2. असमिका हल करें : $5x+2<7x+6.$

हल. $5x-7x<6-2;\ -2x<4;\ x>-2.$

उदाहरण 3. असमिका $(x-1)^2<x^2+8$ हल करें।

हल. $x^2-2x+1<x^2+8;\ -2x<7;\ x>-\frac{7}{2}.$

टिप्पणी. $ax+b>a_1x+b_1$ रूप वाली असमिका प्रथम घात की असमिका है, *यदि a तथा a_1 बराबर नहीं है।* यदि $a=a_1$, तो प्रत्त असमिका सांख्यिक असमिका (सही या गलत) का रूप धारण कर लेती है।

उदाहरण 1. असमिका $2(3x-5)<3(2x-1)+5$ प्रत्त है। यह $6x-10<6x+2$ के समतुल्य है। अंतिम असमिका सांख्यिक (समात्मिक) असमिका $-10<2$ में रूपांतरित हो जाती है। इसका मतलब है कि आरंभिक असमिका समात्मिक है।

उदाहरण 2. असमिका $2(3x-5)>3(2x-1)+5$ जिस समतुल्य सांख्यिक असमिका में रूपांतरित होती है, वह निरर्थक है : $-10>2$। इसका मतलब है आरंभिक असमिका का हल नहीं है।

§ 121. प्रथम घात की असमिकाओं का तंत्र

प्रथम घात के असमिका-तंत्र को हल करने के लिए हर असमिका को अलग-अलग हल करते हैं और प्राप्त परिणामों की तुलना करते हैं। इस तुलना से या तो तंत्र का हल मिल जाता है, या पता चल जाता है कि तंत्र का हल नहीं है।

उदाहरण 1. असमिका-तंत्र हल करें :

$$4x-3>5x-5;\ 2x+4<8x.$$

प्रथम असमिका का हल $x<2$ है, दूसरी असमिका का हल $x>\frac{2}{3}$ है; अतः तंत्र का हल $\frac{2}{3}<x<2$ है।

उदाहरण 2. असमिका-तंत्र हल करें :

$$2x-3>3x-5;\ 2x+4>8x.$$

प्रथम असमिका का हल $x<2$ है, दूसरी का $x<\frac{2}{3}$ है। तंत्र का हल

$x < \frac{2}{3}$ होगा (क्योंकि इस स्थिति में शर्त $x < 2$ हमेशा सही है)।

उदाहरण 3. असमिका-तंत्र हल करें :

$$2x-3<3x-5;\ 2x+4>8x.$$

प्रथम असमिका का हल $x>2$ है, दूसरी का $x<\frac{2}{3}$ है। ये हल एक-दूसरे का प्रतिवाद करते हैं। तंत्र का हल नहीं है।

उदाहरण 4. असमिका-तंत्र हल करें :

$$2x<16;\ 3x+1>4x-4;\ 3x+6>2x+7;$$
$$x+5<2x+6.$$

इनके हल हैं (क्रमशः) : $x<8,\ x<5,\ x>1,\ x>-1$। इन हलों की तुलना करने पर पता चलता है कि प्रथम दो हलों की जगह सिर्फ तीसरे हल से काम चल जायेगा। तीसरे और चौथे हलों की जगह सिर्फ तीसरे हल से काम चल जायेगा। अतः तंत्र का हल $1<x<5$ है।

§ 122. दूसरे घात की एक अज्ञात राशि वाली सरलतम असमिका

(1) असमिका $x^2<m$. (1)

(a) यदि $m>0$ है, तो हल होगा

$$-\sqrt{m}<x<\sqrt{m} \quad (1a)$$

(b) यदि $m\leqslant 0$ है, तो असमिका का हल नहीं है (वास्तविक संख्या का वर्ग ऋणात्मक नहीं हो सकता)।

(2) असमिका $x^2>m$. (2)

(a) यदि $m>0$ है, तो असमिका (2) तभी सत्य होगी, (i) जब x के मान $\sqrt{m}$ से अधिक होंगे और (ii) जब x के मान $-\sqrt{m}$ से कम होंगे :

$$x>\sqrt{m} \text{ या } x<-\sqrt{m}. \quad (2a)$$

(b) यदि $m=0$ है, तो असमिका (2) $x=0$ को छोड़कर x के सभी मानों के लिए सत्य है :

$$x>0 \text{ या } x<0 \quad (2b)$$

(c) यदि $m<0$ है, तो असमिका (2) समात्मिक है।

उदाहरण 1. असमिका $x^2<9$ का हल $-3<x<3$ है।

उदाहरण 2. असमिका $x^2<-9$ का हल नहीं है।

उदाहरण 3. असमिका $x^2 > 9$ का हल वे सभी संख्याएं हैं, जो 3 से अधिक हैं और -3 से कम हैं ।

उदाहरण 4. असमिका $x^2 > -9$ समात्मिक है ।

§ 123. दूसरे घात की एक अज्ञात राशि वाली असमिका (सार्व. स्थिति)

दूसरे घात की असमिका में x^2 के संद से भाग देकर उसे निम्नांकित में से कोई एक रूप दिया जा सकता है :

$$x^2+px+q<0 \quad (1)$$

$$x^2+px+q>0 \quad (2)$$

स्वतंत्र पद q को दायें पक्ष में लाते हैं और दोनों पक्षों में $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ जोड़ देते हैं, जिससे

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2<\left(\frac{p}{2}^2\right)-q, \quad (1')$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2>\left(\frac{p}{2}\right)^2-q. \quad (2')$$

यदि $x+\frac{p}{2}$ को z से द्योतित करें और $\frac{p}{2}-q$ को m से, तो हमें निम्न सरलतम असमिकाएं प्राप्त होती हैं :

$$z^2<m, \quad (1'')$$

$$z^2>m. \quad (2'')$$

इस तरह की असमिकाओं के हल पिछले अनुच्छेद में दिये गये थे । उनकी सहायता से असमिका (1) या (2) का हल ज्ञात किया जा सकता है ।

उदाहरण 1. असमिका $-2x^2+14x-20>0$ हल करें । दोनों पक्षों में -2 से भाग देते हैं (§118, विवरण 3), जिससे $x^2-7x+10<0$ प्राप्त होता है । स्वतंत्र पद 10 को दायें लाते हैं और दोनों तरफ $(\frac{7}{2})^2$ जोड़ देते हैं, जिससे $(x-\frac{7}{2})^2<\frac{9}{4}$ मिलता है । अत: (§ 122, स्थिति **1a**)

$$-\tfrac{3}{2}<x-\tfrac{7}{2}<\tfrac{3}{2}.$$

हर पक्ष में $\frac{7}{2}$ जोड़ने पर

$$-\tfrac{3}{2}+\tfrac{7}{2}<x<\tfrac{3}{2}+\tfrac{7}{2}, \text{ अर्थात्}$$

$$2<x<5.$$

उदाहरण 2. असमिका $-2x^2+14x-20<0$ को हल करें। पिछले उदाहरण की ही तरह रूपांतरण करके $(x-\frac{7}{2})^2>\frac{9}{4}$ प्राप्त करते हैं। इससे (§ 122, स्थिति 2a) पता चलता है कि हमारी असमिका तभी सत्य हो सकती है, (i) जब $x-\frac{7}{2}>\frac{3}{2}$, अर्थात् $x>5$ है और (ii) जब $x-\frac{7}{2}<-\frac{3}{2}$, अर्थात् $x<2$ है।

उदाहरण 3. असमिका $x^2+6x+15<0$ हल करें। स्वतंत्र पद दायें लाकर और दोनों तरफ $(\frac{6}{2})^2$, अर्थात् 9 जोड़ कर $(x+3)^2<-6$ प्राप्त करते हैं। इस असमिका का कोई हल नहीं है (§ 122, स्थिति 1b)। अतः प्रत्त असमिका का भी कोई हल नहीं है।

उदाहरण 4. असमिका $x^2+6x+15>0$ का हल ज्ञात करें। उदाहरण 3 की तरह ही $(x+3)^2>-6$ प्राप्त करते हैं। यह असमिका समात्मिक है (§ 122, स्थिति 2c)। अतः प्रत्त असमिका भी समात्मिक है।

§ 124. समांतर श्रेढ़ी

श्रेढ़ी के लिए लातीनी शब्द "प्रोग्रेसिया" का अर्थ "प्रगति", "आगे की ओर गति" है। गणित में पहले इस शब्द से संख्याओं के किसी भी ऐसे क्रम को द्योतित करते थे, जिसे किसी एक दिशा में अनंत बढ़ाते रहने के लिए कोई नियम दिया रहता था। उदाहरणार्थ, पूर्ण संख्याओं का वर्ग करते जाने पर क्रम 1, 4, 9, 16, 25 आदि मिलता है। इस नियम का अनुसरण करने पर ऐसे क्रम को अनंत रूप से लंबा किया जा सकता है।

[प्राचीन भारतीय गणितज्ञों ने ऐसे क्रम को **श्रेढ़ी** की संज्ञा दी थी। इसका अर्थ है : प्रथम, द्वितीय, तृतीय, आदि श्रेणियों, अर्थात् उत्तरोत्तर उच्च होते जाने वाली श्रेणियों में उपस्थित संख्याओं को जोड़ने के लिए निकट लाना (श्रेणियों के क्रम में रखना)। किस श्रेणी में कौन-सी संख्या होगी, यह किसी स्थिर नियम पर निर्भर करता है (जैसे, हर श्रेणी में पिछले से 2 अधिक इकाइयां होंगी, या हर श्रेणी में तदनुरूप नैसर्गिक (पूर्ण) संख्या का वर्ग होगा, आदि)।]

क्रम में उपस्थित संख्याओं को **पद** कहते हैं [भारतीय गणितज्ञों के अनुसार इन्हें श्रेणी (घर, कक्षा, समूह आदि के अर्थ में) नाम दिया जा सकता है]।

वर्तमान समय में शब्द श्रेढ़ी (प्रोग्रेसिया) का इतने व्यापक अर्थ में उपयोग नहीं करते; इसकी जगह शब्द **क्रम** (या संख्या-क्रम) का ही व्यवहार होता है। पर दो विशेष प्रकार की श्रेढ़ियों—समांतर तथा गुणोत्तर—के नाम पहले जैसे ही रह गये हैं।

समांतर श्रेणी *ऐसे संख्या-क्रम को कहते हैं, जिसमें एक के बाद एक आने वाले किन्हीं दो पदों का अंतर स्थिर रहता है।* इस *स्थिर अंतर को* **समांतर श्रेढ़ी का सार्व अंतर** कहते हैं। [अक्सर इसे किसी पद में से पिछला पद घटा कर ज्ञात करते हैं: $d=a_n-a_{n-1}$]

उदाहरण 1. संख्याओं का नैसर्गिक क्रम 1, 2, 3, 4, 5... एक समांतर श्रेढ़ी है, जिसका सार्व अंतर 1 है।

उदाहरण 2. संख्या-क्रम 10, 8, 6, 4, 2, 0, −2, −4,... एक समांतर श्रेढ़ी है, जिसका सार्व अंतर −2 है।

ममांतर श्रेढ़ी के किसी भी पद को निम्नांकित सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं :

$$a_n=a_1+d(n-1),$$

जहां a_1 प्रथम पद है, d सार्व अंतर है, n विचाराधीन पद की क्रम-संख्या (श्रेणी) है।

समांतर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का संकल (योगफल) निम्न सूत्र से व्यक्त होता है :

$$s_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}.$$

उदाहरण 3. श्रेढ़ी 12, 15, 18, 21, 24,... में दसवां पद $a_{10}=12+3\cdot9=39$ है।

प्रथम दस पदों का संकल है :

$$s_{10}=\frac{(a_1+a_{10})10}{2}=\frac{(12+39)10}{2}=255.$$

उदाहरण 4. 1 से 100 तक की सभी पूर्ण संख्याओं का संकल $\frac{(1+100)100}{2}=5050$ है।

संकल s_n के लिए एक और सुविधाजनक सूत्र है :

$$s_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n.$$

§ 125. गुणोत्तर श्रेढ़ी

जिस संख्या-क्रम में एक के बाद एक आने वाले दो पदों का व्यतिमान स्थिर रहता है, उसे **गुणोत्तर श्रेढ़ी** *कहते हैं।* इस स्थिर व्यतिमान को **सार्व व्यति-**

मान (या सिर्फ व्यतिमान) कहते हैं [अक्सर इसे किसी पद में पिछले पद से भाग देकर ज्ञात करते हैं: $q=a_n/a_{n-1}$] ।

उदाहरण 1. संख्या **5**, 10, **20**, 40,... सार्व व्यतिमान 2 वाली एक गुणोत्तर श्रेढ़ी निर्मित करती है ।

उदाहरण 2. संख्या 1, 0.1, 0.01, 0.001 आदि एक गुणोत्तर श्रेढ़ी बनाती हैं, जिसका सार्व व्यतिमान 0.1 है ।

वर्धी गुणोत्तर श्रेढ़ी के सार्व व्यतिमान का परम मान इकाई से अधिक होता है (जैसा उदाहरण 1 में है); **ह्रासी गुणोत्तर श्रेढ़ी** के सार्व व्यतिमान का परम मान इकाई से कम होता है (जैसा उदाहरण 2 में है) ।

टिप्पणी. श्रेढ़ी का व्यतिमान ऋणात्मक भी हो सकता है, पर ऐसी श्रेढ़ी का कोई व्यावहारिक महत्त्व नहीं है ।

गुणोत्तर श्रेढ़ी का कोई भी पद निम्नांकित सूत्र से ज्ञात किया जा सकता है :

$$a_n=a_1q^{n-1} \tag{1}$$

यहां a_1 प्रथम पद है, q=श्रेढ़ी का स्थिर व्यतिमान है, n विचाराधीन पद की क्रम-संख्या (श्रेणी) है ।

गुणोत्तर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का संकल निम्न दो व्यंजनों से व्यक्त हो जाता है ।

$$s_n=\frac{a_nq-a_1}{q-1}=\frac{a_1-a_nq}{1-q} \tag{2}$$

यहां $q\neq 1$ है । प्रथम व्यंजन का उपयोग स्थिति $|q|>1$ (वर्धी श्रेढ़ी) में सुविधाजनक होता है और दूसरे व्यंजन का स्थिति $|q|<1$ (ह्रासी श्रेढ़ी) में ।

यदि $q=1$ है, तो श्रेढ़ी में सभी पद परस्पर बराबर हैं, अतः (2) की जगह $s_n=na_1$ होगा ।

उदाहरण 3. गुणोत्तर श्रेढ़ी 5, 10, 20, 40,... में दसवां पद $a_{10}=5\cdot 2^9 = 5\cdot 512=2560$ है । प्रथम दस पदों का संकल

$$s_{10}=\frac{a_{10}\cdot 2-a_1}{2-1}=5115.$$

s_n का निम्न सूत्र अक्सर अधिक सुविधाजनक होता है :

$$s_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}.$$

यदि $|q|<1$ है और n का असीम रूप से वर्धन हो रहा है, तो प्रथम n पदों का संकल जिस संख्या s के निकट पहुँचने लगता है (जिस संख्या की ओर

प्रवृत्त या संसृत होता है) उसे **अनंत ह्रासी गुणोत्तर श्रेढ़ी का संकल** कहते हैं।

अनंत ह्रासी गुणोत्तर श्रेढ़ी का संकल निम्न सूत्र से व्यक्त होता है :

$$s=\frac{a_1}{1-q}.$$

उदाहरण 4. अनंत ह्रासी गुणोत्तर श्रेढ़ी $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ ($a_1=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{2}$) का संकल $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$ है, अर्थात् n का असीम वर्धन होने पर संकल $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^n}$ संख्या 1 के निकटतर होने लगता है।

§ 126. ऋण, शून्य और अपूर्ण घात-सूचक

n-वें घात (n-वीं कोटि के घात) के कलन का अर्थ "संख्या को n बार संगुणक के रूप में लेकर गुणा करना" समझा जाता था। यदि इस तरह देखा जाये, तो 9^{-2} या $9^{1\frac{1}{2}}$ जैसे व्यंजन निरर्थक हो जाते हैं, क्योंकि 9 को "माइनस दो" बार या $1\frac{1}{2}$ बार संगुणक के रूप में नहीं लिया जा सकता है। फिर भी गणित में इन व्यंजनों को नियत अर्थ दिया जाता है; जैसे 9^{-2} को $\frac{1}{9^2}=\frac{1}{81}$ के बराबर मानते हैं, $9^{1\frac{1}{2}}=9^{\frac{3}{2}}$ को $\sqrt[2]{9^3}=(\sqrt{9})^3$ $=27$ मानते हैं, आदि। गणित में जैसा कि हमेशा होता रहता है, यहां भी एक गणितीय संक्रिया की अवधारणा का व्यापकीकरण हो रहा है। इस तरह का सरलतम और सबसे पहला व्यापकीकरण था अपूर्णांकी गुणक (भिन्न) के साथ गुणा की अवधारणा को निर्धारित करना (दे. § 35)। अपूर्ण तथा ऋण घात-सूचक को गणित में प्रवेश नहीं भी दिया जा सकता है। तब एक ही प्रकार के प्रश्न हल करने के लिए किन्हीं एक जैसे नियमों की जगह अलग-अलग प्रकार के कई विभिन्न नियम लागू करने पड़ते। जिन प्रश्नों की यहां बात चल रही है, उनमें से लगभग सभी उच्च गणित के क्षेत्र में आते हैं, इसीलिए बहुत से ऐसे मूर्त्त उदाहरण हैं, जो इस पुस्तक की परिधि के बाहर हैं। लेकिन इनमें से एक प्रश्न का सरल गणित में बड़े विस्तार के साथ अध्ययन होता है। इस प्रश्न का संबंध लघुगणकों के साथ है (दे. § 62)। ध्यातव्य है कि लघुगणक-सिद्धांत, जो अब घात की अवधारणा के व्यापकीकरण के साथ अटूट रूप से संबंधित है, अपने

आविष्कार (17-वीं शती के आरंभ) के बाद से पूरे सौ साल तक अपूर्णांकी तथा ऋणात्मक घात-सूचकों के बगैर ही काम चलाता रहा। सिर्फ 17-वीं शती के अंत में गणितीय समस्याओं की जटिलता और उनकी संख्या में वृद्धि के फलस्वरूप घात की अवधारणा के व्यापकीकरण की अदम्य आवश्यकता उत्पन्न हुई। इस दिशा में कई वैज्ञानिक आगे बढ़े, पर इसे अंतिम रूप न्यूटन ने दिया।

ऋण घात की परिभाषा.* किसी संख्या का (पूर्णांकी) ऋण घात-सूचक वाला घात *इकाई बटा उसी संख्या का उस धन घात-सूचक वाला घात है,* जो ऋण घात-सूचक के परम मान के बराबर होता है, अर्थात्

$$a^{-m}=\frac{1}{a^{m}}.$$

उदाहरण. $2^{-3}=\frac{1}{2^{3}}=\frac{1}{8}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}=\frac{1}{(\frac{3}{4})^{2}}=\frac{16}{9}$; $(-4)^{-3}=\frac{1}{(-4)^{3}}=-\frac{1}{64}$ आदि।

समता $a^{-m}=1:a^{m}$ संख्या m के धन व ऋण दोनों ही मानों के लिए सत्य है। यदि, उदाहरणार्थ, $m=-5$, तो $-m=+5$ होगा और हमारे सूत्र का रूप $a^{5}=\frac{1}{a^{-5}}$ होगा, यह उपरोक्त परिभाषा के अनुरूप ही है।

ऋण घातों के साथ संपन्न होने वाली संक्रियाएं उन सभी नियमों का पालन करती हैं, जो धन घातों के साथ की संक्रियाओं पर लागू होते हैं। इतना ही नहीं, ऋण घातों को अपनाने के बाद ही धन घात के साथ की संक्रियाओं के नियम पूर्ण सार्वत्व प्राप्त करते हैं।

यथा, सूत्र $a^{m}:a^{n}=a^{m-n}$ (दे. § 90) अब सिर्फ $m>n$ की स्थिति में ही नहीं, $m<n$ की स्थिति में भी लागू हो सकता है।

उदाहरण. $a^{5}:a^{8}=a^{5-8}=a^{-3}$। सचमुच, परिभाषा $a^{-3}=\frac{1}{a^{3}}$ के अनुसार समता $a^{5}:a^{8}=a^{-3}$ का अर्थ है $\frac{a^{5}}{a^{8}}=\frac{1}{a^{3}}$।

---

* शब्द "ऋण घात", "शून्य घात", "अपूर्णांकी घात" हम क्रमशः ऋण, शून्य और भिन्न (अपूर्णांकी) घात-सूचकों (या निस्थापकों) वाले घातों को कहते हैं।

सूत्र $a^m : a^n = a^{m-n}$ को सार्वत्व देने के लिए जरूरी है कि वह स्थिति $m=n$ के लिए भी सत्य हो; इसके लिए निम्न परिभाषा अपनाते हैं।

शून्य घात की परिभाषा. *किसी भी शून्येतर संख्या का शून्य घात इकाई के बराबर है* (व्यंजन $\frac{0}{0}$ की तरह (§ 38) व्यंजन 0^0 भी अनिश्चित राशि है)।

उदाहरण. $3^0=1$; $(-3)^0=1$; $(-\frac{2}{3})^0=1$; $a^5 : a^5 = a^0 = 1$.

अपूर्णांकी घात की परिभाषा. संख्या a (वास्तविक) का घात-सूचक $\frac{m}{n}$ से घातन करने का अर्थ है *संख्या a के m-वें घात का n-वां मूल ज्ञात करना।*

मिश्र संख्या के अपूर्णांकी घात के बारे में दे. § 113।

उदाहरण. $9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = 27$;

$$\left(\frac{8}{27}\right)^{1\frac{1}{3}} = \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{8}{27}\right)^4} = \frac{16}{81};$$

$$3^{2\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{2}} = \sqrt{243} \approx 15.58.$$

टिप्पणी 1. आधार a की जगह ऋण संख्या भी ले सकते हैं, पर इसका अपूर्णांकी घात वास्तविक नहीं भी हो सकता है। उदाहरणार्थ,

$$(-2)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-2)^3} = \sqrt[4]{-8}.$$

मूल $\sqrt[4]{-8}$ वास्तविक नहीं हो सकता।

आमतौर से, सरल गणित में सिर्फ धनात्मक आधार के घातों पर विचार किया जाता है।

टिप्पणी 2. जहां तक घात-सूचकों का सवाल है, सरल गणित में धनात्मक के साथ-साथ ऋणात्मक अपूर्णांकी घात-सूचकों पर भी विचार किया जाता है; ऋणात्मक घात-सूचक धनात्मक सूचकों से कम महत्त्वपूर्ण नहीं होते। लघुगणकी कलन सीखने के लिए यथासंभव अधिक प्रश्न हल करके ऋणात्मक अपूर्णांकी घात-सूचकों वाले घातों का अर्थ आत्मसात करना नितांत आवश्यक है।

उदाहरण.

$$9^{-\frac{3}{2}} = 1 : 9^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{27};$$

$$\left(\frac{8}{27}\right)^{-1\frac{2}{3}} = 1 : \left(\frac{8}{27}\right)^{1\frac{2}{3}} = \frac{243}{32};$$

$$3^{-2\frac{1}{2}} = 1 : 3^{-2\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{243}} \approx 0.0642.$$

अपूर्णांकी घात-सूचक अपनाने से घातों के साथ संक्रियाओं के नियमों में कोई परिवर्तन नहीं होता। यथा, सूत्र $a^m.\ a^n = a^{m+n}$ आदि वैसे ही रह जाते हैं।

उदाहरण. $a^{\frac{5}{7}}\ .\ a^{-\frac{3}{7}} = a^{\frac{2}{7}}$.

सचमुच में, $a^{\frac{5}{7}} = \sqrt[7]{a^5}$; $a^{-\frac{3}{7}} = 1 : \sqrt[7]{a^3}$, $a^{\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{a^2}$, अतः हमारे आलेख का अर्थ है $\sqrt[7]{a^5} \cdot \frac{1}{\sqrt[7]{a^2}} = \sqrt[7]{a^3}$, जो बिल्कुल सही है (दे. § 91, नियम 4)।

§ 127. लघुगणकी विधि का सार. लघुगणकी सारणी बनाना

गुणा-भाग, घातन-मूलन आदि संक्रियाएं जोड़-घटाव की तुलना में बहुत ही श्रमसाध्य हैं, विशेषकर जब बहुअंकी संख्याओं के साथ उन्हें संपन्न करना पड़ता है। इस तरह की संक्रियाओं की अपरिहार्य आवश्यकता 16वीं शती में ही उत्पन्न हो गयी थी, क्योंकि लंबी सामुद्रिक यात्राओं के लिए ज्योतिर्विज्ञान संबंधी प्रेक्षणों और कलनों का तेजी से विकास हो रहा था। ज्योतिर्विज्ञान संबंधी कलन के दौरान 16वीं शती के अंत में लघुगणकी कलन का जन्म हुआ।

वर्तमान समय में जब भी बहुअंकी संख्याओं से वास्ता पड़ता है, लघुगणकी कलन का उपयोग किया जाता है। चार अंकों वाली संख्याओं के साथ ही संक्रिया में लघुगणक-विधि लाभजनक सिद्ध होने लगती है। और यदि पाँच अंकों तक की शुद्धता से परिणाम ज्ञात करने हैं, तो लघुगणक विधि अनिवार्य हो जाती है। इससे अधिक परिशुद्धता की आवश्यकता व्यवहार में बहुत कम पड़ती है।

लघुगणक-विधि का लाभ यह है कि वह गुणा और भाग की संक्रियाओं को जोड़-घटाव की संक्रियाओं में परिणत कर देती है, जो कम श्रमसाध्य हैं। घातन, मूलन तथा कई अन्य (जैसे त्रिकोणमितिक) कलन भी काफी सरल हो जाते हैं।

अब इस विधि के मूल विचारों को उदाहरणों की सहायता से समझने का प्रयत्न करते हैं।

मान लें कि 10,000 में 100,000 से गुणा करना है। निस्संदेह यह संक्रिया हम बहुअंकी संख्याओं के गुणन के आरेखानुसार नहीं संपन्न करेंगे। हम सिर्फ गुण्य में शून्यों की संख्या (4) और गुणक में शून्यों की संख्या (5) को जोड़कर ($4+5=9$) फौरन गुणनफल लिख लेंगे: 1,000,000,000 (एक पर नौ शून्य)।

ऐसे कलनों की वैधता इस बात पर आधारित है कि प्रत्त संगुणक संख्या 10 के पूर्णांकी घात-सूचक वाले घात हैं: हम लोग 10^4 में 10^5 से गुणा कर रहे हैं; इस संक्रिया में घात-सूचक जुड़ जाते हैं ($10^{4+5}=10^9$)। दस के घातों का भाग भी इसी तरह करते हैं (भाग की जगह घात-सूचकों का घटाव करते हैं)।

पर इस तरह से बहुत कम संख्याओं का गुणा-भाग किया जा सकता है; उदाहरणस्वरूप एक से दस लाख की सीमा में हमें (1 को छोड़कर) ऐसी सिर्फ छः संख्याएं प्राप्त होती हैं: 10, 1,000, 10,000, 100,000, 1,000,000। यदि हम कहीं अधिक संख्याओं के साथ इस विधि से गुणा-भाग करना चाहते हैं, तो हमें घाताधार के रूप में 10 की जगह कोई ऐसी संख्या रखनी होगी, जो 1 के अधिक निकट हो। उदाहरण के लिए आधार 2 लेते हैं और उसके प्रथम 12 घातों की सारणी बनाते हैं।

घात-सूचक (लगरथ)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
घात (संख्या)	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

ऊपरी पंक्ति में स्थित संख्याओं (घात-सूचकों) को अब हम **लघुगणक** कहेंगे और निचली पंक्ति में स्थित संख्याओं (2 के तदनुरूप घातों) को सिर्फ **संख्या**।

['लघुगणक' 'लोगरिथ्म' के लिए अधिकतर प्रचलित शब्द है, पर कई कारणों से असुविधाजनक भी है। शब्द 'लगरथ' हिन्दी में शब्द-निर्माण की दृष्टि से बहुत दोषपूर्ण है (इसे 'समर्थ' से 'समरथ' की देखादेखी 'लगर्थ' से 'लगरथ' माना जा सकता है); इसके अर्थ की व्याख्या भी खींच-तान कर ही की जा सकती है: (आधार के साथ) लग कर (घात का) अर्थ देने वाला। फिर भी लिखने-बोलने में सुविधाजनक होने के कारण और 'लोगरिथ्म' के साथ स्वर-

साम्य रखने के कारण तकनीकी साहित्य में इसे मान्यता दी जा सकती है, इसलिए इस पुस्तक में यहां (और आगे) 'लघुगणक' की जगह **लगरथ** का प्रयोग हुआ है। **लगरथन** (लगरथ ज्ञात करना) और **लगरथी** (लगरथ संबंधी) जैसे शब्दों को भी स्थान दिया गया है। लघुगणक शब्द शुरू से ही नहीं हटाया गया है, ताकि पाठकों को असुविधा न हो।]

निचली पंक्ति की किन्हीं दो संख्याओं को आपस में गुणा करने के लिए उनके ऊपर स्थित संख्याओं को जोड़ देना काफी रहता है। उदाहरणतया, 32 व 64 का गुणनफल ज्ञात करने के लिए उनके ऊपर स्थित संख्याओं 5 तथा 6 को जोड़ देते हैं : $5+6=11$। इष्ट गुणनफल संख्या 11 के नीचे (2048) है। संख्या 4096 में 256 से भाग देने के लिए उनके ऊपर की संख्याएं 12 तथा 8 लेते हैं, 12 में से 8 घटाते हैं ($12-8=4$)। भागफल संख्या 4 के नीचे (16) प्राप्त करते हैं।

यदि संख्या 2 के शून्य तथा ऋण घातों के लिए सारणी को बायीं ओर बढ़ाया जाये, तो छोटी संख्या में बड़ी संख्या से भी भाग संभव होगा।

संख्या 2 के घातों के बीच छूटी हुई संख्याएं कम हैं, बनिस्बत कि 10 के घातों के बीच; फिर भी निचली पंक्ति में बहुत सी संख्याएं अनुपस्थित हैं। इसीलिए हमारी सारणी का कोई व्यावहारिक उपयोग नहीं है। पर यदि आधार के रूप में संख्या 2 की जगह कोई ऐसी संख्या ली जाये, जो 1 के और भी निकट हो, तो यह कमी पूरी की जा सकेगी।

उदाहरणस्वरूप संख्या 1.00001 को आधार की जगह रखते हैं। 1 से 1,00,000 के बीच इस संख्या के दस लाख से अधिक (1,151,292) क्रमबद्ध घात आ जायेंगे। यदि हम सिर्फ छः सार्थक अंकों को सुरक्षित रखते हुए इन घातों का सन्निकरण करेंगे, तो दस लाख सन्निकृत परिणामों के बीच 1 से 10,000 तक की सारी पूर्ण संख्याएं मिल जायेंगी। बेशक ये घातों के सन्निकृत मान ही होंगे, पर चूंकि पांच अंकों वाली पूर्ण संख्याओं के गुणा-भाग में हमारी दिलचस्पी परिणाम के सिर्फ प्रथम पांच अंकों में होगी, इसलिए इस नयी सारणी की सहायता से हम पांच अंकों वाली पूर्ण संख्याओं और पाँच सार्थक अंकों वाले दशमलव भिन्नों के साथ गुणा-भाग संपन्न कर सकेंगे।

प्रथम लगरथी सारणियां इसी तरह से बनायी गयी थीं।* इनके कलन में

---

* स्विट्जरलैंड के ब्यूर्गी (Bürgi) द्वारा 1590 के आस-पास; कुछ समय बाद स्काटलैंड के नैपियर (Napier) ने स्वतंत्र रूप से एक सारणी तैयार की, जिसमें आधार इकाई के बहुत निकट था, पर इकाई से कम था। ब्यूर्गी अपनी कृति 1620 में प्रकाशित कर पाये थे; नैपियर की सारणी 1614 में ही प्रकाशित हो चुकी थी।

कई वर्षों का अथक परिश्रम लगा था। वर्तमान समय में उच्च गणित की विधियों से यह काम कोई भी व्यक्ति एकाध महीने में पूरा कर सकता है। तीन सौ वर्ष पहले इस काम को सम्पन्न करने में सारा जीवन अर्पित करना पड़ता था। पर सारणी के एक बार बन चुकने पर हजारों-हजार कलन सरलता से संपन्न होने लगे।

आजकल लगरथी सारणियों में आधार के रूप में संख्या 10 को लिया जाता है। इससे अनेक फायदे हैं (क्योंकि हमारी गिनती की प्रणाली भी दशभू प्रणाली है)। इसमें पूर्ण संख्याएं प्राप्त करने के लिए संख्या 10 के अपूर्णांकी घात लेने पड़ते हैं।

आधार 10 होने पर किसी संख्या का लगरथ उसका **दशभू लगरथ** कहलाता है। आधार 1.00001 पर सारणी बन चुकने पर आधार 10 वाली सारणी बनाना विशेष कठिन नहीं रह जाता। मान लें कि हमें संख्या 3 का दशभू लगरथ प्राप्त करना है, अर्थात् वह घात-सूचक ज्ञात करना है, जिससे 10 का घातन करने पर 3 मिले। आधार 1.00001 वाली सारणी से

$$10 \approx 1.00001^{230258},$$

$$3 \approx 1.00001^{109861}$$

प्रथम (सन्निकृत) समता के दोनों पक्षों का $\frac{1}{230258}$ से घातन करने पर प्राप्त होगा :

$$1.00001 \approx 10^{(1:230,258)}.$$

अत: दूसरी (सन्निकृत) समता को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$$3 \approx 10^{(109,861\ :\ 230,258)},$$

अर्थात् 3 का दशभू लगरथ 109861 : 230258 = 0.47712 है। अन्य संख्याओं का भी दशभू लगरथ इसी तरह से ज्ञात किया जा सकता है।*

---

* दशभू लगरथों की सारणी बनाने का विचार स्काटिश नैपियर और उनके अंग्रेज सहकर्मी ब्रिग्स (Briggs) का था। पुरानी के आधार पर आधार 10 वाली नयी सारणी बनाने के लिए कलन-कार्य दोनों ने साथ-साथ मिलकर आरंभ किया था। नैपियर की मृत्यु के बाद ब्रिग्स ने काम को अकेले आगे बढ़ाया और सारणी पूरी की (1624 में पूर्ण सारणी प्रकाशित की)। इसलिए दशभू लगरथ को ब्रिग्स का लगरथ भी कहते हैं। अपूर्णांकी घात उस समय गणित में अपनाये नहीं गये थे, पर ब्रिग्स और नैपियर उनके बिना ही काम चला लेते थे, क्योंकि लगरथों की उनकी परिभाषा हमारी परिभाषा से कुछ भिन्न थी।

§ 128. लगरथों के मुख्य गुण

संख्या N का आधार a पर लगरथ घात-सूचक x को कहते हैं, जिसमें a का घातन करने पर संख्या N मिलती है।

द्योतन : $\log_a N = x$. [पढ़ें : संख्या एन का ए-आधारी लगरथ बराबर एक्स, या संक्षेप में : लौग ए-एन बराबर एक्स]। आलेख $\log_a N = x$ और $a^x = N$ बिलकुल समान अर्थ वाले कथन हैं, अर्थात्

$$(\log_a N = x) \Leftrightarrow (a^x = N) \qquad ...(1)$$

उदाहरण. $\log_2 8 = 3$, क्योंकि $2^3 = 8$; $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$, क्योंकि $(\frac{1}{2})^{-4} = 16$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$, क्योंकि $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

लगरथ की परिभाषा से निम्न समात्मिका निगमित होती है :

$$a^{\log_a N} = N \qquad ...(2)$$

उदाहरण. $2^{\log_2 8} = 8$, अर्थात् $2^3 = 8$; $5^{\log_5 25} = 25$; $10^{\lg N} = N$ ($\log_{10}$ की जगह सिर्फ lg लिखते हैं, अत: $\lg N$ संख्या N का दशभू लगरथ है। जब बिना आधार इंगित किये प्रतीक log का प्रयोग करते हैं, तो इसका अर्थ होता है कि आधार कोई भी मनचाही संख्या हो सकती है; पर एक सूत्र के अंतर्गत आधार अपरिवर्तित माना जाता है। [यदि परिवर्तन इंगित नहीं है]।

संख्या a (**लगरथ का आधार**) और N (**संख्या**) हम पूर्णांक भी ले सकते हैं और अपूर्णांक भी (दे. ऊपर के उदाहरण), पर *उनका धनात्मक होना अनिवार्य है — यदि हम चाहते हैं कि लगरथ वास्तविक संख्या ही हों।*

यदि लगरथ का आधार इकाई से अधिक (जैसे 10) लिया जाये, तो बड़ी संख्या का बड़ा लगरथ मिलेगा। इकाई से बड़ी संख्याओं के लगरथ धनात्मक होंगे और इकाई से छोटी संख्याओं के लगरथ ऋणात्मक होंगे। इकाई का लगरथ सदा शून्य होता है, चाहे आधार कुछ भी हो। आधार के बराबर संख्या का लगरथ हमेशा 1 होता है (जैसे दशभू लगरथ में $\lg 10 = 1$) [सार्व रूप में $\log_a a = 1$]।

लगरथ का आधार a इकाई के बराबर नहीं होना चाहिए, नहीं तो इकाई से इतर किसी संख्या का कोई भी लगरथ नहीं होगा और संख्या एक के लिए हर संख्या लगरथ होगी।

गुणनफल का लगरथ संगुणकों के लगरथों का योगफल है :

$$\log (N_1 N_2) = \log N_1 + \log N_2. \tag{3}$$

भागफल का लगरथ भाज्य और भाजक के लगरथों का अंतर है :

$$\log \frac{N_1}{N_2} = \log N_1 - \log N_2. \tag{4}$$

घात का लगरथ घात-सूचक के साथ घाताधार के लगरथ का गुणनफल है :

$$\log N^m = m \log N \tag{5}$$

मूल का लगरथ मूलाधीन संख्या के लगरथ में मूल-सूचक से भाग का फल है :

$$\log \sqrt[m]{N} = \frac{\log N}{m} \tag{6}$$

(यह पिछले गुण से निगमित होता है, क्योंकि $\sqrt[m]{N} = N^{1/m}$ है)।

उपरोक्त चारों सूत्रों में N, N_1 व N_2 धनात्मक हैं।

सावधानी. योगफल का लगरथ लगरथों का योगफल नहीं है; $\log (a+b)$ की जगह $\log a + \log b$ नहीं लिखना चाहिए। इस तरह की गलती अक्सर देखने को मिलती है।

किसी व्यंजन का लगरथन. व्यंजन के लगरथन से तात्पर्य है व्यंजन का लगरथ ज्ञात करना, व्यंजन के लगरथ को व्यंजन में उपस्थित राशियों के लगरथों की सहायता से व्यक्त करना। ['लगरथन' के लिए 'लगरथ लेना' मुहावरा भी प्रयुक्त होता है]।

लगरथन के उदाहरण.

(1) $\log \dfrac{2a^2b}{\sqrt[3]{m^2}} = \log (2a^2bm^{-\frac{2}{3}})$

$= \log 2 + 2 \log a + \log b - \frac{2}{3} \log m;$

(2) $x = \dfrac{14.352 \cdot \sqrt{0.20600}}{185.06 \cdot 43110^2}$;

$\lg x = \lg 14.352 + \frac{1}{2} \lg 0.20600 - \lg 185.06 - 2 \lg 43{,}110$

दशभू लगरथों की सारणी से lg 14.352, lg 0.20600 आदि का मान ज्ञात करके इस समता के दायें पक्ष का कलन संपन्न कर सकते हैं; इससे $\lg x$ का मान मिल जायेगा। इसके बाद पुनः सारणी की सहायता से लगरथ के जरिये x का मान ज्ञात कर ले सकते हैं (विस्तार के लिए देखें §§ 132-135)।

[समता के दोनों पक्षों का किसी एक आधार वाला लगरथ लेने पर समता बनी रहती है, यथा, यदि $x=y$, तो

$$\log_a x = \log_a y,$$

$$\lg x = \lg y,$$

या सार्वरूप में :
$$\log x = \log y.$$

आधार में परिवर्तन संबंधी सूत्र. समात्मिका (2) के दोनों पक्षों का आधार b वाला लगरथ लेने पर

$$\log_b a^{\log_a N} = \log_b N,$$

(5) से :

$$\log_a N . \log_b a = \log_b N,$$

और अंततः

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \qquad (7)$$

यदि $N=b$, तो

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \qquad (7a)$$

यदि $a=b^m$, तो (7) से

$$\log_{b^m} N = \frac{\log_b N}{\log_b b^m} = \frac{\log_b N}{m} \qquad (7b)$$

निस्संदेह यहां m शून्य के बराबर नहीं होना चाहिए।]

§ 129. नैसर्गिक लगरथ संख्या e.

व्यावहारिक कार्यों के लिए लगरथों का सबसे सुविधाजनक आधार संख्या 10 है, पर सैद्धांतिक अन्वीक्षणों के लिए अधिक कारगर एक दूसरा आधार हुआ है—अव्यतिमानी संख्या $e = 2.71828183$ (आठवें दशमलव अंक तक की शुद्धता से)। इस अजीब-सी बात को सिर्फ उच्च गणित की सहायता से समझाया जा सकता है; यहां हम यही दिखा सकते हैं कि संख्या e आयी कहाँ से है। लगरथ कलन करने की § 127 में बतायी गयी विधि के साथ इस संख्या का बहुत गहरा संबंध है। जब हम आधार के रूप में इकाई के निकट

की संख्या $1+\frac{1}{N}$ (उदाहरणतया 1.00001; $n=100,000$) लेते हैं, तब छोटी-छोटी संख्याओं के लिए भी बहुत बड़े-बड़े लगरथ मिलने लगते हैं, जैसे 3 का लगरथ इस स्थिति में 109861 होता है। यह लगरथ उसी कोटि का हो, जिस कोटि की स्वयं संख्या 3 है, इसके लिए इसे $n=100,000$ गुना कम करना होगा। कम करने से इसका मान 1.09861 हो जायेगा। अतः संख्या 3 का लगरथ 1.09861 होगा, यदि आधार के रूप में

$$1+\frac{1}{n}=1.00001 \text{ नहीं,}$$

बल्कि $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1.00001^{100000}$ लिया जायेगा।

सचमुच में :

$$3=(1.00001)^{109,861}=1.00001^{100,000 \cdot 1.09861}$$
$$=\left(1.00001^{100,000}\right)^{1.09861}$$

यदि राशि $1.00001^{100,000}$ का मान आठवें दशमलव अंक की शुद्धता से ज्ञात करेंगे, तो

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.718\ 26763\ (n=100,000).$$

यह संख्या e के बहुत निकट है; दोनों में प्रथम पांच अंक समान हैं। यदि हम आधार के रूप में 1.00001 नहीं, बल्कि 1 के और निकट की संख्या, जैसे 1.000001 लेंगे (अर्थात् $n=1,000,000$ लेंगे), तो पिछले विचार-क्रम का अनुसरण करते हुए हम इस निष्कर्ष पर पहुँचेंगे कि अधिक सुविधाजनक आधार है :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1.000001^{1,000,000}$$

यह संख्या आठवें अंक तक की शुद्धता से 2.718 28047 के बराबर है। इसमें प्रथम छः अंक वही हैं, जो संख्या e में हैं; सातवां अंक इकाई से इतर है। संख्या n जितनी बड़ी लेंगे, संख्या $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ संख्या e से उतना ही कम इतर होगी। अन्य शब्दों में, *संख्या e वह सीमा है, जिसकी ओर राशि*

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *प्रवृत्त होती है (n का असीम वर्धन होने पर)* । संख्या e की परिभाषा यही है ।

इस प्रकार हम देखते हैं कि आधार $1+\frac{1}{n}$, और इसलिए $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ भी, किसी संख्या का लगरथ उतनी ही अधिक शुद्धता से देता है, जितनी बड़ी संख्या n होती है । अतः यह आशा करना बिल्कुल स्वाभाविक होगा कि इस लक्ष्य की पूर्त्ति के लिए उस सीमा को ही आधार के रूप लेना सबसे सुविधा-जनक रहेगा, जिसकी ओर n का असीम वर्धन होने पर राशि $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ प्रवृत्त होती है—अर्थात्, संख्या e को । वास्तविकता भी यही है । e-आधारी लगरथों का कलन किसी भी अन्य आधार वाले लगरथों की तुलना में कहीं ज्यादा शीघ्र संपन्न होता है । इनके कलन की विधियों का वर्णन उच्च गणित में दिया जाता है ।

संख्या e को दशमलव भिन्न में किसी भी कोटि की शुद्धता से व्यक्त किया जा सकता है; सारणियों में e के ऐसे सन्निकृत मान मिल सकते हैं, जिनकी शुद्धता किसी भी संभव व्यावहारिक आवश्यकता से अधिक होगी । पर संख्या e को पूर्ण शुद्धता से दशमलव या किसी भी अन्य व्यतिमानी भिन्न में व्यक्त नहीं किया जा सकता । इतना ही नहीं, e सिर्फ अव्यतिमानी संख्या ही नहीं है, बल्कि पारमित संख्या (दे. § 92) भी है ।

आधार e पर लिये गये लगरथों को *नैसर्गिक लगरथ* कहते हैं । अक्सर इन्हें नैपियरी लगरथ भी कहते हैं, पर ऐतिहासिक दृष्टि से यह गलत है ।*

द्योतन. नैसर्गिक लगरथ को $\log_e x$ से नहीं, बल्कि $\ln x$ से द्योतित करते हैं ।

---

* नैपियर (Napier) ने वास्तविकता में जिस आधार का प्रयोग किया था, वह 1—0.0000001 के बराबर था । यदि नैपियर की सारणी के सभी लगरथों को $10{,}000{,}000=10^7$ गुना कम करना पड़ता (तुलना करें ऊपर के उदाहरण से), तो आधार के रूप में $\left(1-\frac{1}{k}\right)^k$ लेना पड़ता, जहाँ $k=10^7$ है । नैपियर की सारणी का आधार इसी संख्या को कहा जा सकता है, पर इसे e के बराबर किसी भी तरह नहीं मान सकते (यह $\frac{1}{e}$ से बहुत कम का अंतर रखती है ।)

उदाहरण. $\ln 3 = 1.09861$.

संख्या N के ज्ञात दशभू लगरथ के सहारे उसका नैसर्गिक लगरथ ज्ञात करने के लिए संख्या N के **दशभू** लगरथ में e के दशभू लगरथ से **भाग देते हैं** ($\lg e = 0.43429 \ldots$ है):

$$\ln N = \frac{\lg N}{\lg e} \approx \frac{\lg N}{0.43429} \approx 2.30259 \lg N.$$

राशि $\lg e = 0.43429$ को **दशभू लगरथों का मापांक** कहते हैं और इसे वर्ण M से द्योतित करते हैं।

अत:

$$\ln = \frac{1}{M} \lg N.*$$

उदाहरण. दशभू लगरथ की सारणी से $\lg 2 = 0.30103$ है, जिससे

$$\ln 2 = \frac{1}{M} \cdot 0.30103 = 0.69315.$$

संख्या N के ज्ञात नैसर्गिक लगरथ के सहारे संख्या N का दशभू लगरथ ज्ञात करने के लिए नैसर्गिक लगरथ में दशभू लगरथों के मापांक $M = \lg e$ से गुणा करते हैं:

$$\lg N = \lg e \ln N = M \ln N \approx 0.43429 \ln N.$$

उदाहरण. $\ln 3 = 1.09861$.

इससे

$$\lg 3 = M \cdot 1.098\,61 = 0.47712.$$

M तथा $\frac{1}{M}$ के साथ गुणा करने में आसानी हो, इसके लिए इनके साथ सभी एक-अंकी या सभी दो-अंकी संख्याओं के गुणा की सारणी बनायी जाती है। यहां एक-अंकी संख्याओं के साथ M व $\frac{1}{M}$ के गुणा की सारणी प्रस्तुत की जा

---

* दशभू लगरथ से नैसर्गिक लगरथ में संक्रमण (और इसके विपरीत) के लिए यहां दिया गया नियम § 128 के सूत्र (7) की विशेष स्थिति है। § 128 (7) का समतुल्य एक और सूत्र है: $\log_a N = \log_b N \cdot \log_a b$। यह सूत्र (7) और (7a) की सहायता से प्राप्त होता है।

रही है।

	गुना M	गुना $\frac{1}{M}$
1	0.43429	2.30259
2	0.86859	4.60517
3	1.30288	6.90776
4	1.73718	9.21034
5	2.17147	11.51293
6	2.60577	13.81551
7	3.04006	16.11810
8	3.47436	18.42068
9	3.90865	20.72327

§ 130. दशभू लगरथ

आगे दशभू लगरथ को सिर्फ लगरथ कहेंगे।

इकाई का लगरथ शून्य है।

संख्या 10, 100, 1000 आदि के लगरथ क्रमशः 1, 2, 3 आदि हैं, अर्थात् संख्या में एक पर जितने शून्य हैं, उनके लगरथ में उतनी ही धनात्मक इकाइयां हैं।

संख्या 0.1, 0.01, 0.001 आदि के लगरथ क्रमशः -1, -2, -3 आदि हैं, अर्थात् संख्या में 1 के पहले जितने शून्य हैं (पूर्णांक की जगह वाले शून्य को मिलाकर), लगरथ में उतनी ही ऋण इकाइयां हैं।

अन्य संख्याओं के लगरथ दो हिस्सों से बने होते हैं—पूर्णांक तथा अपूर्णांक से। पूर्णांक वाले हिस्से को **लंछक** कहते हैं और अपूर्णांक वाले हिस्से को **पासंग** कहते हैं।

इकाई से अधिक संख्या का लगरथ धनात्मक होता है और इकाई से कम संख्या का लगरथ ऋणात्मक होता है (ऋण संख्याओं का वास्तविक लगरथ नहीं होता)।

उदाहरणार्थ,* $\lg 0.5 = -0.30103$,

$$\lg 0.005 = -2.30103.$$

संख्या से लगरथ और लगरथ से संख्या ढूंढ़ने में सुविधा के लिए ऋण लगरथों को उनके '**स्वाभाविक**' रूप में नहीं, बल्कि '**कृत्रिम**' रूप में लिखते हैं। *कृत्रिम रूप में ऋण लगरथ का पासंग धनात्मक होता है और लंछक ऋणात्मक होता है।*

उदाहरण के लिए, $\lg 0.005 = \bar{3}.69897$। इस आलेख का अर्थ है कि $\lg 0.005 = -3 + 0.69897 = -2.30103$.

ऋण लगरथ को स्वाभाविक से कृत्रिम रूप में लाने के लिए आवश्यक है : (1) उसके लंछक के परम मान में इकाई जोड़ना; (2) प्राप्त संख्या के ऊपर ऋण चिह्न रखना; (3) पासंग के अन्तिम शून्येतर अंक को छोड़कर अन्य सभी अंकों को नौ में से घटाना; अंतिम शून्येतर अंक को दस में से घटाते हैं। प्राप्त अंतरों को पासंग में उन्हीं स्थानों पर लिखते हैं, जहां तदनुरूप अवकारी अंक थे। पासंग के अन्त में स्थित शून्यों को ज्यों का त्यों रहने देते हैं।

उदाहरण 1. $\lg 0.05 = -1.30103$ को कृत्रिम रूप में प्रस्तुत करें :

(1) लंछक के परम मान 1 में 1 जोड़ते हैं; 2 मिलता है; (2) कृत्रिम रूप का लंछक $\bar{2}$ लिखते हैं और इसे दशमलव बिंदु से अलग कर देते हैं; (3) पासंग के प्रथम अंक 3 को 9 में से घटाते हैं; प्राप्त संख्या 6 को दशमलव बिंदु के बाद प्रथम स्थान पर (3 की जगह) लिखते हैं। आगे के स्थानों के लिए अंक भी इसी तरह से प्राप्त करते हैं: $9(=9-0)$, $8(=9-1)$, $9(=9-0)$ और $7(=10-3)$। परिणाम :

$$-1.30103 = \bar{2}.69897.$$

उदाहरण 2. -0.18350 को कृत्रिम रूप में प्रस्तुत करें : (1) 0 में 1 जोड़ते हैं, जिससे मिलता है 1; (2) लंछक की जगह $\bar{1}$ लिखते हैं; (3) अंक 1, 8, 3 को अलग-अलग 9 में से घटाते हैं; अंक 5 को 10 में से घटाते हैं, शून्य को ज्यों का त्यों रहने देते हैं। परिणाम :

$$-0.18350 = \bar{1}.81650.$$

कृत्रिम रूप से ऋण लगरथ प्राप्त करने के लिए आवश्यक हैं : (1) उसके लंछक के परम मान में से 1 घटाना; (2) प्राप्त संख्या के पहले ऋण चिह्न

---

* आगे की सभी समताएं सन्निकृत हैं—अंतिम अंक की आधी इकाई तक की परिशुद्धता से।

लगाना; (3) पासंग के अंकों के साथ वही करते हैं, जो स्वाभाविक रूप से कृत्रिम रूप पाने के लिए करते हैं।

उदाहरण 3. $\bar{4}.68900$ को स्वाभाविक रूप में प्रस्तुत करें : (1) $4 - 1$ 3; (2) लंछक -3 हुआ; (3) पासंग के अंक **6**, 8 को अलग-अलग 9 में से घटाते हैं और **9** को 10 में से; अंतिम दो शून्यों को ज्यों का त्यों रहने देते हैं। अत: परिणाम हुआ

$$\bar{4}.68900 = -3.31100.$$

§ 131. ऋण लगरथों के कृत्रिम रूपों के साथ संक्रियाएं

लगरथों के कृत्रिम रूपों के साथ संक्रिया के लिए उन्हें स्वाभाविक रूप में लाना कोई जरूरी नहीं है। नीचे वर्णित विधियों के उपयोग का थोड़ा-बहुत अभ्यास हो जाने पर सीधे कृत्रिम रूपों के साथ संक्रियाएं उतनी ही शीघ्रता से संपन्न की जा सकती हैं, जितनी उनके स्वाभाविक रूपों के साथ।

जोड़. पासंगों को सामान्य विधि से जोड़ा जाता है। यदि दशांशों को जोड़ने के बाद हाथ में कुछ रह गया हो, तो धनात्मक लंछकों के योगफल में जोड़ देते हैं; ऋणात्मक लंछकों को एक साथ जोड़कर धनात्मक लंछकों के जोड़ में से घटा लेते हैं।

उदाहरण 1. $\bar{1}.17350 + 2.88694 + \bar{3}.99206.$

आलेख*: यहां दशांशों को जोड़ने पर $2+1+8+9=20$ का शून्य योगफल में लिखते हैं और हाथ में बचा 2 लंछकों के साथ जोड़ देते हैं, जिससे $2+\bar{1}+2+\bar{3}=0$ प्राप्त होता है।

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\ 2111} \\ \bar{1}.17350 \\ +2.88694 \\ \bar{3}.99206 \\ \hline 0.05250 \end{array}$$

उदाहरण 2.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\quad 11} \\ 2.7458 \\ +\ \bar{4}.3089 \\ \hline \bar{1}.0547 \end{array}$$

यहां लंछकों का योग है : $1+2+\bar{4}=\bar{1}.$

घटाव. अवकारी का पासंग अवकल्य के पासंग में से श्रेणी दर श्रेणी घटाते हैं (अर्थात् शतांश में से शतांश, दशांश में से दशांश, आदि)। अवकारी पासंग

---

* ऊपर स्थित छोटी छपाई वाले अंक जोड़ने पर हाथ में बचे हुए अंक हैं।

अवकल्य पासंग से छोटा भी हो सकता है और बड़ा भी। यदि बड़ा है, तो अवकल्य के दशांश के लिए लंछक से धनात्मक इकाई उधार लेते हैं।

उदाहरण 1.

$$\begin{array}{r} \bar{2}.1741 \\ -\bar{5}.1846 \\ \hline 2.9895 \end{array}$$

दशांशों को घटाने के लिए लंछक $\bar{2}$ से धनात्मक इकाई उधार लेनी पड़ी है, जिसके कारण उसका मान $\bar{3}$ हो गया है। लंछकों के घटाव से $\bar{3}-\bar{5}=2$ मिलता है।

उदाहरण 2.

$$\begin{array}{r} \bar{1}.2080 \\ -3.1916 \\ \hline \bar{4}.0164 \end{array}$$

यहा लंछक से उधार लेना नहीं पड़ा है : $\bar{1}-3=\bar{4}$.

उदाहरण 3.

$$\begin{array}{r} 0.1265 \\ -1.9371 \\ \hline \bar{2}.1894 \end{array}$$

यहां स्पष्ट है कि धन लगरथ में से धन लगरथ घटाने पर परिणाम प्रत्यक्षतः कृत्रिम रूप में प्राप्त किया जा सकता है। यही करने की सलाह भी दी जाती है।

जब जोड़-घटाव साथ-साथ होते हैं, तब सभी घटावों को जोड़ में परिणत कर लेना बेहतर रहता है। इसमें जब अवकारी कोई धन संख्य होती है तो तदनुरूप ऋणात्मक योज्य पदों को कृत्रिम रूप में परिणत कर लेते हैं। यदि वह कृत्रिम रूप में प्रत्त ऋण संख्या होती है, तो उसे स्वाभाविक रूप में परिणत करके ऋण चिह्न हटा लेते हैं। (प्राप्त योज्य पदों को संलगरथी पद कहते हैं।)

उदाहरण. $0.1535-\bar{1}.1236+\bar{1}.1686-4.3009=0.1535$ + संल $\bar{1}.1236+\bar{1}.1686$ + संल $4.3009=0.1535+0.8764+\bar{1}.1686+\bar{5}.6991=\bar{5}.8976$.

आलेख :

$$\begin{array}{rl} 0.1535 &= 0.1535 \\ -\ \bar{1}.1236 &= 0.8764 \\ +\ \bar{1}.1686 &= \bar{1}.1686 \\ -\ 4.3009 &= \bar{5}.6991 \\ \hline & \bar{5}.8976 \end{array}$$

गुणा. कृत्रिम रूप में प्रत्त लगरथ में धन संख्या से गुणा करने के लिए पहले पासंग में अलग से गुणा करते हैं, फिर लंछक में; यदि गुणक कोई एक-अंकी संख्या है, तो पासंग में गुणा करने से हाथ में बची धन संख्या को तुरन्त ही

लंछक व गुणक के ऋणात्मक योगफल में जोड़ देते हैं। यदि गुणक कोई बहु-अंकी संख्या है, तो पहले पासंग के साथ पूरा-पूरा गुणा कर लेते हैं और इस गुणनफल को गुणक व लंछक के गुणनफल के साथ जोड़ देते हैं।

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 3\ 2\,6\,4 \\ \overline{6}.4397 \\ \times\quad 7 \\ \hline \overline{39}.0779 \end{array}$$

उदाहरण 1. (ऊपर)

उदाहरण 2.

$$\begin{array}{r} 1.4397 \\ \times\quad 17 \\ \hline 4397 \\ 3078 \\ \hline 7.475 \\ -17\quad\ \ \\ \hline \overline{10}.475 \end{array}$$

(यहां मंक्षिप्त गुणन के नियमों का उपयोग किया गया है; दे. § 56.)

यदि कृत्रिम रूप में प्रत्त ऋण लगरथ में किसी ऋण संख्या से गुणा करना हो तो पहले लगरथ को कृत्रिम रूप से स्वाभाविक रूप में परिणत कर लेना अच्छा रहता है।

भाग. यदि भाजक कोई ऋण या बहु-अंकी धन संख्या है, तो भाज्य को पहले स्वाभाविक रूप में परिणत कर लेना चाहिए। यदि भाजक कोई एक-अंकी धन संख्या है, तो भाज्य को कृत्रिम रूप में रहने दिया जा सकता है। यदि लंछक पूर्णतया विभाज्य है, तो लंछक में अलग से भाग देते हैं, फिर पासंग में भाग देते हैं। यदि लंछक पूर्णतया विभाज्य नहीं है, तो लंछक में ऋण इकाइयों की ऐसी अल्पतम संख्या जोड़ देते हैं कि लंछक पूर्णतया विभाज्य हो जाये, पर साथ ही पासंग में उतनी ही धन इकाइयां जोड़ देते हैं।

उदाहरण. $\overline{2}.5636 : 6 = \overline{1}.7606.$

लंछक 6 से विभाज्य हो जाये, इसके लिए उसमें 4 ऋण इकाइयां जोड़ते हैं। प्राप्त संख्या -6 में 6 से भाग देने पर -1 मिलता है। पासंग में 4 धन इकाइयां जोड़कर 4.5636 प्राप्त करते हैं, जिसमें से भाग देते हैं।

§ 132. संख्या के सहारे लगरथ ढूंढ़ना

संख्या 10 के पूर्ण घातों के लगरथ बिना सारणी के ही ज्ञात हो सकते हैं (§ 130)। किसी अन्य संख्या का लगरथ निम्न विधि से ढूंढ़ते हैं :

(A) **लंछक का निर्धारण**. इकाई से बड़ी संख्या का लंछक पूर्णांक में स्थित अंकों की संख्या से *एक कम* होता है।

उदाहरण. lg 35.28 = 1 (लंछक); lg 3.528 = 0 (लंछक); lg = 60 100 = 4 (लंछक)।

इकाई से छोटी संख्या के कृत्रिम रूप वाले लगरथ का लंछक दशमलव बिंदु के तुरंत बाद स्थित शून्यों की संख्या से *एक अधिक* होता है।

उदाहरण. lg 0.00635 = $\bar{3}$ (लंछक); lg 0.1002 = $\bar{1}$ (लंछक); lg 0.06004 = $\bar{2}$ (लंछक)।

(B) **पासंग का निर्धारण**. उचित या अनुचित दशमलव भिन्न का दशमलव बिंदु हटा देते हैं और इससे प्राप्त पूर्ण संख्या का पासंग ढूढ़ते हैं।

पूर्ण संख्या का पासंग उसके अंत में स्थित शून्यों पर निर्भर नहीं करता, अतः यदि पूर्ण संख्या के अंत में शून्य हैं, तो उन्हें हटा कर बची संख्या का पासंग ढूँढ़ते हैं।

उदाहरण. संख्या 20.73 का पासंग संख्या 2073 के पासंग के बराबर है। संख्या 6 004 800 का पासंग संख्या 60 048 के पासंग के बराबर है।

लगरथों की चार-अंकी सारणी का उपयोग करते समय प्राप्त पूर्ण संख्या [जिसका लगरथ ढूंढ़ना है] में से सिर्फ प्रथम चार अंक रखते हैं; पाँच-अंकी सारणी का उपयोग करते समय प्राप्त पूर्ण संख्या में से सिर्फ प्रथम पाँच अंक रखते हैं। बाकी को छोड़ देते हैं, क्योंकि वे सारणी में प्राप्त पासंग की श्रेणियों (दशांश, शतांश आदि) पर बिल्कुल (या लगभग) कोई प्रभाव नहीं डालते।

चार-अंकी सारणी से तीन-अंकी संख्या का पासंग सीधे ढूंढ़ा जा सकता है; पाँच-अंकी सारणी से—चार-अंकी संख्या का। चार-अंकी (पाँच-अंकी) संख्या का पासंग तथाकथित औसत अंतर या समानुपातिक अंश जोड़ने से प्राप्त होता है (देखें नीचे के उदाहरण)।

चार-अंकी सारणी देखें पृ. 22 से 26 तक।

उदाहरण 1. संख्या 45.8 का लगरथ ज्ञात करें। लंछक 1 बिना सारणी के ज्ञात कर लेते हैं। (1) दशमलव बिंदु हटाकर पूर्ण संख्या N = 45 8 प्राप्त करते हैं। (2) इसके प्रथम दो अंकों से बनी संख्या 45 लेते हैं। (3) दशभू लगरथी सारणी की 45-वीं पंक्ति और 8-वें स्तम्भ के कटान-स्थल पर संख्या 6609 है। इष्ट पासंग यही है। अतः lg 45.8 = 1.6609.

उदाहरण 2. lg 0.02647 ज्ञात करें। लंछक बिना सारणी के ज्ञात करते हैं : $\bar{2}$। दशमलव बिंदु हटाकर संख्या 2647 प्राप्त करते हैं। प्रथम दो अंकों 2 और 6—से बनी संख्या 26 लेते हैं। सारणी में 26-वीं पंक्ति और 4-थे स्तंभ

के कटान पर स्थित संख्या ढूढ़ते हैं (4-था स्तंभ, क्योंकि हमारी संख्या में तीसरा अंक 4 है)। इस प्रकार 4216 प्राप्त करते हैं, जो lg 264 का पासंग है। प्रत्त संख्या के अंतिम अंक 7 के अनुरूप संशोधन ज्ञात करते हैं, जो उसी पंक्ति में 'संशोधन' शीर्षक के अंतर्गत 7-वें स्तंभ में दिया गया है। आवश्यक संशोधन 11 है; इसे पहले से प्राप्त पासंग में जोड़ने पर 4216+11=4227 मिलता है। यह प्रत्त संख्या का पासंग है। अतः lg 0.02647 = $\bar{2}$.4227 है।

आलेख.

$$\begin{array}{ll} \lg 0.0264 & =\bar{2}.4216 \\ \quad\quad\;\; 7 & \;\; +11 \\ \hline \lg 0.02647 & \;\; \bar{2}.4227 \end{array}$$

टिप्पणी. ये संशोधन अंतर्वेशन-विधि से ज्ञात किए गए हैं (दे. § 65); अतर्वेशन के प्रयोग से कलन का काम सरल हो जाता है। सारणी से स्पष्ट है कि संख्या 2640 का पासंग संख्या 2650 के पासंग से 4232−4216=16 का अंतर रखता है। संख्याओं का अंतर 10 पासंगों के अंतर 16 के अनुरूप है। समानुपातन के नियम से

$$x : 16 = 7 : 10;$$
$$x = 16 \cdot 0.7 = 11.$$

यदि आपके पास लगरथो की **पाँच-अंकी सारणी** है, तो निम्न उदाहरणों पर विचार कर सकते हैं।

उदाहरण 1. lg 0.02647 ज्ञात करें। लंछक बिना सारणी के ज्ञात होता है : 2। दशमलव बिंदु हटाने पर संख्या 2647 मिलती है। 264-वीं पंक्ति में 7-वें स्तंभ की संख्या ढूंढ़ते हैं; यह 275 के बराबर है। ये पासंग के अंतिम अंक है। आरंभिक दो अंक (42) पंक्ति के आरंभ में मिल जायेंगे। पूरा पासंग 42275 है, अतः lg 0.02647=$\bar{2}$.42275.

अधिकतर पंक्तियों में प्रथम दो अंक इंगित नहीं होते। इस स्थिति में नीचे की अगली पंक्ति के प्रथम दो अंक लिए जाते हैं (यदि अंतिम पासंग के अंतिम तीन अंकों के पहले तारक-चिह्न दिया गया है); यदि तारक-चिह्न नहीं है, तो निकटतम ऊपरी पंक्ति से प्रथम दो अंक लेते हैं।

उदाहरण 2. lg 6764 ज्ञात करें। लंछक 3 के बराबर है। 676-वीं पंक्ति में चौथे स्तंभ पर पासंग के अंतिम अंक 020 हैं। उनके पहले तारक-चिह्न लगा हुआ है, अतः प्रथम दो अंक (83) नीचे की 677-वीं पंक्ति से लेते हैं। पूरा पासंग 83020 हुआ, अतः lg 6764=3.83020 है।

उदाहरण 3. lg 6.6094 ज्ञात करें। lg 6.6094 का लंछक 0 है। दशमलव बिंदु हटाने पर संख्या 66094 मिलती है। 660-वीं पंक्ति में (जो

प्रथम तीन अंकों के अनुरूप हैं) स्तंभ 9 (चौथे अंक) की संख्या 014 है (इसके पहले तारक-चिह्न भी है)। ये संख्या 6609 के पासंग के अंतिम तीन अंक हुए। प्रथम दो अंक (82) अगली पंक्ति में हैं। lg 6609 का पासंग 82014 हुआ। अब प्रत्त संख्या के अंक 4 के अनुरूप संशोधन ज्ञात करते हैं। स्तंभ **PP** में शीर्षक '6' वाली एक छोटी-सी सारणी है (d=6 संख्या 6609 तथा 6610 के पासंगों का अंतर है)। इस सारणी के बायें भाग में संख्या 4 ढूंढ़ते हैं। इसके सामने 2.4 लिखा हुआ है। दशांश को छोड़कर इसे 2 तक सन्निकृत करते हैं। यह इष्ट संशोधन हुआ। पहले से प्राप्त पासंग में इसे जोड़ने पर 82014+2 =82016 मिलता है, अत: lg 6.6094=0.82016 हुआ।

आलेख :

$$\begin{array}{rr} \lg 6.609 & =0.82014 \\ 4 & +2 \\ \hline \lg 4.6094 & =0.82016 \end{array}$$

§ 133. लगरथ के सहारे संख्या ढूँढ़ना*

लंछक पर कोई ध्यान दिये बिना सारणी में पहले प्रत्त पासंग या उसके निकट का कोई पासंग ढूंढ़ते हैं। इसके सहारे कोई पूर्ण संख्या प्राप्त होती है (प्रथम स्थिति में सीधे, दूसरी में—संशोधन के साथ; देखें उदाहरण)। इसके बाद लंछक पर ध्यान देते हैं। यदि वह शून्य या कोई धन संख्या है, तो उसमें उपस्थित इकाइयों से एक अधिक की संख्या में अंक (प्राप्त पूर्ण संख्या में से) पूर्णांक के रूप में अलग कर लेते हैं। यदि लंछक ऋणात्मक है, तो प्राप्त संख्या के आरंभ में उतने शून्य बैठा देते हैं, जितनी इकाइयां लंछक में होती हैं। बायें से प्रथम शून्य को दशमलव बिंदु द्वारा अलग कर लेते हैं। इस विधि से प्राप्त संख्या प्रत्त लगरथ के अनुरूप होगी।

चार अंकी सारणी (दे. पृ. 22 से 26)

उदाहरण 1. ऐसी संख्या ढूंढ़ें, जिसका लगरथ 3.4683 के बराबर है

---

* चार-अंकी लगरथ के सहारे संख्या ढूंढ़ने में प्रतिलगरथों की सारणी का उपयोग सार्थक हो सकता है (दे. § 134)। पांच अंकों वाली संख्याओं के साथ कलन के लिए प्रति-लगरथों की सारणी को शामिल करके लगरथों की सारणी का आकार दुगुना करने से कोई लाभ नहीं है।

(अर्थात् $10^{3.4683}$ का मान ज्ञात करें)। सारणी में पासंग 4683 या इसके निकट का कोई पासंग ढूँढ़ते हैं। सारणी में स्तंभों (जैसे 0-स्तंभ) पर नजर दौड़ाते हुए संख्या 46 या इसके निकट की कोई संख्या ढूंढ़ते हैं। ऐसी संख्या (4624) 29-वीं पंक्ति में मिलती है। इस स्थान के निकट पासंग 4683 ढूढ़ते हैं; वह इसी 29-वीं पंक्ति में स्तंभ-4 पर है। अत: पासंग 4683 वाली संख्या 294 है। चूंकि लंछक 3 धनात्मक है, इसलिए प्राप्त संख्या में से $3+1=4$ अंक पूर्णांक के रूप में अलग करते हैं; इसके लिए संख्या 294 के अंत में एक शून्य बैठाते हैं। इस प्रकार $3.4683 = \lg 2940$ मिलता है।

उदाहरण 2. ऐसी संख्या ज्ञात करें, जिसका लगरथ $\bar{3}.3916$ के बराबर है। पिछले उदाहरण का अनुसरण करने पर सारणी में पासंगों के बीच संख्या 3916 नहीं मिलेगी, अत: हम 24-वीं पंक्ति और 6-ठे स्तंभ के कटान पर स्थित इसकी निकटतम संख्या 3909 लेते हैं, जो संख्या 246 के अनुरूप है। इस तरह हम इष्ट संख्या के प्रथम तीन सार्थक अंक प्राप्त कर लेते हैं। चौथा अंक संशोधन कलन करके ज्ञात करते हैं। प्रत्त पासंग 3916 सारणी के पासंग 3909 से 7 इकाई अधिक है। सारणी के संशोधन वाले अनुभाग में अंक 7 ढूंढ़ते हैं; वह स्तंभ-4 में है। अंक 4 ही इष्ट संख्या का चौथा सार्थक अंक है। अत: ऐसी संख्या, जिसका पासंग 3916 है, 2464 के बराबर है। अब लंछक पर ध्यान देते हैं। चूंकि लंछक ऋणात्मक है और उसमें कुल 3 इकाइयां हैं, इसलिए प्राप्त संख्या की बायीं ओर तीन शून्य बैठाते हैं; बायीं ओर से प्रथम शून्य को पूर्णांक की श्रेणी में रखते हैं, जिससे $\lg 0.002464 = \bar{3}.3916$ मिलता है।

आलेख :

$$\lg x = \bar{3}.3916$$

$$\begin{array}{rr} 3909 & \lg 246 \\ +7 & 4 \\ \hline 3916 & \lg 2464, \end{array}$$

अत: $x = 0.002464$

सावधानी. यह याद रखना चाहिए कि लगरथ के सहारे संख्या ढूंढ़ने में इस संख्या के लिए प्राप्त संशोधन को *उसके अंत में लिखते हैं, उसके अंतिम अंक के साथ जोड़ते नहीं हैं।* [उदाहरण में 4 को 246 के साथ जोड़ा नहीं गया है, 246 पर "बैठाया" गया है।]

सावधानी. यह भी नहीं भूलना होगा कि संशोधन का मान उसी पंक्ति में

ढूढ़ना चाहिए जिसमें से पासंग लिया गया है। यदि इस पंक्ति में आवश्यक संशोधन नहीं है, तो निकटतम संशोधन प्रयुक्त करना चाहिए।

पांच-अंकी सारणी से संबंधित उदाहरण :

उदाहरण 1. ऐसी संख्या ज्ञात करें, जिसका लगरथ $\bar{2}.43377$ है। सारणी पलटते हुए पासंगों के प्रथम दो अंकों को देखते जाते हैं (जो निरन्तर वर्धमान संख्याएं बनाते जाते हैं)। 43 ढूढ़ लेने के बाद उसके निकट अंतिम तीन अंक 377 ढूढ़ते हैं। ये अंक पंक्ति-271 और स्तंभ-5 के कटान पर मिलते हैं। 43377 के बराबर पासंग रखने वाली संख्या 2715 है। लंछक ($\bar{2}$) पर ध्यान देने से $\bar{2}.43377 = \lg 0.02715$ मिलता है।

टिप्पणी. अधिकांश स्थितियों में पासंग के अंतिम तीन अंक या तो उसी पंक्ति में मिल जाते हैं, जिसमें प्रथम दो अंक होते हैं, या उसके नीचे स्थित किसी पंक्ति में होते हैं; ऐसा भी संभव है कि जब अंतिम तीन अंक किसी निचली पंक्ति में होते हैं, तब उनके साथ तारक-चिह्न भी लगा होता है।

उदाहरण 2. ऐसी संख्या ज्ञात करें, जिसका लगरथ 0.14185 के बराबर है। पिछले उदाहरण की तरह हमें पासंगों के बीच 14185 नहीं मिलेगा, अत: निकटतम संख्या 14176 लेते हैं। पासंग के अंतिम तीन अंक (176) प्रथम दो अंकों वाली पंक्ति से ऊपर हैं, अत: वे तारक-चिह्नित हैं। पंक्ति-138 और स्तंभ-6 के कटान पर स्थित पासंग 14176 संख्या 1386 के अनुरूप है, इससे इष्ट संख्या के प्रथम चार अंक मिलते हैं। पांचवां अंक संशोधन की सहायता से ज्ञात करते हैं। प्रत्त पासंग सारणी के पासंग से $185 - 176$ 9 इकाई अधिक है। सारणी के दो निकटतम पासंगों का अंतर $208 - 176 = 32$ है।

PP-स्तंभ में शीर्षक '32' के अंतर्गत एक छोटी-सी सारणी है। इसमें दायें से 9 की निकटतम संख्या ढूढ़ते हैं; 9.6 मिलता है। इसके सामने 3 लिखा हुआ है। यही अंक इष्ट संख्या का पाँचवां सार्थक अंक है; पासंग 14185 वाली संख्या 13863 है। अब लंछक का हिसाब लगाते हैं: $0.14185 = \lg 1.3863$.

आलेख :

$$\lg x = 0.14185$$

14 176	1386
+9	3
14 185	13863

$$x = 1.3863$$

सावधानी. *याद रखें कि लगरथ के सहारे संख्या ढूंढ़ने में संशोधन को उसके आखिरी अंक के साथ जोड़ा नहीं जाता, बल्कि उसके अंत में लिखा जाता है।*

§ 134. प्रतिलगरथों की सारणी.

तथाकथित प्रतिलगरथ-सारणी (दे. पृ. 27-31) लगरथों की ही सारणी है, लेकिन इसमें सामग्री इस प्रकार से व्यवस्थित रहती है कि प्रत्त लगरथ की तदनुरूप संख्या आसानी से ढूँढ़ी जा सके। सारणी में (मोटी छपाई में) सिर्फ पासंग दिये गये हैं, जिन्हें *pa* से द्योतित किया गया है। तीन दशमलव अंकों वाले पासंग से तदनुरूप पूर्ण संख्या तुरंत ही मिल जाती है; यदि पासंग में चार दशमलव अंक हैं, तो तदनुरूप संख्या निर्धारित करने के लिए संशोधन की सहायता लेनी पड़ती है (दे. उदाहरण)। इसके बाद लंछक का हिसाब करते हैं। यदि वह शून्य के बराबर है या धनात्मक है, तो उसमें निहित इकाइयों से एक अधिक की संख्या में अंकों को पूर्णांक के रूप में लिया जाता है (इसके लिए प्राप्त संख्या के अंत में आवश्यक संख्या में शून्य भी बैठाने पड़ सकते हैं)। यदि लंछक ऋणात्मक होता है, तो प्राप्त संख्या के शुरू में उतने शून्य बैठाये जाते हैं, जितनी इकाइयां लंछक में होती हैं, इनमें से प्रथम को दशमलव बिंदु से (पूर्णांक के रूप में) अलग कर लिया जाता है। इस विधि से ज्ञात संख्या प्रत्त लगरथ के अनुरूप होती है।

उदाहरण 1. ऐसी संख्या ज्ञात करें, जिसका लगरथ 2.732 के बराबर है (अर्थात् संख्या $10^{2.732}$ का मान ज्ञात करें)। लंछक को छोड़कर पासंग के प्रथम दो अंक (73) लेते हैं। 73-वीं पंक्ति में स्तंभ 2 पर स्थित संख्या 5395 प्राप्त करते हैं। चूंकि लंछक 2 धनात्मक है, इसलिए $2+1=3$ अंकों को पूर्णांक के रूप में अलग करते हैं। फल : $10^{2.732}=539.5$।

उदाहरण 2. प्रत्त है $\lg x=\bar{3}.2758$; x ज्ञात करें। 27-वीं पंक्ति में 5-वें स्तंभ पर स्थित संख्या ढूँढ़ते हैं। यह 1884 है। सारणी के संशोधन वाले अनुभाग में अंक 8 का संशोधन ढूंढ़ते हैं। यह 3 के बराबर है। इससे $1884+3=1887$ प्राप्त होता है। अब लंछक का हिसाब करते हैं। चूंकि वह ऋणात्मक है और उसमें तीन इकाइयां हैं, इसलिए 1887 के शुरू में तीन शून्य बैठाते हैं और प्रथम को पूर्णांक की श्रेणी प्रदान करते हैं। फलस्वरूप :

$$x=0.001887,\ \text{अर्थात्}\ \lg 0.001887=\bar{3}.2758.$$

आलेख.

lg $x=3.2758$

275 1884

8+ 3

2758 1887

x 0.001887.

उदाहरण 3.

lg $x=0.0817$; x ज्ञात करें।

081 1205

7 + 2

0817 1207

$x=1.207$.

सावधानी. प्रतिलगरथी सारणी से लगरथ के सहारे संख्या ढूंढ़ने में संशोधन *अंतिम अंक के साथ जोड़ा जाता है, उसके बाद बैठाया नहीं जाता।*

§ 135. लगरथी कलनों का उदाहरण

उदाहरण 1. कलन करें :

$$u=\frac{ab}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

जहां $a=4.352$, $b=1.800$.

हल :

(1) लगरथन करने पर

$$\lg u=\lg\frac{ab}{\sqrt{a^2-b^2}}=\lg\frac{ab}{\sqrt{(a+b)(a-b)}}$$

$$=\lg a+\lg b-\tfrac{1}{2}[\lg(a+b)+\lg(a-b)].$$

(2) अब $a+b$ तथा $a-b$ ज्ञात कर लेते हैं :

$$\begin{array}{r} a=4.352 \\ +\ b=1.800 \\ \hline a+b=6.152 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a=4.352 \\ -\ b=1.800 \\ \hline a-b=2.552 \end{array}$$

(3) पहले $\lg a+\lg b$ ज्ञात करते हैं, फिर $\frac{1}{2}[\lg(a+b)+\lg(a-b)]$:

$$\begin{array}{rl} \lg a = \lg\ 4.352 = 0.6387 \\ \lg b = \lg\ 1.800 = 0.2553 \\ \hline \lg a + \lg b \quad = 0.8940 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \lg\ (a+b) = \lg 6.152 = 0.7890 \\ \lg\ (a-b) = \lg\ 2.552 - 0.4068 \\ \hline \lg(a+b) + \lg(a-b) \quad = 1.1958 \end{array}$$

$$\tfrac{1}{2}\ [\lg\ (a+b) + \lg\ (a-b) = 0.5979$$

(4) अंत में $\lg\ u$ ज्ञात करते हैं, फिर प्रतिलगरथों की सारणी से u ज्ञात करते है :

$$\begin{array}{r} -\ 0.8940 \\ 0.5979 \\ \hline \lg\ u = 0.2961; \end{array} \qquad u = 1.977.$$

उदाहरण 2. कलन करें :

$$P = pe^{-\frac{k}{p}h},$$

जहां $p = 10.33$, $k = 0.00129$, $h = 1000$; e नैसर्गिक लगरथों का —आधार है ($e \approx 2.7183$) ।

हल : निम्न चरणों में सम्पन्न होता है :

(1) $\lg\ P = \lg\ p - \frac{k}{p} h \lg\ e = \lg\ p - \frac{k}{p}\ hM,$

जहां $M = \lg\ e \approx 0.4343$ दशभू लगरथों का मापांक है (दे. § 129) ।

(2) $\lg p$ ज्ञात करते हैं :

$$\lg\ p = \lg\ 10.33 = 1.0141.$$

(3) व्यंजन $\frac{k}{p} h\ M$ का लगरथन करते हैं :

$$\lg\ \frac{k}{p} hM \quad \lg\ k + \lg\ h + \lg\ M - \lg\ p$$

(4) प्राप्त लगरथी व्यंजन को कलित करते हैं :

$$\begin{aligned} \lg k &= \lg 0.00129 = \bar{3}.1106 \\ \lg h &= \lg 1000 = 3.0000 \\ \lg M &= \lg 0.4343 = \bar{1}.6378 \\ \text{संलगरथी } \lg p &= \text{संलगरथी } \lg 10.33 = \bar{2}.9859 \\ \hline \lg \frac{k}{p} hM &= \bar{2}.7343, \end{aligned}$$

जिससे $\frac{k}{p} hM = 0.05424.$

(5) अब $\lg P$ का कलन करते हैं (दे. विवरण (1)), फिर P ज्ञात करते हैं :

$$\begin{aligned} &\lg p = 1.0141 \\ -\;&\frac{k}{p} hM = 0.0542 \\ \hline &\lg P = 0.9599, \end{aligned}$$ जिससे $P = 9.118.$

§ 136. मेलिकी

[किसी संख्या में उपस्थित वस्तुओं से उनका कोई मेल दो प्रकार के चयन से बन सकता है। नियत संख्या में ली गयी वस्तुएं विविध क्रम मे रखी जा सकती हैं; इनमें से किसी क्रम के चयन मे वस्तुओं का जो मेल प्राप्त होता है, उसे क्रम-चय कहते हैं। क्रम की उपेक्षा करते हुए वस्तुओं का कोई समाहार चुन लेने मे वस्तुओं का जो मेल प्राप्त होता है, उसे संचय कहते हैं। मेलिकी में वस्तुओं के मेल के इन प्रकारों का अध्ययन होता है।]

असमान वस्तुओं (तत्त्वों) की किसी संख्या से बना हुआ उनका मेल तीन प्रकार का होता है :

1. **पूर्ण क्रमचय**. n असमान तत्त्व $a_1, a_2, \ldots, a_n$ लेते हैं। तत्त्वों की संख्या में कोई परिवर्तन लाये बगैर उनके सापेक्षिक स्थानों में हर संभव हेरफेर करने से तत्त्वों के विविध क्रम वाले जो अलग-अलग मेल प्राप्त होते हैं, उनमें से प्रत्येक को एक पूर्ण क्रमचय कहते हैं (तत्त्वों का आरंभिक क्रम भी एक पूर्ण क्रमचय देता है)। n तत्त्वों के सभी भिन्न पूर्ण क्रमचयों की कुल संख्या को P_n से द्योतित करते हैं। यह 1 से (कोई फर्क नहीं पड़ता, यदि कहें : 2 से) n तक की सभी पूर्ण संख्याओं का गुणनफल है :

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, n = n\,! \qquad (1)$$

प्रतीक n ! (पढ़ें : एन गुणाल) गुणनफल $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, n$ को द्योतित करता है ।

उदाहरण 1. तीन तत्त्व a, b, c के पूर्ण क्रमचयों की संख्या ज्ञात करें । यहाँ $n=3$, $p=3$, अत: $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ होगा । पूर्ण क्रमचय सचमुच में 6 है :

(1) *abc*, (2) *acb*, (3) *bac*, (4) *bca*. (5) *cab*, (6) *cba*.

उदाहरण 2. स्पोर्ट क्लब की प्रबंध समिति के पाँच निर्वाचित सदस्यों के बीच पाँच विभिन्न पद कितने प्रकार से बाँटे जा सकते हैं ? यदि पदों को किसी क्रम-विशेष में रखकर उनकी एक सूची बनायी जाये और हर पद के सामने एक-एक उम्मीदवार के नाम लिखे जायें, तो हमें एक पद-वितरण मिलेगा । पदों की सूची स्थिर रखते हुए हर पद के सामने भिन्न-भिन्न उम्मीदवारों के नाम लिखते हुए हम अन्य वितरण प्राप्त करेंगे । इस प्रकार, हर वितरण पाँच नामों के एक पूर्ण क्रमचय के अनुरूप होता है । इन पूर्ण क्रमचयों की कुल संख्या है :

$$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

टिप्पणी. $n=1$ होने पर व्यंजन $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n$ में सिर्फ एक संख्या 1 रह जाती है । इसीलिए *परिभाषा के रूप में* $1\,! = 1$ *माना गया है ।* $n=0$ होने पर व्यंजन $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ का कोई अर्थ ही नहीं रह जाता, फिर भी $0! = 1$ (परिभाषा के रूप में) माना जाता है । इस मान्यता का आधार नीचे के विवरण 2 में दिया गया है ।

[क्रमचयों की संख्या सूत्र (1) से ही क्यों व्यक्त होती है ? उदाहरण 2 पर ध्यान दें । 5 पद हैं । पदों को 1, 2, 3, 4, 5 के क्रम में रखते हैं । पद-1 के सामने 5 में से कोई भी एक नाम लिख सकते हैं । मान लें कि पद-1 के सामने नाम-1 लिखा जाता है; तब पद-2 के सामने नाम-2, 3, 4, 5 में से कोई एक लिख सकते हैं । पद-1 के सामने नाम-2 लिखने पर पद-2 के सामने नाम-1, 3, 4, 5 में से कोई एक आता । इस तरह से पद-1 का किसी 1 तरह से वितरण करने पर पद-2 का 4 तरह से वितरण संभव है । लेकिन पद-1 का 5 तरह से वितरण संभव है, अत: प्रथम दो पदों—पद-1 तथा पद-2 का $5 \times 4 = 20$ तरह से वितरण संभव है । इनमें से कोई भी वितरण सम्पन्न कर लेने पर पद-3 का 3 तरह से वितरण संभव होता है, अत: प्रथम तीन पदों का वितरण $20 \times 3 (= 5 \times 4 \times 3) = 60$ तरह से संभव है । इनमें से किसी भी वितरण के संपन्न होने पर पद-4 के 2 तरह से वितरण की संभावना रह जाती है, अत: प्रथम 4 पदों का वितरण $5 \times 4 \times 3 \times 2$ तरह से संभव

है। इनमें से कोई भी वितरण संपन्न कर लेने पर पद-5 सिर्फ 1 तरह से वितरित हो सकेगा, अतः पाँचों पदों का वितरण (पाँच उम्मीदवारों के बीच) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ तरह से संभव है।

यदि पदों की संख्या n होती और उम्मीदवारों की संख्या भी n होती, तो वितरणों की कुल संख्या P_n (और इसीलिए पूर्ण क्रमचयों की कुल संख्या भी) $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots 1$ होती। क्रमचयों की संख्या की समस्या वितरणों की संख्या की समस्या से जुड़ी है।]

2. क्रमचय. n असमान तत्त्वों में से एक साथ लिए गए किन्हीं k तत्त्वों के विविध क्रम वाले जो अलग-अलग मेल प्राप्त होते हैं, उनमें से प्रत्येक को **n में से k तत्त्वों का क्रमचय (या n तत्त्वों का k में वितरण)** कहते हैं। ऐसे क्रमचयों (या वितरणों) की कुल संख्या है :

$$P_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]. \qquad (2)$$

[क्योंकि एक साथ k तत्त्व लेने का अर्थ है k रिक्त स्थानों (या उदाहरण 2 के अनुसार : पदों) को k तत्त्वों (या उम्मीदवारों) से भरना; ये k तत्त्व प्रदत्त n तत्त्वों में से लिये जा सकते हैं। प्रथम स्थान n तत्त्वों में से किसी भी तत्त्व से भरा जा सकता है, लेकिन उसके किसी तत्त्व से भर जाने पर दूसरा स्थान $(n-1)$ तत्त्वों में से किसी तत्त्व से भरा जा सकेगा। अतः प्रथम दो स्थान $n(n-1)$ तरह से भरे जा सकते हैं। प्रथम तीन स्थान $n(n-1)(n-2)$ तरह से भर सकते हैं...इसी तरह से प्रथम k स्थान $n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]$ तरह से भर सकते हैं (इस व्यंजन में गुणकों की संख्या स्थानों की संख्या k के बराबर है)। इस तरह से सूत्र (2) प्राप्त होता है, जिसे एक अन्य रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है :

$$P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{P_n}{P_{n-k}} \qquad (2a)$$

प्रश्न को कुछ दूसरी तरह से भी देख सकते हैं। n तत्त्वों में से k तत्त्व (उनके क्रम की उपेक्षा करते हुए) चुन लेते हैं; यह एक संचय हुआ (दे. नीचे)। मान लें कि ऐसे सभी संचयों की कुल संख्या C_n^k के बराबर है। 1 संचय में k तत्त्व होने के कारण उससे $k!$ पूर्ण क्रमचय मिलते हैं (सूत्र (1)), अतः n में से k तत्त्वों के क्रमचयों की कुल संख्या होगी :

$$P_n^k = k!\, C_n^k \qquad (2b)$$

इसी से $C_n^k = \frac{P_n^k}{k!}$ प्राप्त होता है; दे. नीचे।]

उदाहरण 1. चार तत्त्व a, b, c, d के दो में वितरणों की संख्या ज्ञात करें। यहाँ $n=4, k=2$, अत:

$$P_4^2 = 4 \cdot 3 = 12.$$

ये वितरण हैं :

$$ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc.$$

उदाहरण 2. समिति में 8 सदस्य मनोनीत हुए हैं। अध्यक्ष, उपाध्यक्ष और खजांची का पद वे आपस में कितनी तरह से बांट सकते हैं? इष्ट संख्या 8 तत्त्वों का 3 में वितरणों की संख्या है : $P_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

टिप्पणी. पूर्ण क्रमचय को क्रमचयों की एक विशेष स्थिति माना जा सकता है, जब $k=n$ होता है; अत: पूर्ण क्रमचय का अर्थ हुआ n वस्तुओं में से n के समाहारों में ली गई n वस्तुओं का क्रमचय। [पूर्ण क्रमचय और क्रमचय में अंतर औपचारिक है, पर अनेक स्थितियों में उपयोगी हो सकता है। रूसी और जर्मन परंपराओं के अनुसार इनके बिल्कुल अलग-अलग नाम हैं; प्रतीक भी अलग-अलग हैं।]

3. संचय. n असमान तत्त्वों में से k तत्त्वों को (*उनके क्रम पर ध्यान दिए बिना*) एक साथ लेने से k तत्त्वों का जो मेल प्राप्त होता है, उसे n में से k तत्त्वों का संचय कहते हैं।

सभी भिन्न संचयों की कुल संख्या को C_n^k से द्योतित करते हैं; यह एक पूर्ण संख्या है, जो निम्न सूत्र से प्रकट है (तुलना करें सूत्र (1) से)* :

$$C_n^k = \frac{P_n}{P_k \cdot P_{n-k}} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \ldots(3)$$

परिभाषा के अनुसार $C^0{}_n = 1$ माना जाता है; यह सूत्र (3) का विरोध नहीं करता।

व्यंजन $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ को अक्सर $\binom{n}{k}$ से भी द्योतित करते हैं।

स्पष्ट है कि $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, अर्थात् $C_n^k = C_n^{n-k}$.

---

* n तत्त्वों में से n तत्त्वों का सिर्फ 1 संचय संभव है, अत: $C_n^n = 1$; पर यह तभी संभव है, जब सूत्र (3) में $k=n$ रखने पर $(n-n)! = 0! = 1$ मान लिया जाये।

संचयों की संख्या ज्ञात करने के लिए निम्न व्यंजन अक्सर अधिक सुविधा-जनक होते हैं :

$$C_n^k = \frac{P_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot k},$$

$$C_n^k = \frac{P_n^{n-k}}{P_{n-k}} = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(k+1)}{1\cdot2\cdot\ldots\cdot(n-k)}$$

उदाहरण 1. पाँच तत्त्व a, b, c, d, e में से तीन-तीन तत्त्वों के कितने संचय बन सकते हैं ?

उत्तर : $C_5^3 = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = 10$; ये संचय निम्न हैं :

abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde.

उदाहरण 2. आठ विचाराधीन उम्मीदवारों में से तीन को लेखापाल बनाना है। कितनी तरह से यह संभव है ? चूँकि हर लेखापाल का काम बिल्कुल एक जैसा है, इसलिए पिछले विवरण के उदाहरण 2 की तरह यहां क्रमचय नहीं, बल्कि संचय मिलेंगे। इष्ट संख्या है :

$$C_8^3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 56.$$

उपरोक्त मेलों के अतिरिक्त गणित में अनेक अन्य मेलों पर भी विचार किया जाता है। एक महत्त्वपूर्ण मेल है **पुनरावृत्त तत्त्वों वाला क्रमचय**। इसकी परिभाषा निम्न प्रकार से की जाती है। मान लें कि n तत्त्व प्रदत्त हैं, जिनमें प्रथम प्रकार के n_1 समान तत्त्व हैं, द्वितीय प्रकार के n_2 समान तत्त्व हैं,.. k-वे प्रकार के n_k समान तत्त्व हैं। हर संभव तरीके से इनका क्रम-परिवर्तन करते हैं। प्रत्येक क्रम से जो मेल प्राप्त होता है, उसे *पुनरावृत्त तत्त्वों वाला क्रमचय* कहते हैं। पुनरावृत्त तत्त्वों वाले भिन्न क्रमचयों की कुल संख्या होगी :

$$\frac{P_n}{P_{n_1} P_{n_2} \ldots P_{n_3}} \quad \text{या} \quad \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots\ldots n_k!}$$

($n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$; k— तत्त्वों के प्रकारों की संख्या है)।

उदाहरण 1. वर्ण a, a, a, b, b, c, c से पुनरावृत्त तत्त्वों वाले भिन्न क्रमचयों की संख्या ज्ञात करें। प्रथम वर्ण को दूसरे के स्थान पर, दूसरे को तीसरे और तीसरे को प्रथम वर्ण के स्थान पर रखने से कोई नया मेल नहीं प्राप्त होता।

ठीक इसी तरह से चौथे और पाँचवें वर्णों के स्थानों की अदला-बदली करने से भी कोई नया मेल नही मिलता। अनेक अन्य परिवर्तन भी हैं, जिनसे कोई नया मेल नहीं मिलता। लेकिन *abaabcc*, *caaabcb* आदि अनेक नए मेल हैं। इस उदाहरण में $n_1=3$, $n_2=2$, $n_3=2$; $n=n_1+n_2+n_3=7$; भिन्न क्रमचयों की संख्या होगी।

$$\frac{7!}{3!\,2!\,2!}=\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{2\cdot3\cdot2\cdot2}=210.$$

उदाहरण 2. चिह्न $++++---$ से बने भिन्न क्रमचयों की संख्या ज्ञात करें। यहाँ $n_1=4$, $n_2=3$; $n\quad n_1+n_2=7$; इष्ट संख्या $\frac{7!}{4!\,3!}$ $=35$ के बराबर है।

अंतिम उदाहरण से स्पष्ट है कि n तत्त्व (जिनमें n_1 बार पुनरावृत्त प्रथम प्रकार के तत्त्व और n_2 बार पुनरावृत द्वितीय प्रकार के तत्त्व हैं) उतने ही भिन्न क्रमचय देते हैं, जितने n में से n_1 तत्त्वों के संचय या n में से n_2 तत्त्वों के संचय प्राप्त होते हैं। दरअसल हर क्रमचय, उन स्थानों की क्रम-संख्याओं के संचय के अनुरूप है, जिन पर चिह्न + उपस्थित होता है। यथा, क्रमचय $++--+--+$ में चिह्न + स्थान 1, 2, 5 तथा 7 पर उपस्थित है, अत: वह संचय 1, 2, 5, 7 के अनुरूप है। इसका अर्थ है कि क्रमचय उतने हैं, जितने सात में से चार संख्याओं के संचय हैं।

§ 137. न्यूटन का द्विपद-सूत्र

धनात्मक पूर्ण संख्या n के लिए व्यंजन $(a+b)^n$ को बहुपद के रूप में व्यक्त करने वाले सूत्र को **न्यूटन का द्विपद-सूत्र** कहते हैं।*

धनात्मक पूर्ण n के लिए इस सूत्र का रूप है:

---

* इस नाम में दो गलतियां हैं। पहली गलती यह है कि $(a+b)_n$ कोई द्विपद नहीं है; दूसरी गलती यह है कि धनात्मक पूर्ण संख्या n के लिए $(a+b)_n$ का प्रसार न्यूटन के पहले भी ज्ञात था। न्यूटन को इस बात का श्रेय है कि उन्होंने इस प्रसार को ऋणात्मक तथा अपूर्णांक n के लिए भी सत्य बनाने का विचार प्रस्तुत किया, जो साहसपूर्ण था और फलप्रद सिद्ध हुआ।

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n, \qquad (1)$$

या (एक ही बात है, दे. पृ. 278)

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n!}{1!(n-1)!} a^{n-1} b + \frac{n!}{2!(n-2)!} a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n \qquad (2)$$

इस सिलसिले में यह याद रखें कि $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ होता है और $0! = 1$ होता है। इन मान्यताओं के कारण सूत्र में प्रथम तथा अंतिम पदों को भी बाकी पदों जैसा रूप दिया जा सकता है; यथा,

$$a^n = \binom{n}{0} a^{n-0} b^0; \quad b^n = \binom{n}{n} a^{n-n} b^n \text{ ।}$$

कलन की दृष्टि से अधिक सुविधाजनक निम्न सूत्र हैं :

$$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot a^{n-3} b^3 + \ldots\ldots + b^n \qquad (3)$$

उदाहरण 1.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} a b^2 + b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

उदाहरण 2.

$$(1+x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6.$$

संख्या $1, n, \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ आदि को द्विपदी संख्याएँ कहते हैं। इन्हें सिर्फ जोड़ की संक्रिया संपन्न करते हुए निम्न विधि से प्राप्त किया जा सकता है। ऊपर की पंक्ति में दो इकाइयां लिखते हैं। नीचे की सभी पंक्तियाँ इकाई से शुरू होती हैं और इकाई पर समाप्त होती हैं। बीच की संख्याएं ऊपर की पंक्ति के अगल-बगल की संख्याओं को जोड़ने से मिलती हैं [किसी भी पंक्ति की दो निकटस्थ संख्याओं को जोड़ने पर उनके बीच के स्थान

के नीचे (निचली पंक्ति में) स्थित संख्या मिलती है]। यथा, दूसरी पंक्ति में स्थित 2 ऊपर अगल-बगल की इकाइयों को जोड़ने से मिलता है; तीसरी पंक्ति दूसरी पंक्ति से मिलती है : $1+2=3$, $2+1=3$; चौथी पंक्ति तीसरी पंक्ति से मिलती है : $1+3=4$, $3+3=6$, $3+1=4$; आदि। किसी एक पंक्ति में स्थित संख्याएं तदनुरूप घात वाली दुपदी संद होती हैं [यथा, छठी पंक्ति की संख्याएं $(a+b)^6$ के संद हैं]। नीचे दिया गया आरेख **पास्कल (Pascal) का त्रिभुज** कहलाता है :

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

अपूर्णांक और ऋण घात-सूचकों के लिए न्यूटन का दुपद-सूत्र

मान लें कि $(a+b)^n$ एक व्यंजन है, जिसमें n कोई अपूर्णांक या ऋण संख्या है। यह भी मान लें कि $|a|>|b|$ है। $(a+b)^n$ को $a^n(1+x)^n$ के रूप में लिखते हैं, जहाँ $x=\frac{b}{a}$ का परम मान इकाई से कम है। व्यंजन $(1+x)^n$ को सूत्र (3) की सहायता से किसी भी कोटि की परिशुद्धता के साथ कलित किया जा सकता है।

उदाहरण 1. $\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$. यहाँ $n=-1$ है।

$$\text{चूँकि}\quad \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}=\frac{(-1)\cdot(-2)}{1\cdot 2}=1;$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{1\cdot 2\cdot 3}=-1$$

आदि, इसलिए

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots\ldots$$

दायें पक्ष में पदों की संख्या अनंत है, पर $|x|<1$ होने के कारण पदों की

संख्या असीम रूप से बढ़ाने पर उनका संकल सीमा $\frac{1}{1+x}$ की ओर प्रवृत्त होता है क्योंकि दायें पक्ष में स्थित व्यंजन अनंत ह्रासी गुणोत्तर श्रेढ़ी का संकल है (एक बार फिर से ध्यान दें कि $|x|<1$ है)।

उदाहरण 2. $\sqrt{1.06}$ को पाँचवे दशमलव अंक तक की शुद्धता के साथ ज्ञात करें।

$\sqrt{1.06}$ को $(1+0.06)^{\frac{1}{2}}$ के रूप में लिख कर सूत्र (3) का प्रयोग करते हैं :

$$(1+0.06)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}\cdot 0.06+\frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)}{1\cdot 2}\cdot 0.06^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 0.06^3+\ldots$$

$$=1+0.03-0.00045+0.0000135-\ldots$$

आगे के पद प्रथम पाँच दशमलव अंकों पर कोई प्रभाव नहीं डालते, अत: इन चार पदों को जोड़ने पर

$$\sqrt{1.06} \approx 1.02956.$$

उदाहरण 3. संख्या $\sqrt[3]{130}$ के पाँच सार्थक अंक लिखें।

130 का निकटतम (पूर्ण संख्या का) घन $125=5^3$ है। $\sqrt[3]{130}$ को $(125+5)^{\frac{1}{3}} = 125^{\frac{1}{3}} (1+0.04)^{\frac{1}{3}} = 5(1+0.04)^{\frac{1}{3}}$ के रूप में लिखते हैं। कलन 7 अंकों की शुद्धता से करेंगे (क्योंकि जोड़ते वक्त त्रुटियाँ जमा होती जायेंगी और फिर 5 गुनी बड़ी हो जायेंगी)।

$$(1+0.04)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{3}\cdot 0.04+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{1\cdot 2}\cdot 0.04^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 0.04^3+\ldots$$

$$=1+0.0133333-0.0001778+0.0000040-\ldots$$

$$=1.0131595.$$

छोड़े गये पदों का सातवें अंक पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। अत: $5\cdot 1.0131595=5.0657975$ मिलता हैं। पाँचवें अंक तक की शुद्धता से $\sqrt[3]{130}=5.06580$ होगा। एक और (अगले) पद को ध्यान में रखने पर अधिक शुद्ध कलनफल 5.0657970 मिलेगा, जिसमें सभी अंक सही हैं।

इस विधि से किसी भी संख्या का किसी भी कोटि का मूल शीघ्र और शुद्ध-शुद्ध रूप में ज्ञात किया जा सकता है।

न्यूटन के बुपद-सूत्र का व्यापकीकरण

$$(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k)^n=$$
$$=\sum \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}a_1^{n_1}\;a_2^{n_2}\;\ldots a_k^{n_k}$$

(n कोई पूर्ण धन संख्या है)।

प्रतीक Σ का अर्थ है कि

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}a_1^{n_1}\;a_2^{n_2}\ldots a_k^{n_k}$$

प्रकार के सभी संभव पदों का संकल लिया जाये, जहां n प्रत्त घात-सूचक है और $n_1, n_2, \ldots, n_k$ कोई भी पूर्ण धन संख्याएं या शून्य हैं, पर इनका योगफल n के बराबर है। संख्या $0!=1$ मानते हैं।

उदाहरण.

$$(a+b+c+d)^3=\sum\frac{3!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\,n_4!}a^{n_1}b^{n_2}c^{n_3}d^{n_4}$$

संख्या 3 को $k=4$ पूर्णांकी पदों के योगफल के रूप में निम्न विधियों से व्यक्त कर सकते हैं:

$$3=3+0+0+0$$
$$3=2+1+0+0$$
$$3=1+1+1+0$$

अतः $(a+b+c+d)^3=$

$$\frac{3}{3!\,0!\,0!\,0!}(a^3b^0c^0d^0+a^0b^3c^0d^0+a^0b^0c^3d^0+a^0b^0c^0d^3)$$
$$+\frac{3!}{2!\,1!\,0!\,0!}(a^2bc^0d^0+ab^2c^0d^0+a^2b^0cd^0+ab^0c^2d^0+\ldots\ldots)$$
$$+\frac{3!}{1!\,1!\,1!\,0!}(abcd^0+abc^0d+ab^0cd+a^0bcd)$$
$$=a^3+b^3+c^3+d^3+3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+a^2d+ad^2+b^2c$$
$$+bc^2+b^2d+bd^2+c^2d+cd^2)+6(abc+abd+acd+bcd).$$

§ 138. न्यूटन के द्विपदी संदों के गुण

(1) प्रसार के सिरों से समान दूरियों पर स्थित पदों के संद समान होते हैं। उदाहरणार्थ, $(a+b)^6$ के प्रसार

$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$ में आरंभ से दूसरे और अंत से दूसरे पदों के संद 6 के बराबर हैं; आरंभ से तीसरे और अंत से तीसरे पदों के संद 15 के बराबर हैं।

(2) $(a+b)^n$ के प्रसार में संदों का योगफल 2^n के बराबर होता है [यह $(a+b)^n$ में $a=b=1$ रखकर देख सकते हैं]। पिछले उदाहरण में

$$1+6+15+20+15+6+1=64=2^6.$$

(3) विषम स्थानों पर स्थित पदों के संदों का योगफल और सम स्थानों पर स्थित पदों के संदों का योगफल आपस में बराबर होते हैं, और इनमें से प्रत्येक योगफल 2^{n-1} के बराबर होता है। उदाहरणार्थ, $(a+b)^6$ के प्रसार में प्रथम, तीसरे, पाँचवें और सातवें पदों के संदों का योगफल दूसरे, चौथे और छठे पदों के संदों के योगफल जितना है :

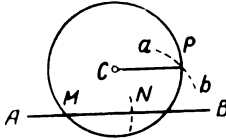
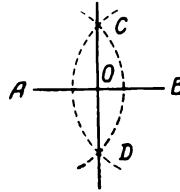
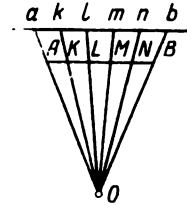
$$1+15+15+1=6+20+6=32=2^5.$$

IV. ज्यामिति

A. तलमिति

§ 139. ज्यामितिक बनावटें

1. *प्रत्त बिंदु C से प्रत्त सरल रेखा AB के समांतर एक सरल रेखा खींचें* (चित्र 22)।

C को केंद्र मानकर परकार से मनचाही त्रिज्या का एक वृत्त खींचें, जो *AB* को काटे। किसी एक कटान-बिंदु *M* से किसी भी ओर *AB* पर इसी

चित्र 22 चित्र 23 चित्र 24

त्रिज्या की दूरी *MN* अंकित करें। *N* से इसी त्रिज्या की दूरी पर चाप *ab* खींचें, जो वृत्त की परिधि को किसी बिंदु *P* पर काटे। बिंदु *P* और *C* मिला लें।

PC इष्ट रेखा है।

2. *प्रत्त कर्त AB को समद्विभाजित करना* (चित्र 23)।

कर्त के सिरों *A* व *B* से किसी समान (पर $\frac{1}{2}AB$ से बड़ी) दूरी पर दो चाप खींचें। इनके कटान-बिंदु *C* और *D* को सरल रेखा द्वारा मिला लें। सरल रेखा *AB* और *CD* का कटान-बिंदु *O* कर्त *AB* का मध्य है।

3. *कर्त AB को प्रत्त संख्या जितने समान भागों में बाँटना* (चित्र 24)।

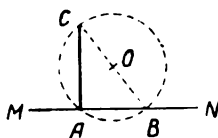
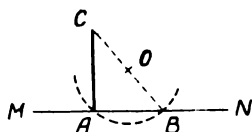
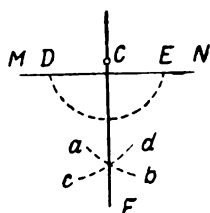
AB के समांतर एक सरल रेखा *ab* खींचें; इसके किसी बिंदु *a* से प्रत्त संख्या में समान दूरियां (जैसे $ak=kl=lm=mn=nb$) अंकित करें। सरल रेखा *Aa* तथा *Bb* का कटान-बिंदु *O* ज्ञात करें; सरल रेखा *Ok*, *Ol*, *Om*, *On* खींचें। ये रेखाएं *AB* को बिन्दु *K*, *L*, *M*, *N* पर काटती हुई *AB* को प्रत्त संख्या जितने (हमारे उदाहरण में 5) समान भागों में काटती हैं।

19-01458

4. *प्रत्त कर्त को प्रत्त राशियों के समानुपात में बाँटना।*

हल पिछले प्रश्न की तरह है; इसमें ab पर प्रत्त राशियों की समानुपाती दूरियाँ अंकित करें।

5. *सरल रेखा MN के प्रत्त बिंदु A पर लंब खींचना* (चित्र 25)।

प्रत्त रेखा के बाहर मनचाहे बिंदु O से त्रिज्या OA वाला वृत्त खींचें। परिधि और सरल रेखा MN के दूसरे कटान-बिंदु B से व्यास BC खींचें; व्यास का दूसरा सिरा C प्रत्त बिंदु A के साथ मिला लें। CA इष्ट लंब है।

चित्र 25 चित्र 26 चित्र 27

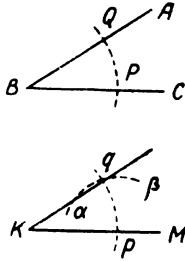
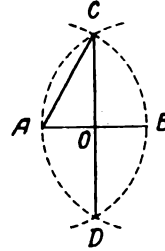
यह विधि विशेष रूप से सुविधाजनक होती है, जब बिंदु A कागज की किनारी के बहुत निकट होता है। अगले प्रश्न के हल की पहली विधि भी इसी दृष्टि से अच्छी है।

6. *सरल रेखा MN पर इसके बाहर के प्रत्त बिंदु C से लंब खींचना।*

प्रथम विधि (चित्र 26) : बिंदु C से मनचाही आड़ी रेखा CB खींचें, इसका मध्य बिंदु O ज्ञात करें (दे. प्रश्न 2) और इसे केंद्र मानकर त्रिज्या OB वाला वृत्त खींचें। वृत्त सरल रेखा MN को बिंदु A पर भी काटता है। A और C मिलाकर इष्ट लंब प्राप्त करें।

दूसरी विधि (चित्र 27) : यदि बिंदु C सरल रेखा MN के बहुत निकट है, तो उपरोक्त विधि में त्रुटि बहुत अधिक हो सकती है। इसीलिए इस दूसरी विधि का प्रयोग करना बेहतर है। बिंदु C को केंद्र मानकर मनचाही त्रिज्या वाला चाप DE खींचें, जो MN को बिंदु D और E पर काटता है। बिंदु D और E को क्रमशः केंद्र मानकर मनचाही (पर समान) त्रिज्या वाले चाप cd और ab खींचें, जो एक-दूसरे को बिंदु F पर काटते हैं। F और C को मिलाने वाली सरल रेखा इष्ट लंब है।

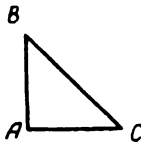
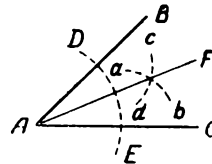
7. *प्रत्त शीर्ष K और किरण KM में प्रत्त कोण ABC के बराबर एक कोण बनाना* (चित्र 28)।

शीर्ष B से मनचाही त्रिज्या का चाप खींचें। इसी त्रिज्या का चाप pq शीर्ष K से खींचें। बिंदु p से PQ के बराबर दूरी पर चाप $\alpha\beta$ खींचें। चाप pq और $\alpha\beta$ के कटान-बिंदु q को K से मिलायें। कोण qKM इष्ट कोण है।

चित्र 28 चित्र 29

8. *60° और 30° के कोण बनाना* (चित्र 29)।

मनचाहे कर्ण AB के सिरे A व B से AB को त्रिज्या मानकर चाप खींचें। चापों के कटान-बिंदु C और D को मिलाने वाली सरल रेखा कर्ण AB को उसके मध्य बिंदु O पर काटती है। A और C को मिला लें। $\angle CAO = 60^\circ$, $\angle ACO = 30^\circ$ है।

9. *45° का कोण बनाना* (चित्र 30)।

समकोण BAC की भुजाओं पर समान दूरियां AB और AC अंकित करें, B और C मिला लें। सरल रेखा BC किरण AB तथा AC में से प्रत्येक के साथ 45° का कोण बनाती है।

चित्र 30 चित्र 31

10. *प्रत्त कोण BAC को समद्विभाजित करना* (चित्र 31)।

शीर्ष A से मनचाही त्रिज्या का चाप DE खींचें, जो भुजा AB और AC को क्रमशः D और E पर काटता है। D और E से मनचाही लेकिन समान त्रिज्या वाले चाप ab तथा cd खींचें (पिछली त्रिज्या को ही काम में लाना सुविधाजनक होगा; परकार की नोकों की दूरी नहीं बदलनी पड़ेगी)।

इन चापों के कटान-बिंदु F को A से मिला लें। सरल रेखा AF कोण BAC को समद्विभाजित करती है।

11. *प्रत्त कोण BAC को तीन बराबर भागों में बाँटना* (चित्र 32)।

सामान्य पटरी और परकार की सहायता से यह बनावट संभव नहीं है [पटरी से तात्पर्य है ऐसी पटरी, जिसकी सहायता से सरल रेखा खींची जा सके, लेकिन नाप नहीं ली जा सके]। परकार और सेंटीमीटर आदि किसी इकाई में नापने वाली पटरी से इसे संपन्न करने की विधि निम्न है : बिंदु A को केंद्र मानकर मनचाही त्रिज्या AC का वृत्त खींचें। AC को पीछे की ओर बढ़ा लें। पटरी को इस तरह रखें कि उसकी किनारी B से गुजरे; अब पटरी को B के गिर्द तब तक घुमायें, जब तक वृत्त और सरल रेखा AK के बीच त्रिज्या AC के बराबर का कर्त ED न मिले। कोण EDF ही कोण BAC का तिहाई भाग होगा।

चित्र 32

12. *प्रत्त बिंदु A और B से गुजरने वाला वृत्त खींचना, जिसकी त्रिज्या r प्रदत्त है* (चित्र 33)।

चित्र 33

चित्र 34

बिंदु A और B से त्रिज्या r के चाप ab तथा cd खींचें, इन चापों का कटान-बिंदु इष्ट वृत्त का केंद्र है।

13. *तीन प्रत्त बिंदु A, B तथा C से (जो एक सरल रेखा पर नहीं हैं) गुजरने वाला वृत्त खींचना* (चित्र 34)।

कर्त AC तथा BC के मध्य बिंदुओं पर लंब ED तथा KL खींचें (दे. प्रश्न 2)। इन लंबों का कटान-बिंदु O इष्ट वृत्त का केंद्र है।

14. *किसी वृत्त के प्रत्त चाप का केन्द्र ज्ञात करना।*

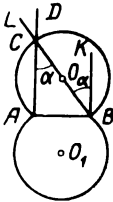
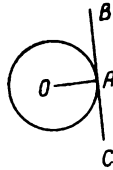
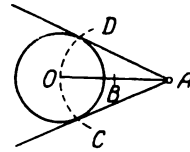
प्रत्त चाप पर एक दूसरे से यथासंभव दूर स्थित तीन बिंदु चुन लेते हैं। इसके बाद पिछले प्रश्न के हल का अनुसरण करते हैं।

15. *वृत्त के प्रत्त चाप को समद्विभाजित करना ।*

चाप के सिरों को चापकर्ण से मिला देते हैं। चापकर्ण के मध्य बिंदु पर लंब खींचते हैं (दे. प्रश्न 2)। यह लंब प्रत्त चाप का समद्विभाजक होगा।

16. *उन बिंदुओं का ज्यामितिक स्थान ज्ञात करना जिनसे प्रत्त कर्त AB प्रत्त कोण α पर दिखता है* (चित्र 35)।

बिंदुओं का इष्ट ज्यामितिक स्थान समान वृत्तों के दो चाप हैं, जिनके सिरे बिंदु A और B पर मिलते हैं (पर बिंदु A और B इष्ट ज्यामितिक स्थान में नहीं हैं)। इनके केंद्र निम्न विधि से ज्ञात किये जाते हैं: कर्त AB के सिरों पर AD और BK लंब डालें (दे. प्रश्न 5)। कोण $KBL = \alpha$ बना लें। BL और AD का कटान-बिंदु C मिलता है। कर्त BC का मध्य बिंदु O एक इष्ट चाप का केंद्र है और $OC = OB$ उसकी त्रिज्या है। दूसरा चाप भी इसी तरह ज्ञात किया जाता है।

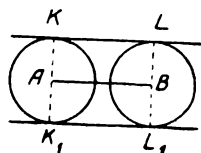
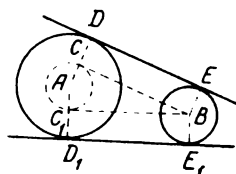
17. *प्रत्त बिंदु A से प्रत्त वृत्त की स्पर्शक रेखा खींचना ।*

चित्र 35 चित्र 36 चित्र 37

पहली स्थिति (चित्र 36): यदि बिंदु वृत्त की परिधि पर है, तो त्रिज्या OA पर लंब BAC खींचें (दे. प्रश्न 5); BC इष्ट स्पर्शक रेखा है।

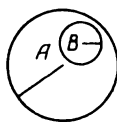
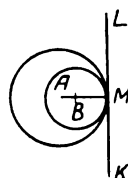
दूसरी स्थिति (चित्र 37): यदि A वृत्त के बाहर है, तो AO को आधार (दे. प्रश्न 2) और उसके मध्य बिंदु से त्रिज्या BO का चाप CD खींचें। बिंदु D व C को A से मिला लें। सरल रेखा AD और AC इष्ट स्पर्शक रेखाएं हैं।

18. *दो प्रत्त वृत्तों की बाह्य सामूहिक स्पर्शक रेखा खींचना ।*

पहली स्थिति (चित्र 38): यदि प्रत्त वृत्तों की त्रिज्याएं समान हैं, तो दो हल मिलते हैं। इसके लिए उनके केंद्र A और B से AB के लंब KK_1 तथा LL_1 खीच लें। KL और K_1L_1 रेखाएं इष्ट हल देती हैं।

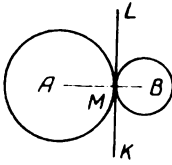
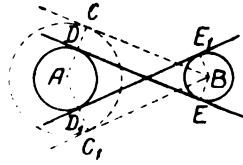
दूसरी स्थिति (चित्र 39) : मान लें कि वृत्तों की त्रिज्याएं असमान हैं और $R > r$ है। बड़े वृत्त के केंद्र से त्रिज्या $AC = R - r$ का वृत्त खींचें;

चित्र 38 चित्र 39

छोटे वृत्त के केंद्र B से इसकी स्पर्शक रेखा BC खींचें (प्रश्न 17) । केंद्र A को स्पर्श बिंदु C से मिला लें और AC बढ़ाते हुए बड़े वृत्त की परिधि के साथ इसका कटान-बिंदु D ज्ञात करें। BC पर लंब BE डालें और छोटे वृत्त की परिधि के साथ इसका कटान-बिंदु E ज्ञात करें। D और E को मिलाने वाली सरल रेखा DE इष्ट स्पर्शक रेखा है । प्रश्न का दूसरा हल D_1E_1 भी है।

अन्य स्थितियां : यदि छोटा वृत्त पूर्णतया बडे वृत्त में स्थित है, तो प्रश्न का हल नहीं है (चित्र 40) । बीच की स्थिति में, जब छोटा वृत्त बड़े वृत्त को

चित्र 40 चित्र 41

भीतर से स्पर्श करता है, प्रश्न का सिर्फ एक हल मिलता है—आंतरिक स्पर्श के बिंदु M पर $KL \perp AM$ खींचने से (चित्र 41) ।

19. *दो प्रत्त वृत्तों की आंतर समष्टिक स्पर्शक रेखा खींचना ।*

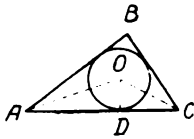
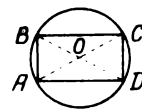
यदि एक वृत्त दूसरे के भीतर होता है या दोनों एक दूसरे को काटते हैं, तो प्रश्न हलातीत होता है । यदि वृत्त एक दूसरे को बाहर से स्पर्श करते हैं (चित्र 42), तो प्रश्न का सिर्फ एक हल होता है; इसके लिए बिंदु M से $KL \perp AB$ खींचते हैं ।

अन्य स्थितियों में (चित्र 43) दो हल DE और D_1E_1 मिलते हैं। केंद्र A से एक वृत्त खींचें, जिसकी त्रिज्या प्रत्त वृत्तों की त्रिज्याओं के योगफल के बराबर हो। केंद्र B से नये वृत्त की स्पर्शक रेखा BC खींचें (प्रश्न 17)। स्पर्श-बिंदु C

चित्र 42

चित्र 43

और केंद्र A को मिलाने वाली रेखा AC वृत्त (A) की परिधि को बिंदु D पर स्पर्श करती है। B से त्रिज्या $BE \perp BC$ खींचें। इसका सिरा E बिंदु D से मिला लें। ED इष्ट स्पर्शी रेखा है। दूसरी स्पर्शक रेखा $E_1 D_1$ इसी तरह से खींची जाती है।

20. *प्रत्त त्रिभुज ABC के गिर्द वृत्त परीत करना।*

शीर्ष A, B, C से गुजरने वाला एक वृत्त खींच लें (दे. प्रश्न 13)।

21. *प्रत्त त्रिभुज ABC में वृत्त अंतर्गत करना* (चित्र 44)।

चित्र 44

चित्र 45

त्रिभुज के किन्हीं दो कोणों (जैसे A और C) को आधा-आधा कर लें (दे. प्रश्न 10)। अर्धक रेखाओं के कटान-बिंदु O से $OD \perp AC$ खींचें (दे. प्रश्न 6)। त्रिज्या OD से इष्ट वृत्त मिलता है।

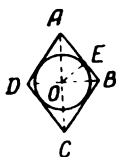
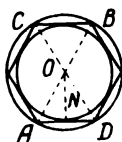
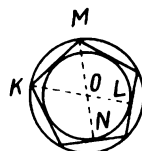
22. *प्रत्त आयत (या वर्ग) $ABCD$ के गिर्द वृत्त परीत करना* (चित्र 45)।

AC और BD कर्ण खींचें। इनके कटान-बिंदु O से त्रिज्या OA का वृत्त इष्ट हल है।

तिर्यकोणिक (असमकोणिक) समांतर चतुर्भुज के गिर्द परीत वृत्त खींचना संभव नहीं है।

23. *रोंब (या वर्ग) $ABCD$ में वृत्त अंतर्गत करना* (चित्र 46)।

कर्णों के कटान-बिंदु O से $OE \perp AB$ खींचें। केंद्र O से त्रिज्या OE का वृत्त इष्ट है।

समांतर विषमचतुर्भुज को वृत्त से परीत करना संभव नहीं है।

चित्र 46

चित्र 47

चित्र 48

24. *प्रत्त नियमित बहुभुज के गिर्द परीत वृत्त खींचना।*

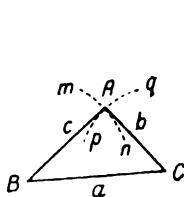
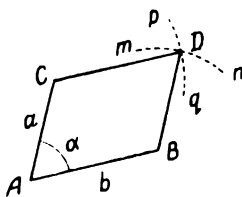
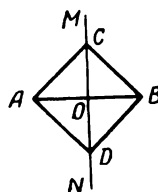
स्थिति 1 (चित्र 47) : यदि भुजाओं की संख्या सम है, तो AB और CD रेखाओं द्वारा किन्हीं दो-दो सम्मुख शीर्षों को मिला लें। उनका कटान-बिंदु O इष्ट वृत्त का केंद्र होगा और कर्ण OA त्रिज्या होगा।

स्थिति 2 (चित्र 48) : यदि भुजाओं की संख्या विषम है, तो किन्हीं दो शीर्षों K और M से उनकी सम्मुख भुजाओं पर लंब KL और MN डालें। इनके कटान-बिंदु O को केन्द्र मानकर त्रिज्या OK का वृत्त खींचें।

25. *प्रत्त नियमित बहुभुज में अंतरित वृत्त खींचना।*

वृत्त का केंद्र पिछले प्रश्न की भांति ज्ञात कर लें। केंद्र से किसी भी भुजा पर लंब ON डालें (चित्र 47)। ON (या OL, चित्र 48) इष्ट वृत्त की त्रिज्या है।

26 *तीन प्रत्त भुजाओं a, b, c से त्रिभुज बनाना* (चित्र 49)।

मान लें कि कर्ण a सबसे लंबा है। यदि $a < b+c$, तो इष्ट त्रिभुज निम्न विधि से बनाते हैं : कर्ण $BC=a$ अंकित करें। इसके सिरों B और C से क्रमशः c और b त्रिज्याओं के चाप mn और pq खींचें। इनके कटान-बिंदु A को B और C से मिला लें। यदि $a > b+c$ है, तो प्रश्न हलातीत है। यदि

चित्र 49

चित्र 50

चित्र 51

$a=b+c$ है, तो एक **अवजात त्रिभुज** मिलता है जिसके तीनों शीर्ष एक सरल रेखा पर होते हैं (इसे सिर्फ औपचारिक रूप से त्रिभुज कह सकते हैं)।

27. *प्रत्त भुजा a, b और कोण* α *के सहारे समांतर चतुर्भुज बनाना* (चित्र 50)।

कोण $A=\alpha$ बना लें (दे. प्रश्न 7); इसकी भुजाओं पर कर्त $AC=a$ और $AB=b$ काट लें। B से त्रिज्या a का चाप mn और C से त्रिज्या b का चाप pq खींचें। कटान-बिंदु D को C और B से मिला दें।

28. *प्रत्त भुजाओं से आयत बनाना*।

पिछले प्रश्न की भाँति हल करें, कोण α की जगह समकोण लें (दे. प्रश्न 5)।

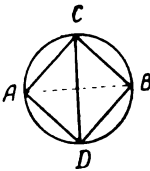
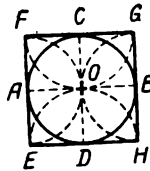
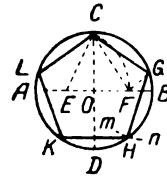
29. *प्रत्त भुजा पर वर्ग बनाना*।

प्रश्न 27 और 28 का अनुसरण करें ($a=b$, $\alpha=90°$)।

30. *प्रत्त कर्ण AB पर वर्ग बनाना* (चित्र 51)।

AB के मध्य बिंदु पर लंब MN डालें (दे. प्रश्न 2)। AB और MN के कटान-बिंदु O से MN पर $OC=OD=OA$ काटकर बिंदु C और D को A और B से मिला लें। $ACBD$ इष्ट वर्ग है।

31. *प्रत्त वृत्त में अंतरित वर्ग बनाना* (चित्र 52)।

दो परस्पर लंब व्यास AB और CD के सिरों को मिला दें; $ACBD$ इष्ट वर्ग है।

चित्र 52 चित्र 53 चित्र 54

32. *प्रत्त वृत्त के गिर्द परीत वर्ग बनाना* (चित्र 53)।

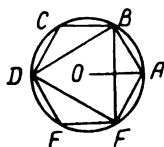
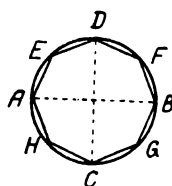
दो परस्पर लंब व्यास AB और CD के सिरों को केंद्र मानकर त्रिज्या OA के चार अर्धवृत्त खींचें; इनके कटान-बिंदु F, G, H, E इष्ट वर्ग के शीर्ष होंगे।

33. *प्रत्त वृत्त में नियमित पंचभुज अंतरित करना* (चित्र 54)।

दो परस्पर लंब व्यास AB और CD खींचें। त्रिज्या EC के मध्य बिंदु E

से त्रिज्या EC का $\overset{\frown}{CF}$ खींचें, जो व्यास AB को बिंदु F पर काटता है। C से त्रिज्या CF का $\overset{\frown}{FG}$ खींचें, जो प्रत्त वृत्त को बिंदु G पर काटता है; CG $(=CF)$ इष्ट आकृति की एक भुजा है। G को केंद्र बनाकर इसी त्रिज्या (CG) का $\overset{\frown}{mn}$ खींचें, जिससे इष्ट पंचभुज का एक और शीर्ष H ज्ञात हो जाता है। फिर H से त्रिज्या CG का चाप खींच कर अगला शीर्ष ज्ञात करते हैं, आदि।

34. *प्रत्त वृत्त में नियमित षटभुज और त्रिभुज अंतरित करना* **(चित्र 55)।**

परकार द्वारा त्रिज्या के बराबर चाप से परिधि पर बिंदु A, B, C, D, E, F अंकित करें। हर बिंदु को अगले बिंदु से मिलाने पर षटभुज $ABCDEF$ मिलेगा, एक बिंदु छोड़कर मिलाने से त्रिभुज DBF (या ACF) मिलेगा।

चित्र 55 चित्र 56

35. *प्रत्त वृत्त में नियमित अष्टभुज ज्ञात करना* **(चित्र 56)।**

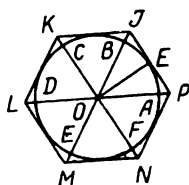
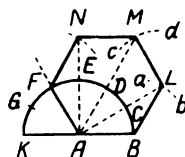
दो परस्पर लंब त्रिज्या AB और CD लें। $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{DB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ के मध्य बिंदु $EFGH$ ज्ञात करें (दे. प्रश्न 15) और इस तरह से प्राप्त आठों बिंदुओं को क्रम से मिला लें।

36. *प्रत्त वृत्त में नियमित दशभुज अंतरित करना* **(चित्र 54)।**

प्रश्न 33 की भाँति बिंदु F ज्ञात करते हैं। कर्त OF इष्ट आकृति की भुजा के बराबर होगा। परकार से OF की त्रिज्या के चाप से परिधि को काटते चले जायें; सभी दस शीर्ष मिल जाएंगे।

सात और नौ भुजाओं वाले नियमित बहुभुज पटरी और परकार की सहायता से वृत्त में अंतरित नहीं किये जा सकते।

37. *प्रत्त वृत्त के गिर्द नियमित त्रिभुज, पंचभुज, षट्भुज, अष्टभुज, दशभुज परीत करना* **(चित्र 57)।**

वृत्त की परिधि पर आवश्यक संख्या में भुजाओं वाले अंतरित बहुभुज के शीर्ष $A, B, \ldots, F$ अंकित कर लें (दे. प्रश्न 33-36)। $OA, OB, \ldots, OF$ त्रिज्याएं खींच कर उसे आगे बढ़ायें। चाप AB का मध्य बिंदु G ज्ञात करके (दे. प्रश्न 15) $JP \perp OE$ खींचें। पड़ोस की त्रिज्याओं से घिरा हुआ कर्त JP इष्ट बहुभुज की एक भुजा है। अन्य त्रिज्याओं पर OP के बराबर कर्त $OK, OL, \ldots, ON$ काट लें; $J, K, L, \ldots, N, P$ को क्रम से मिला लें। $JKLM\ldots NP$ इष्ट बहुभुज है।

चित्र 57 चित्र 58

38. *प्रत्त भुजा a से नियमित n-भुज बनाना* (चित्र 58)।

कर्त $BK = 2a$ को व्यास मानकर अर्ध वृत्त खींचें। बिंदु C, D, E, F, G से (अर्थात् $2n$-भुज के शीर्षों से; चित्र में $n = 6$ है) अर्ध वृत्त को n समान भागों में बाँट लें। केन्द्र A को अंतिम दो बिंदुओं (K और G) को छोड़कर बाकी सभी बिंदुओं से मिला लें। बिंदु B से त्रिज्या AB के चाप ab से किरण AL को काटें; कटान-बिंदु L से उसी त्रिज्या के चाप cd से किरण AM को बिंदु M पर काटें; यह प्रक्रिया दुहराते जायें। प्राप्त बिंदुओं B, L, M, N आदि को क्रम से मिलाने पर इष्ट बहुभुज $ABLMNF$ मिल जाता है।

पटरी और परकार से इस प्रश्न का हल हमेशा संभव नहीं है; उदाहरणतया, $n = 7$ और $n = 9$ होने पर हल संभव नहीं है, क्योंकि अर्ध वृत्त को पटरी और परकार की मदद से 7 तथा 9 समान भागों में नहीं बाँटा जा सकता।

§ 140. ज्यामिति की विषय-वस्तु

ज्यामिति वस्तुओं के व्योम गुणों का अध्ययन करती है, उनके बाकी सभी लक्षणों पर ध्यान नहीं देती। उदाहरणतया, 25 cm व्यास वाला रबड़ का गेंद और इसी व्यास वाला लोहे का गोला रंग, कठोरता, भार आदि अनेक गुणों में भिन्न होते हैं; ज्यामिति में इन गुणों पर कोई ध्यान नहीं दिया जाता। दोनों के

व्यौम गुण (माप, आकृति) समान हैं और ज्यामिति की दृष्टि में दोनों ही 25 cm व्यास वाले *गोले* हैं।

चेतना में (मन में) वस्तु को व्यौम गुणों के अतिरिक्त अन्य सभी गुणों से मुक्त कर देने पर **ज्यामितिक पिंड** प्राप्त होता है। गोला भी एक ज्यामितिक पिंड है।

गुण-विमोचन के पथ पर आगे बढ़ते हुए हम धीरे-धीरे ज्यामितिक **सतह**, ज्यामितिक **रेखा** और ज्यामितिक **बिंदु** की अवधारणाएं प्राप्त करते हैं। सतह को हम मन ही मन पिंड से अलग करते हैं, उसे मोटाई से रहित कर देते हैं। रेखा को हम मोटाई और चौड़ाई से विहीन करते हैं, और बिंदु में तो कोई भी माप या विस्तार नहीं रहने देते। हम कल्पना करते हैं कि बिंदु रेखा की सीमा (या उसका एक अंश) है, रेखा सतह की सीमा है, सतह पिंड की सीमा है। हम यह भी कल्पना करते हैं कि बिंदु गतिमान हो सकता है और अपनी गति से [गति-पथ के रूप में] रेखा को जन्म दे सकता है, रेखा सतह को जन्म दे सकती है, सतह पिंड को जन्म दे सकती है।

प्रकृति में ऐसा बिंदु नहीं है जिसमें कोई माप (या विस्तार) न हो, पर ऐसी वस्तुएं हैं जो अपनी अत्यल्प मापों के कारण कुछ विशेष परिस्थितियों में बिंदु मान ली जा सकती हैं। प्रकृति में ज्यामितिक रेखा और ज्यामतिक सतह भी नहीं मिलती हैं, पर विज्ञान और तकनीक में ज्यामिति द्वारा निर्धारित इनके गुणों के अनेकानेक उपयोग हैं। इसका कारण यह है कि ज्यामितिक अवधारणाएं यथार्थ दुनिया के व्यौम गुणों से उत्पन्न होती हैं। इन गुणों का उनके शुद्ध रूप में अध्ययन करने के लिए ही ज्यामितिक अवधारणाओं का विमोचित रूप प्रयुक्त होता है।

§ 141. ज्यामिति के विकास का ऐतिहासिक सर्वेक्षण

प्रथम ज्यामितिक अवधारणाएं लोग अति प्राचीन काल से ही प्राप्त कर चुके थे। इनका जन्म बर्तन, कोठार आदि जैसी वस्तुओं का आयतन और खेत का क्षेत्र-फल ज्ञात करने की आवश्यकता से हुआ था। क्षेत्रफल और आयतन निकालने के नियमों का वर्णन जिन लिखित स्मारकों में पाया जाता है, उनमें से प्राचीन-तम स्मारक करीब 4000 वर्ष पूर्व मिश्र और बेबीलोन में रचे गये थे। मिश्र तथा बेबीलोन वालों का ज्यामितिक ज्ञान यूनानियों तक कोई ढाई हजार वर्ष पूर्व पहुँचा था। आरंभ में इस ज्ञान का उपयोग मुख्यत: खेतों को नापने में होता

था। इसलिए यूनानियों ने इसे "ज्योमेत्रिया" नाम दिया, जिसका अर्थ है भूमि (=ज्या) की माप (=मिति)।

यूनान के विद्वानों ने अनेकानेक ज्यामितिक गुणों की खोज की और ज्यामितिक ज्ञान के एक सुडौल तंत्र का निर्माण किया। इसके आधार में उन्होंने अनुभव से प्राप्त सरलतम ज्यामितिक गुणों को रखा। बाकी गुण इन सरलतम गुणों से तर्कणा द्वारा निगमित किये जाते थे।

इस तंत्र ने अपना अंतिम पूर्ण रूप कोई 300 वर्ष ईसा पूर्व यूक्लिड (Euclid) की कृति Stoicheia (शब्दश: 'ककहरा' ≃ 'विषय-प्रवेश', '*प्रवेशिका*', 'क ख'......) में प्राप्त किया। *प्रवेशिकाओं* [इनकी 15 पुस्तिकाएं थीं] में सैद्धांतिक अंकगणित की भी नींव दी गई है। *प्रवेशिकाओं* में ज्यामिति से संबंधित अनुच्छेद अंतर्य और तर्कसंगति के अनुसार लगभग वैसे ही हैं जैसी ज्यामिति पर अब की स्कूली पाठ्यपुस्तकें।

लेकिन उक्त कृति में आयतन, गोले की सतह, परिधि के साथ व्यास के व्यतिमान, आदि के बारे में कुछ भी नहीं कहा गया है (यद्यपि उसमें ऐसा प्रमेय है, जिसके अनुसार वृत्तों के क्षेत्रफल व्यासों के वर्गफलों के साथ समानुपाती होते हैं)। परिधि और व्यास का सन्निकृत मान प्रयोगों द्वारा यूक्लिड के बहुत पहले से ही ज्ञात था, पर सिर्फ ईसा पूर्व तीसरी शती के मध्य में आर्किमेडिस (Archimedes, 287-212 ई० पू०) ने तर्कसंगत रूप से सिद्ध किया कि परिधि और व्यास का व्यतिमान (हमारी संख्या π) $3\frac{1}{7}$ और $3\frac{10}{71}$ के बीच में है। आर्किमेडिस ने यह भी सिद्ध किया कि गोले का आयतन उस पर परीत बेलन के आयतन से ठीक $1\frac{1}{2}$ गुना कम होता है और गोले की सतह का क्षेत्रफल परीत बेलन की सतह के क्षेत्रफल से $1\frac{1}{2}$ गुना कम होता है।

उपरोक्त प्रश्न हल करने में आर्किमेडिस ने जिन विधियों का उपयोग किया था, उनमें उच्च गणित का बीज-रूप देखा जा सकता है। आर्किमेडिस ने इन विधियों का उपयोग ज्यामिति और यांत्रिकी के अनेक कठिन प्रश्नों को हल करने के लिए किया था, जो भवन-निर्माण तथा समुद्र-यात्राओं के लिए बहुत महत्त्वपूर्ण थे। खासकर उन्होंने बहुत सारे पिंडों के आयतन और गुरुत्व-केंद्र निर्धारित किये और भिन्न रूपों के प्लवनशील (तैर सकने वाले) पिंडों के संतुलन की समस्या का अध्ययन किया।

यूनानी ज्यामितकों ने अनेक रेखाओं के गुणों का अन्वीक्षण किया, जो व्यवहार और सिद्धांत की दृष्टि से महत्त्वपूर्ण है। विशेष पूर्णता से उन्होंने *कोनिक काटों* (दे. § 169) का अध्ययन किया। ई० पू० दूसरी शती में अपोलोनियस (Apollonius) ने कोनिक काटों के सिद्धांत को अनेक महत्त्वपूर्ण खोजों से

समृद्ध किया, जो 18 सदियों की अवधि तक अद्वितीय रहीं।

कोनिक काटों के अध्ययन में अपोलोनियस ने दिशांक-विधि (दे. § 213) का उपयोग किया था। तल (समतल) पर सभी संभव रेखाओं का अध्ययन करने के लिए इस विधि का उपयोग 17-वीं शती के चौथे दशक में फ्रांसीसी विद्वान फेर्मा (Fermat, 1601-1655) और डेकार्ट (Descartes, 1596-1650) ने किया। उस समय की इंजिनियरी के लिए समतली रेखाएं ही पर्याप्त थीं। वक्रतलों और इन पर खींची गयी रेखाओं के अध्ययन में दिशांक विधि का उपयोग सिर्फ सौ साल बाद ही शुरू हुआ, जब ज्योतिर्विद्या, भूगणित और यांत्रिकी की आंतरिक मांगें बहुत अधिक हो गयीं।

व्योम में दिशांक-विधि का क्रमबद्ध विकास 1748 में महान ऐलर (Euler) ने प्रस्तुत किया। [जन्म से स्विस, लेयोनार्द ऐलर (1707-83) असाधारण प्रतिभा सम्पन्न विद्वान थे; अपनी 800 से अधिक कृतियों में इन्होंने उच्च गणित, ख-यांत्रिकी, भौतिकी, प्रकाशिकी, पोत-निर्माण, संगीत-सिद्धांत आदि का जो विकास किया, वह इनकी विस्तृत ज्ञान-रुचि को प्रदर्शित करता है। जीवन का अधिकांश भाग इन्होंने पीटरबुर्ग की अकादमी में काम करते हुए बिताया है।]

दो हजार से अधिक वर्षों तक यूक्लिड का तंत्र अकाट्य, अद्वितीय माना जाता रहा। पर 1826 में मेधावी रूसी विद्वान् निकोलाइ इवानोविच लोबाछेव्स्की ने एक नया ज्यामितिक तंत्र रचा। इसकी उद्भावक मान्याएं यूक्लिड की मूल मान्यताओं से सिर्फ एक बात में भिन्न हैं : यूक्लिड की ज्यामिति में प्रत्त समतल के प्रत्त बिंदु से किसी सरल रेखा के समांतर एक, और सिर्फ एक, सरल रेखा गुजरती है; लोबाछेव्स्की की ज्यामिति में ऐसी अनेक सरल रेखाएं हैं। पर यह एकमात्र भिन्नता अनेक सारभूत विशेषताओं को जन्म देती है।

इस प्रकार, लोबाछेव्स्की की ज्यामिति में त्रिभुज के तीनों कोण मिलकर हमेशा 180° से कम होते हैं (यूक्लिड की ज्यामिति में उनका योगफल ठीक 180° होता है)। त्रिभुज का क्षेत्रफल जितना बड़ा होगा, तीनों कोणों का योगफल 180° से उतना ही कम होगा। ऐसा लग सकता है कि वास्तविक प्रयोग लोबाछेव्स्की के इस जैसे निष्कर्षों का खंडन करते हैं। पर यह सच नहीं है। त्रिभुज के कोणों की प्रत्यक्ष नापें ले कर हम देखते हैं कि उनका योगफल लगभग 180° है। बिल्कुल शुद्ध मान ज्ञात करना मापोपकरणों की अपूर्णता के कारण संभव नहीं होता। इसके अतिरिक्त, हमारी मापों के लिए सुलभ त्रिभुज इतने छोटे होते हैं कि कोणों के योगफल में 180° से जो कमी होती है, उसका प्रत्यक्ष मापों से पता नहीं चल सकता।

लोबाछेव्स्की के विचारों का आगे विकास होने पर यह स्पष्ट हो गया कि

ज्योतिर्विज्ञान और भौतिकी के अनेक प्रश्न ऐसे हैं, जिनके अध्ययन के लिए यूक्लिड का तंत्र पर्याप्त नहीं है : इनमें अक्सर विराट मापों वाली आकृतियों से वास्ता पड़ता है। लेकिन सामान्य अनुभव के क्षेत्र में यूक्लिड की ज्यामिति पर्याप्त कारगर है। इसके अतिरिक्त, यह सरल है और इसलिए इसका उपयोग तकनीकी कलनों में होता है और होता रहेगा; स्कूलों में भी इसीलिए इसका पठन-पाठन होता है और भविष्य में भी होता रहेगा।

§ 142. प्रमेय, अक्षिम, परिभाषाएं

जिस तर्कणा के सहारे कोई गुण स्थापित किया जाता, उसे **प्रमाण** कहते हैं। प्रमाणित किये जाने वाले गुण को **प्रमेय** कहते हैं। ज्यामितिक गुणों को प्रमाणित करने के लिए हम पहले से स्थापित गुणों का सहारा लेते हैं। इनमें से कई गुण स्वयं प्रमेय होते हैं; कुछ को ज्यामिति में मूल गुण मान लेते हैं और बिना किसी प्रमाण के अंगीकार कर लेते हैं। बिना प्रमाण के अपनाये गये गुण **अक्षिम** कहलाते हैं।

अक्षिम व्यावहारिक अनुभव द्वारा ज्ञात गुण हैं और अक्षिमों की सत्यता की जाँच, इनकी समग्रता में, अनुभव ही करता है। जाँच यह है कि ज्यामिति के सभी प्रमेय प्रयोग में सच्चे उतरते हैं; यदि अक्षिम झूठे होते तो ऐसा नहीं होता।

अकेला कोई भी ज्यामितिक गुण अक्षिम नहीं हो सकता, क्योंकि उसे हमेशा ही अन्य गुणों की सहायता से सिद्ध किया जा सकता है। यथा, ज्यामिति में समांतर रेखाओं के निम्न गुण को अक्सर अक्षिम मानते हैं : "एक बिंदु से एक सरल रेखा के समांतर दो भिन्न सरल रेखाएं नहीं खींची जा सकती हैं" (समांतर रेखाओं का अक्षिम)। इस अक्षिम की सहायता से (कई अन्य अक्षिमों के साथ) त्रिभुज का निम्न गुण प्रमाणित किया जाता है : "त्रिभुज के कोणों का योगफल 180° के बराबर है"। ऐसा भी किया जा सकता है कि इस गुण को समांतर रेखाओं का अक्षिम मान लिया जाये (और अन्य अक्षिम पहले की तरह ही रहने दिये जायें)। तब समांतर रेखाओं का उपरोक्त गुण प्रमेय हो जायेगा, उसे प्रमाणित किया जा सकेगा।

इस प्रकार, अक्षिमों का तंत्र कई भिन्न विधियों से चुना जा सकता है। सिर्फ एक बात की आवश्यकता होती है—अक्षिमों के रूप में अपनाये गये गुण बाकी सभी ज्यामितिक गुण निगमित करने के लिए पर्याप्त हों। ज्यामिति में अक्षिमों की संख्या यथासंभव कम करने की प्रवृत्ति रहती है। यह इसलिए कि अलग-अलग गुणों के पारस्परिक तार्किक संबंध स्पष्ट हो सकें।

अभिगृहीत अधिकांशतः सरलतम ज्यामितिक गुणों में से चुने जाते हैं, लेकिन कौन-सा गुण सरल है और कौन जटिल है, इस पर लोगों की रायें एक नहीं हो सकतीं।

ज्यामिति में कुछ अवधारणाएं आद्य मानी जाती हैं, जिनका अंतर्य सिर्फ अनुभव से स्पष्ट किया जा सकता है (जैसे *बिंदु* की अवधारणा)। इन आद्य अवधारणाओं के जरिये बाकी सभी अवधारणाओं की व्याख्या की जाती है; ऐसी व्याख्या को **परिभाषा** कहते हैं। हर ज्यामितिक परिभाषा या तो आद्य अवधारणाओं पर आधारित होती है, या पहले से परिभाषित अवधारणाओं पर।

एक ही ज्यामितिक अवधारणा को कई तरह से परिभाषित किया जा सकता है। उदाहरणार्थ वृत्त के व्यास को केंद्र से गुजरने वाला चापकर्ण भी कह सकते हैं और सबसे बड़ा चापकर्ण भी कह सकते हैं। इनमें से किसी गुण को परिभाषा मानकर दूसरे गुण को प्रमाणित किया जा सकता है। परिभाषा के लिए भी सरलतम गुण को ही चुनना बेहतर होता है, पर यहाँ भी सर्वसम्मति प्राप्त करना कठिन है।

§ 143. सरल रेखा, किरण, कर्त

सरल रेखा को मन ही मन दोनों ओर असीम बढ़ा सकते हैं। सरल रेखा का ऐसा खंड, जो एक ओर से सीमित हो और दूसरी ओर से असीम हो, **अर्ध रेखा** या **किरण** कहलाता है। दोनों ओर से सीमित रेखा-खंड को **कर्त** कहते हैं।

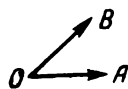
§ 144. कोण

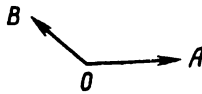
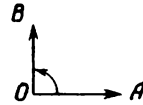
एक ही बिंदु O से निकलने वाली दो किरणों OA और OB से बनी आकृति को **कोण** कहते हैं (चित्र 59)। बिंदु O कोण का **शीर्ष** है और OA, OB उसकी भुजाएं।

B

O A

चित्र 59

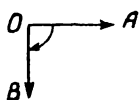
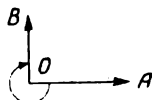
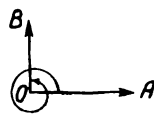
कोण की माप बिंदु O के गिर्द घूर्णन की राशि है, जो किरण OA को OB की स्थिति में ला देता है। कोण मापने की दो प्रणालियां अत्यधिक प्रचलित हैं : रेडियन और डिग्री। दोनों में अंतर इकाई के चयन का है। रेडियन में माप के बारे में देखें § 182।

डिग्री में कोणों की माप.* इस इकाई-प्रणाली में किरण द्वारा एक पूर्ण चक्कर लगाने से बने कोण का 1/360 अंश इकाई के रूप में प्रयुक्त होता है, जिसे **डिग्री** कहते हैं (और ° से द्योतित करते हैं)। इस प्रकार, एक पूर्ण चक्कर में (उदाहरणार्थ, घंटे की सूई द्वारा 0 से 12 बजे तक की गति में) 360° होती हैं। हर डिग्री 60 **मिनटों** में बँटी होती है (द्योतन $'$); मिनट 60 **सेकेंडों** में बंटा होता है (द्योतन $''$)। आलेख $42^\circ\ 33'\ 21''$ का अर्थ है 42 डिग्री, 33 मिनट, 21 सेकेंड।

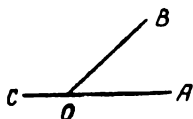
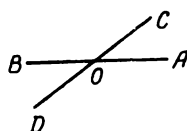
90° का कोण (अर्थात् 1/4 चक्कर) एक **समकोण** या **ऋजकोण** कहलाता है (चित्र 60)। इसे d से द्योतित करते हैं।

चित्र 60 चित्र 61 चित्र 62

90° से कम का कोण **न्यून कोण** कहलाता है (चित्र 59 में $\angle AOB$); 90° से अधिक का कोण **अधिक कोण** कहलाता है (चित्र 61)। समकोण बनाने वाली सरल रेखाएं **परस्पर लंब** कहलाती हैं। [परंपरागत नामों 'न्यून' और 'अधिक' की जगह हम लोग क्रमशः **'तीछ'** और **'कुंद'** का भी प्रयोग करेंगे।]

कोण का चिह्न. अक्सर यह दिखाना आवश्यक होता है कि किरण का घूर्णन किस दिशा में हो रहा है। सामान्यतया कोण की माप को **धनात्मक** मानते हैं— यदि घूर्णन घड़ी की सूई की दिशा में होता है। विपरीत दिशा में घूर्णन से **ऋणात्मक कोण** मिलता है। उदाहरणतया, यदि किरण OA चित्र 62 की

* डिग्री में कोण नापने की प्रणाली अति प्राचीन काल में ही अपना ली गयी थी (दे. § 22 प्रसंग 4)। प्रथम फ्रांसीसी बुर्जुवा क्रांति (1793) के समय फ्रांस में इकाइयों की दशमलव (मेट्रिक) प्रणाली के साथ-साथ कोण नापने की शतमलव प्रणाली भी अपनायी गयी; इसमें समकोण को 100 डिग्री में बाँटते हैं, डिग्री को 100 मिनट में, मिनट को 100 सेकेंड में। यह प्रणाली अब भी प्रयुक्त होती है, पर सर्वत्र नहीं। अधिकांशतः इसका प्रयोग ज्यादेजिक मापों में होता है। (ज्यादेजी पृथ्वी के रूप और आकार का अध्ययन करती है, नक्शे में उतारने के लिए धरातल की विभिन्न मापें लेती है; इसे भूगणित भी कहते हैं।)

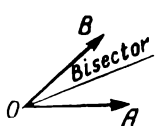
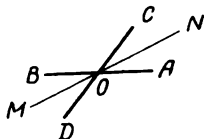
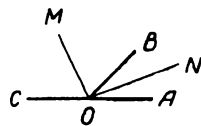
भाँति OB की जगह ले लेती है, तो $\angle AOB = +90°$ मिलता है। चित्र 63 में $\angle AOB = -90°$ है। चित्र 64 में $\angle AOB = -270°$ है। कोण बनाने वाली किरणों की समान पारस्परिक स्थिति कोणों की भिन्न मापों के

चित्र 63 चित्र 64 चित्र 65

अनुरूप हो सकती है; यह बात घूर्णन की प्रकृति पर निर्भर करती है। यथा, चित्र 65 में $\angle AOB$ को $+450°$ के बराबर मान सकते हैं। आरंभिक ज्यामिति में कोण की माप हमेशा धनात्मक मानी जाती है और वह लघुतम घूर्णन को व्यक्त करती है, अतः कोण की माप $180°$ से अधिक नहीं हो सकती।

चित्र 66 चित्र 67

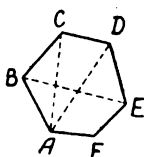
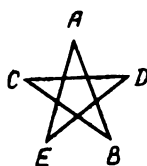
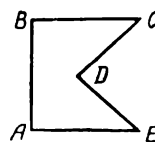
आसन्न कोण. (चित्र 66) कोण AOB और COB के जोड़े को कहते हैं, जिनके शीर्ष O और भुजा OB दोनों के लिए सामूहिक हैं; अन्य दो भुजाएं OA और OC एक-दूसरे के बढ़ाए हुए भाग हैं। *आसन्न कोणों का योगफल $180°$ $(2d)$ होता है।* चित्र 70 में $\angle AON$ और $\angle NOB$ परस्पर **संलग्न** कोण हैं, क्योंकि इनका शीर्ष और भुजा ON दोनों के लिए सामूहिक है (अन्य भुजाएं सामूहिक भुजा के अगल-बगल हैं)। आसन्न कोण संलग्न कोणों के ही एक विशिष्ट रूप हैं।

सम्मुख कोण. कोणों के ऐसे जोड़े को कहते हैं, जिनका शीर्ष सामूहिक होता है और प्रत्येक की भुजाओं को शीर्ष के पीछे बढ़ाने पर दूसरे की भुजाएं प्राप्त होती हैं। चित्र 67 में $\angle AOC$ और $\angle DOB$ सम्मुख कोण हैं, क्योंकि शीर्ष O सामूहिक है, AO और CO को पीछे बढ़ाने पर OD और OB, अर्थात् $\angle DOB$ की भुजाएं मिलती हैं (और विलोम)। $\angle AOD$ और $\angle COB$ भी सम्मुख कोण हैं। *सम्मुख कोण परस्पर बराबर होते हैं :* $\angle AOC = \angle BOD$; $\angle AOD = \angle COB$; ये कोण AB और CD द्वारा एक-दूसरे को काटने से बनते हैं।

अक्सर कहते हैं : "**दो सरल रेखाओं के बीच का कोण**"; तात्पर्य होता है उनसे बने हुए चार कोणों में से एक (बहुधा न्यून) कोण।

कोण का अर्धक उसे दो बराबर भागों में बाँटने वाली किरण को कहते हैं (चित्र 68)। *सम्मुख कोणों के अर्धक* (चित्र 69 में OM और ON) *एक*

चित्र 68 चित्र 69 चित्र 70

दूसरे के बढ़ाए हुए भाग होते हैं [अर्थात् एक ही सरल रेखा पर स्थित होते हैं]। *आसन्न कोणों के अर्धक परस्पर लंब होते हैं* (चित्र 70 में ON तथा OM)।

§ 145. बहुभुज

सरलरेखीय कर्तों की संवृत कतार से बनी समतली आकृति **बहुभुज** कहलाती है [संवृत कतार के सिरे एक बिंदु पर मिलते हैं]। चित्र 71 में एक बहुभुज $ABCDEF$ दिखाया गया है। बिंदु A, B, C, D, E, F बहुभुज के **शीर्ष** हैं; उन पर बने कोण (बहुभुज के **कोण**) $\angle A$, $\angle B$, $\angle C, \ldots, \angle F$ से द्योतित होते हैं। कर्त AC, AD, BE आदि **कर्ण हैं**; AB, BC, CD आदि बहुभुज की **भुजाएं** हैं। भुजाओं के योगफल $AB+BC+CD+\ldots+FA$ को **परिमिति** कहते हैं और p द्वारा द्योतित करते हैं। कभी-कभी $2p$ से भी द्योतित करते हैं (तब p=अर्ध परिमिति)।

चित्र 71 चित्र 72 चित्र 73

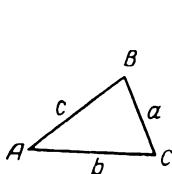
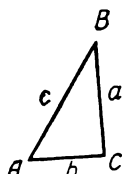
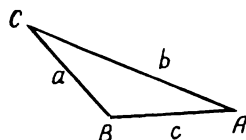
सरल ज्यामिति में सिर्फ सरल बहुभुजों पर ही विचार किया जाता है; ये ऐसे बहुभुज हैं, जिनकी भुजाएं एक-दूसरे को नहीं काटतीं। बहुभुज, जिसकी भुजाएं एक-दूसरे को काटती हैं, **ताराकार बहुभुज** कहलाता है। चित्र 72 में

एक ताराकार बहुभुज $ABCDE$ दिखाया गया है।

यदि बहुभुज के सभी कर्ण पूर्णतया उसके भीतर स्थित होते हैं, तो बहुभुज को **उत्तल** कहते हैं। चित्र 71 का षट्भुज उत्तल है; चित्र 73 का पंचभुज अनुत्तल (अवतल) है (इसके कुछ कर्ण पूर्णतया इसके भीतर नहीं हैं)।

किसी भी उत्तल बहुभुज के आंतरिक कोणों का योगफल $180°(n-2)$ *के बराबर होता है,* जहां n=बहुभुज में भुजाओं की संख्या।*

§ 146. त्रिभुज

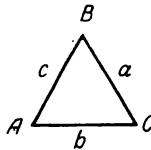
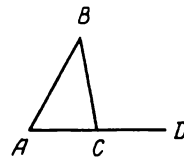
त्रिभुज तीन भुजाओं वाला बहुभुज है; इसे $\triangle$ (अनेक होने पर : $\triangle s$) से द्योतित करते हैं। त्रिभुज की भुजा सामने का शीर्ष द्योतित करने वाले वर्ण के छोटे रूप से द्योतित की जाती है। यदि तीनों कोण न्यून हैं, तो त्रिभुज **तीक्ष्णकोणिक** कहलाता है (चित्र 74)। यदि एक कोण ऋजु कोण है, तो **समकोण (ऋजकोणिक)** त्रिभुज मिलता है (चित्र 75); समकोण बनाने वाली भुजाओं

चित्र 74 चित्र 75 चित्र 76

को **संलंब** कहते हैं (ये c और b हैं); समकोण के सामने की भुजा **कर्ण** (a) कहलाती है। एक कुंद कोण वाला त्रिभुज **कुंदकोणिक** कहलाता है (चित्र 76 में कोण B कुंद है)।

समद्विबाहु त्रिभुज में दो भुजाएं बराबर होती हैं (चित्र 77 के $\triangle ABC$ में $b=c$ है)। जब तीनों भुजाएं बराबर होती हैं, तो **समबाहु** त्रिभुज प्राप्त

* ज्यामिति की पाठ्यपुस्तक में इसे अक्सर सिर्फ उत्तल बहुभुजों का गुण मानते हैं, पर यह गुण सभी सरल बहुभुजों में होता है। बात यह है कि अनुत्तल बहुभुज में एक या कई आंतरिक कोण $180°$ से बड़े होते हैं। यथा, चित्र 73 के अनुत्तल बहुभुज में दो समकोण हैं, दो कोण (अलग-अलग) $45°$ के बराबर हैं और एक कोण $270°$ के बराबर है। कोणों का योगफल $180°(5-2)=540°$ है।

होता है (चित्र 78 में $a=b=c$ है)। समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं में से प्रत्येक को **पार्श्व** कहते हैं, तीसरी भुजा को **आधार** कहते हैं।

त्रिभुज में तुल्य भुजाओं के सामने तुल्य कोण होते हैं (और विलोम)। विशेष स्थिति: समबाहु त्रिभुज तुल्यकोणिक त्रिभुज होता है (और विलोम)।

चित्र 77 चित्र 78 चित्र 79

त्रिभुज में बड़ी भुजा के सामने बड़ा कोण **और** *छोटी भुजा के सामने छोटा कोण होता है* (और विलोम)।

त्रिभुज के तीनों कोण मिलकर 180° *के बराबर होते हैं;* समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक **कोण** 60° होता है।

त्रिभुज की एक भुजा (चित्र 79 में AC) बढ़ाने पर **वाह्य कोण** $\angle BCD$ मिलता है। *वाह्य कोण अनासन्न आंतरिक कोणों के योगफल के बराबर होता है :* $\angle BCD = \angle A + \angle B$।

त्रिभुज की कोई भी भुजा बाकी दो के योग से छोटी होती है और बाकी दो के अंतर से बड़ी होती है : $a < b + c$; $a > b - c$.

त्रिभुज का क्षेत्रफल *आधे आधार में ऊँचाई से गुणा* के बराबर है (ऊँचाई के बारे में देखें § 148) : $S = \frac{1}{2} a h_a$.

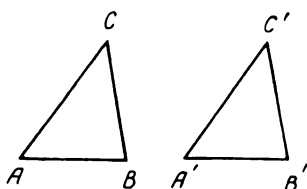
§ 147. त्रिभुजों की सर्वसमता के लक्षण

दो त्रिभुज सर्वसम (हर तरह से बराबर) हैं, यदि उनके निम्न तत्त्व आपस में बराबर हैं (चित्र 80) :

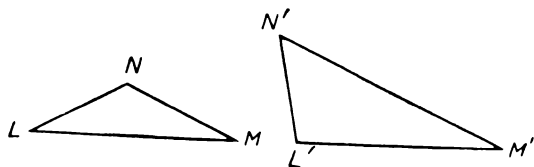
(1) दो भुजाएं और उनके बीच का कोण (जैसे $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A = \angle A'$);

(2) एक भुजा और उस पर बने कोण; उदाहरणार्थ, $AC = A'C'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle C = \angle C'$;

(2a) दो कोण और किसी एक के सामने की भुजा, जैसे $A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $AC = A'C'$;

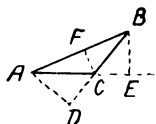
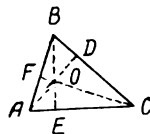
(3) तीनों भुजाएं : $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$;

चित्र 80

(4) दो भुजाएं और इनमें से बड़ी के सामने का कोण; उदाहरणार्थ, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $\angle A = \angle A'$ (चित्र 80 में AB और BC में से BC बड़ा है)।

यदि छोटी भुजा के सामने के कोण तुल्य हैं, तो त्रिभुज सर्वसम नहीं भी हो सकते हैं। उदाहरणार्थ, चित्र 81 के त्रिभुज LMN तथा $L'M'N'$ सर्वसम नहीं हैं, यद्यपि $LM = L'M'$, $LN = L'N'$ और $\angle M = \angle M'$ है।

चित्र 81

यहाँ कोण M व M' छोटी भुजा LN व $L'N'$ के सामने हैं।

§ 148. त्रिभुज में विशिष्ट रेखाएं और बिंदु

त्रिभुज के किसी शीर्ष से सामने की भुजा (या उसके बढ़ाये हुए भाग) पर लंब, त्रिभुज की **ऊँचाई** कहलाता है। जिस भुजा पर लंब डाला जाता है, उसे

चित्र 82

चित्र 83

त्रिभुज का आधार कहते हैं। चित्र 82 के $\triangle ABC$ में दो ऊँचाइयों (AD, BE) के पाद भुजाओं के बढ़े हुए भाग पर हैं। ये ऊँचाइयां त्रिभुज के बाहर हैं, तीसरी उँचाई (CF) त्रिभुज के भीतर है।

समकोण त्रिभुज की दो ऊँचाइयां उसके संलंब हैं ।

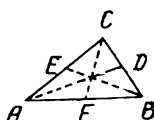
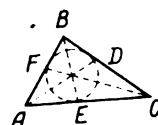
त्रिभुज की तीनों ऊँचाइयां एक-दूसरे को हमेशा एक बिंदु पर काटती हैं, जिसे **ऋजकेंद्र** कहते हैं । कुंदकोणिक त्रिभुज का ऋजकेंद्र त्रिभुज के बाहर होता है; समकोण त्रिभुज में वह समकोण के शीर्ष के साथ संपात करता है ।

भुजा a पर खींची गयी ऊँचाई h_a द्वारा द्योतित होती है । तीनों भुजाओं के जरिए इसे निम्न सूत्र द्वारा व्यक्त किया जाता है :

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a},$$

जहाँ

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

त्रिभुज की **मधिम** त्रिभुज के किसी शीर्ष से सामने की भुजा के मध्य बिंदु को मिलाने वाले कर्त को कहते हैं । *त्रिभुज के तीनों मधिम* (चित्र 84 में AD, BE, CF) *एक दूसरे को एक बिंदु पर* (और हमेशा ही त्रिभुज के भीतर) *काटते हैं । यह बिंदु हर मधिम को* 2 : 1 *के अनुपात में बांटता है* (शीर्ष की ओर से) ।

चित्र 84 चित्र 85

त्रिभुज के शीर्ष A और भुजा a के मध्य बिंदु को मिलाने वाला मधिम m_a द्वारा द्योतित होता है । त्रिभुज की भुजाओं के जरिए इसे निम्न विधि से व्यक्त करते हैं :

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

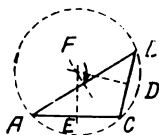
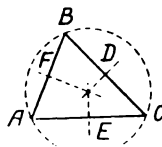
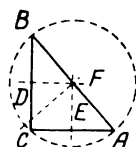
त्रिभुज के किसी कोण की अर्धक रेखा का उस कोण के शीर्ष और सामने की भुजा के साथ कटान-बिंदु तक का कर्त **अर्धक** कहलाता है । *त्रिभुज के तीनों अर्धक* (चित्र 85 में AD, BE, CF) *एक दूसरे को हमेशा एक बिंदु पर* (और हमेशा त्रिभुज के भीतर) *काटते हैं । यह त्रिभुज में अंतरित वृत्त का केंद्र होता है* (दे. § 158) । कोण A का अर्धक β_a से द्योतित करते हैं । त्रिभुज की भुजाओं से इसे निम्न विधि से व्यक्त करते हैं :

$$\beta_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp\ (p-a)},$$

जहाँ p =अर्धपरिमिति ।

अर्धक सामने की भुजा को उससे संलग्न भुजाओं के समानुपात में बाँटता है । चित्र 85 में $AE : EC = AB : BC$.

उदाहरण. $AB = 30$ cm, $BC = 40$ cm, $AC = 49$ cm है । AE और CE ज्ञात करें । $AC = 49$ cm को जिन दो भागों में बाँटना है, उनका अनुपात 30 : 40 या 3 : 4 है । x को पैमाने की इकाई मानकर कर्त $AE = 3x$ और $EC = 4x$ खींचते हैं । $AC = 3x + 4x = 7x$, $x = AC : 7 = 49 : 7 = 7$, जिससे $AE = 3x = 21$; $EC = 4x = 28$ ।

त्रिभुज में तीनों भुजाओं के मध्य बिंदुओं पर खींचे गए लंब एक दूसरे को एक बिंदु पर काटते हैं, जो त्रिभुज के परीत वृत्त का केंद्र होता है । (चित्र 86, 87, 88 में भुजाओं के मध्य बिंदु D, E, F हैं । कुंदकोणिक त्रिभुज में यह बिंदु त्रिभुज के बाहर होता है (चित्र 86), तीछकोणिक त्रिभुज में यह भीतर होता है (चित्र 87), समकोण त्रिभुज में यह कर्ण पर होता है (चित्र 88) ।

चित्र 86 चित्र 87 चित्र 88

समद्विबाहु त्रिभुज के आधार पर खींचे गये ऊँचाई, मधिम, अर्धक, और आधार* के मध्य बिंदु पर खींचा गया लंब—सभी संपात करते हैं । समबाहु त्रिभुज में यह बात किसी भी भुजा के साथ लागू होती है ।

ऋजकेंद्र, गुरुत्व केंद्र, परीत और अंतरित वृत्तों के केंद्र सिर्फ समबाहु त्रिभुज में संपात करते हैं ।

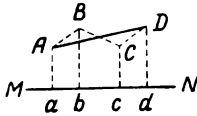
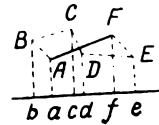
---

* समद्विबाहु त्रिभुज में आधार हमेशा उस भुजा को कहते हैं, जो अन्य दोनों के बराबर नहीं हो ।

§ 149. ऋजकोणिक प्रक्षेप. त्रिभुज की भुजाओं के बीच संबंध

सरल रेखा पर किसी बिंदु का **ऋजकोणिक प्रक्षेप** (या सिर्फ **प्रक्षेप**) बिंदु से उस सरल रेखा तक खींचें गये लंब का आधार-बिंदु कहलाता है। चित्र 89 में सरल रेखा MN पर बिंदु A, B, C, D के प्रक्षेप बिंदु a, b, c, d हैं।

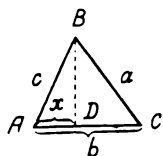
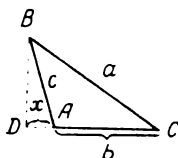
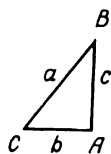
सरल रेखा MN पर कर्त AB का **प्रक्षेप** कर्त ab है, जो बिंदु A, B के प्रक्षेपों a, b से घिरा हुआ है। कर्त bc कर्त BC का प्रक्षेप है, आदि। द्योतन : $ab = \mathrm{pr}_{MN} AB$, या संक्षेप में $ab = \mathrm{pr} AB$।

टूटी रेखा की 'कड़ियों' के प्रक्षेपों का योग टूटी रेखा के सिरों को मिलाने वाले कर्त के प्रक्षेप के बराबर होता है। चित्र 89 में $\mathrm{pr}\ AD = \mathrm{pr}\ AB + \mathrm{pr}\ BC + \mathrm{pr}\ CD$ है। इस नियम को सार्व रूप देने के लिए *कर्त के प्रक्षेप को बीजगणितीय राशि मानना होगा;* कर्त AB के प्रक्षेप ab को **धनात्मक** मानते हैं, यदि बिंदु b बिंदु a से दायें हैं; यदि b बायें है (a से) तो प्रक्षेप **ऋणात्मक** माना जाता है। यथा, चित्र 90 में $\mathrm{pr}\ AB = ab$ ऋणात्मक है; $\mathrm{pr}\ BC = bc$, $\mathrm{pr}\ CD = cd$, $\mathrm{pr}\ DE = de$ धनात्मक हैं; $\mathrm{pr}\ EF = ef$ ऋणात्मक है, इसीलिए टूटी रेखा (या बहुकोणिक रेखा) $ABCDEF$ की

चित्र 89

चित्र 90

कड़ियों (या इसके खंडों) के प्रक्षेपों का बीजगणितीय योग कर्त bc, cd, de को जोड़कर उससे ab और ef का योगफल घटाने से प्राप्त होता है। प्राप्त राशि af के बराबर है, जो टूटी रेखा के सिरों को मिलाने वाले कर्त AF का प्रक्षेप है।

त्रिभुज की भुजा का वर्ग बराबर अन्य दो भुजाओं के वर्गों का योग घटाव इनमें से एक भुजा और इस पर दूसरी के प्रक्षेप के गुणनफल का दुगुना होता है (चित्र 91 और 92) :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \ \text{pr}_{AC}AB \qquad (1)$$

यदि x से प्रक्षेप की लंबाई (धन संख्या) द्योतित की जाये, तो चित्र 91 में (जहाँ $\text{pr}_{AC}AB = x$, क्योंकि $\angle A$ = तीछ्कोण) :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx, \qquad (2)$$

चित्र 91 चित्र 92 चित्र 93

और चित्र 92 में (जहाँ $\text{pr}_{AC}AB = -x$, क्योंकि $\angle A$ = कुंदकोण) :

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bx \qquad (3)$$

यदि कोण C ऋजु कोण है (चित्र 93), तो $\text{pr}_{AC}CB = 0$, और

$$c^2 = a^2 + b^2, \qquad (4)$$

अर्थात् कर्ण का वर्ग बराबर संलंबों के वर्गों का योग है (तथाकथित **पिथागोरस प्रमेय***) । पिथागोरस प्रमेय अनेकानेक व्यावहारिक व सैद्धांतिक समस्याओं के हल में प्रयुक्त होता है ।

सूत्र (1) को निम्न रूप में भी लिखा जाता है :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

(दे. § 201) ।

§ 150. समांतर रेखाएं

दो सरल रेखाएं AB और CD (चित्र 94) **समांतर** रेखाएं कहलाती हैं, यदि वे एक ही समतल पर स्थित हैं और उन्हें कितना भी क्यों न बढ़ाया

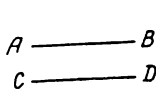
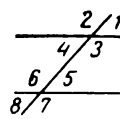
---

* इस प्रमेय की स्थापना का श्रेय ग्रीक दार्शनिक पिथागोरस (6-5 शती ई० पू०) को दिया जाता है, पर वास्तव में यह प्रमेय प्राचीन पूर्व के देशों में कोई 2000 वर्ष ई० पू० से ही ज्ञात था ।

भागे , वे एक-दूसरे को काटती नहीं है । प्रतीक: $AB \parallel CD$.

सरल रेखा AB के समांतर सभी रेखाएं आपस में भी समांतर हैं ।

यह माना जाता है कि दो समांतर रेखाएं शून्य के बराबर कोण बनाती हैं (प्रत्यक्ष अर्थ में यहां कोई कोण नहीं बनता) ।

यदि दो किरणें अलग-अलग समांतर रेखाओं पर स्थित हैं, तो उनके बीच का कोण शून्य माना जाता है, यदि उनकी दिशाएं समान हैं । यदि उनकी दिशाएं विपरीत हैं, तो उनके बीच का कोण 180° के बराबर माना जाता है ।

चित्र 94 चित्र 95 चित्र 96

किसी सरल रेखा MN के साथ लंब बनाने वाली सभी सरल रेखाएं (चित्र 95 में AB, CD, EF) आपस में समांतर होती हैं । विलोम, समांतर रेखाओं में से किसी एक पर लंब, सरल रेखा MN, बाकी सभी रेखाओं पर लंब होती है । दो समांतर रेखाओं में से एक के सभी लंब दूसरी पर भी लंब होते हैं । इन लंब रेखाओं के वे खंड, जो दोनों समांतर रेखाओं से घिरे होते हैं, आपस में बराबर होते हैं । इनकी लंबाई समांतर रेखाओं के बीच की दूरी कहलाती है ।

जब दो समांतर रेखाओं को कोई तीसरी रेखा काटती है, तो आठ कोण बनते हैं (चित्र 96); इनसे कई जोड़े बनते हैं, जिनके नाम निम्न हैं :

(1) **सानुरूप कोण** (1 व 5, 2 व 6, 3 व 7, 4 व 8); प्रत्येक जोड़े में बराबर मान वाले कोण हैं ($\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 8$);

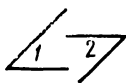
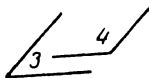
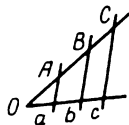
(2) **आंतरिक एकांतर कोण** (4 व 5, 3 व 6); प्रत्येक जोड़े में बराबर कोण हैं ।

(3) **बाह्य एकांतर कोण** (1 व 8, 2 व 7); प्रत्येक जोड़े में बराबर कोण हैं;

(4) **एकतरफी आंतरिक कोण** (3 व 5, 4 व 6); प्रत्येक जोड़े में स्थित कोणों का योगफल 180° के बराबर होता है ($\angle 3 + \angle 5 = 180^\circ$, ($\angle 4 + \angle 6 = 180^\circ$);

(5) **एकतरफी वाह्य कोण** (1 व 7, 2 व 8); प्रत्येक जोड़े में स्थित कोणों का योग $180°$ है

($\angle 1 + \angle 7 = 180°$, $\angle 2 + \angle 8 = 180°$) ।*

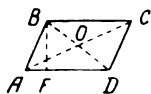
दो कोण, जिनकी भुजाएं अलग-अलग समांतर हैं, या तो बराबर होते हैं या मिलकर $180°$ बनाते हैं। उदाहरणतया, चित्र 97 में $\angle 1 = \angle 2$ है और चित्र 98 में $\angle 3 + \angle 4 = 180°$ है।

चित्र 97 चित्र 98 चित्र 99

दो कोण, जिनकी भुजाएं अलग-अलग परस्पर लंब हैं, ऊपर की तरह ही या तो बराबर होते हैं या मिल कर $180°$ बनाते हैं।

जब किसी कोण की भुजाओं को समांतर रेखाएं काटती हैं (चित्र 99), कोण की भुजाओं पर समानुपाती खंड बनते हैं :

$$\frac{OA}{Oa} = \frac{OB}{Ob} = \frac{OC}{Oc} = \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac} \text{ आदि ।}$$

§ 151. समांतर चतुर्भुज और त्रापेस

समांतर चतुर्भुज (चित्र 100 में $ABCD$) की आमने-सामने की भुजाएं आपस में समांतर होती हैं। इसमें आमने-सामने की भुजाएं परस्पर बराबर भी होती हैं : $AB = CD$, $AD = BC$ । आमने-सामने की भुजाओं में से किसी को भी **आधार** माना जा सकता है; इनके बीच की लांबिक दूरी **ऊँचाई** (BF) कहलाती है। समांतर चतुर्भुज के कर्ण कटान-बिंदु द्वारा एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं ($AO = OC$, $BO = OD$)। समांतर चतुर्भुज में आमने-सामने के कोण परस्पर बराबर होते हैं ($\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$)।

चित्र 100

* जब दो असमांतर रेखाओं को कोई तीसरी रेखा काटती है, तो इससे बनने वाले कोणों के नाम यही रहते हैं, पर कोणों के आपसी संबंध दूसरे होते हैं।

समांतर चतुर्भुज के कर्णों के वर्गों का योग उसकी चारों भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है :

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2=2(AB^2+BC^2)$$

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके आधार (a) और ऊँचाई (h_a) के गुणनफल के बराबर होता है :

$$S=ah_a$$

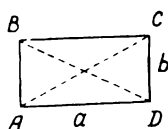
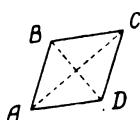
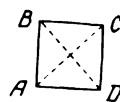
समांतर चतुर्भुज के लक्षण. चतुर्भुज $ABCD$ समांतर चतुर्भुज होता है, यदि निम्न में से कोई एक शर्त पूरी हो जाती है :

(1) सभी आमने-सामने की भुजाएं आपस में अलग-अलग बराबर हैं ($AB=CD,\ BC=DA$);

(2) दो आमने-सामने की भुजाएं बराबर और समांतर हैं ($AB=CD$; $AB \parallel CD$);

(3) कर्ण एक-दूसरे को आधा करते हैं;

(4) आमने-सामने के कोण अलग-अलग जोड़ियों में बराबर हैं ($\angle A=\angle C,\ \angle B=\angle D$)।

समांतर चतुर्भुज में यदि एक कोण समकोण है, तो उसमें सभी कोण समकोण हैं। इस तरह के समांतर चतुर्भुज को **आयत** कहते हैं (चित्र 101)।

चित्र 101

चित्र 102

चित्र 103

आयत का क्षेत्रफल उसकी लंबाई और चौड़ाई का गुणन होता है :

$$S=ab.$$

आयत के कर्ण बराबर होते हैं : $AC=BD$।

आयत में कर्ण पर वर्ग बराबर लंबाई पर वर्ग और चौड़ाई पर वर्ग का योगफल होता है : $AC^2=AD^2+DC^2$।

यदि समांतर चतुर्भुज में सभी भुजाएं बराबर होती हैं, तो इसे **रोंब** (समबाहु चतुर्भुज) कहते हैं (चित्र 102)।

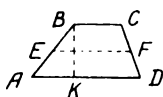
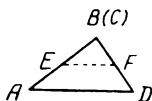
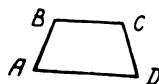
रोंब में कर्ण परस्पर लंब होते हैं ($AC \perp BD$) और रोंब के कोणों को समद्विभाजित करते हैं ($\angle DCA=\angle BCA$ आदि)।

रोंब का क्षेत्रफल कर्णों के गुणन का आधा होता है :

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \ (AC = d_1, \ BD = d_2).$$

वर्ग ऐसे समांतर चतुर्भुज को कहते हैं, जिसके कोण समकोण के बराबर होते हैं और जिसकी भुजाएं बराबर होती हैं (चित्र 103)। वर्ग आयत और साथ ही रोंब का एक विशिष्ट रूप है, इसलिए उसमें उपरोक्त सभी गुण उपस्थित होते हैं।

त्रापेस* ऐसे चतुर्भुज को कहते हैं, जिसकी दो (आमने-सामने की) भुजाएं समानांतर होती हैं ($BC \parallel AD$, चित्र 104)। समांतर चतुर्भुज को त्रापेस का विशिष्ट रूप कहते हैं।

त्रापेस की समांतर भुजाओं को उसका **आधार** कहते हैं, अन्य दो भुजाओं (AB, CD) को पार्श्व भुजाएं कहते हैं। आधारों के बीच की लांबिक दूरी को उसकी **ऊँचाई** (BK) कहते हैं। पार्श्व भुजाओं के मध्य बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा को त्रापेस की **मध्य रेखा** कहते हैं।

चित्र 104 चित्र 105 चित्र 106

त्रापेस की मध्य रेखा आधारों के योगफल की आधी होती है :

$$EF = \frac{1}{2} \ (AD + BC) \text{ ।}$$

त्रापेस की मध्य रेखा आधारों के समांतर होती है : $EF \parallel AD$।

त्रापेस का क्षेत्रफल मध्य रेखा और ऊँचाई के गुणनफल के बराबर होता है :

$$S = \frac{1}{2} \ (a + b) \ h \ (AD = a, \ BC = b, \ BK = h).$$

त्रिभुज को त्रापेस का सीमाप्राय (अवजात) रूप माना जा सकता है, जिसमें एक आधार क्रमशः छोटा होता हुआ बिंदु में परिणत हो जाता है (चित्र 105)। अवजात त्रापेस में उसके सभी गुण सुरक्षित बने रहते हैं। *त्रिभुज ABD की भुजाओं के मध्य बिंदुओं E, F को मिलाने वाली रेखा कर्त EF (त्रिभुज की मध्य रेखा), भुजा AD के समांतर है और AD का आधा है।*

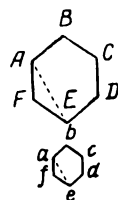
तुल्य पार्श्व भुजाओं वाले त्रापेस को (यदि वह समांतर चतुर्भुज नहीं है)

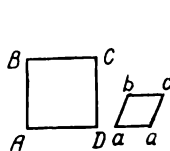
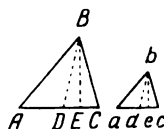
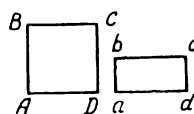
* [त्रापेस के लिए प्रचलित नाम समलंब चतुर्भुज है।]

समपार्श्वी कहते हैं। *समपार्श्वी त्रापेम में किसी भी आधार पर स्थित कोण परस्पर बराबर होते हैं* ($\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle C$)।

§ 152. समतली आकृतियों की समरूपता. त्रिभुजों की समरूपता के लक्षण

यदि किसी समतली आकृति की सभी रैखिक नापें समान अनुपात में बढ़ायी (या घटायी) जायें, तो आरंभिक आकृति और नयी प्राप्त आकृति को **समरूप आकृतियाँ** कहेंगे। जिस अनुपात में रैखिक मापों को बढ़ाया (या घटाया) जाता है उसे **समरूपता का अनुपात** कहते हैं। उदाहरण के लिए, बड़ा चित्र और उसका फोटोग्राफ समरूप आकृतियां हैं।

दो समरूप आकृतियों में सानुरूप कोण परस्पर बराबर होते हैं, अर्थात् यदि एक आकृति के बिंदुओं A, B, C, D के सानुरूप बिंदु (दूसरी आकृति में) a, b, c, d हैं, तो $\angle ABC = \angle abc$, $\angle BCD = \angle bcd$, आदि। दो बहुभुज $ABCDEF$ और $abcdef$ (चित्र 107) समरूप हैं, यदि उनके सानुरूप कोण बराबर हैं ($\angle A = \angle a$, $\angle B = \angle b, \ldots, \angle F = \angle f$) और उनकी सानुरूप भुजाएं समानुपाती हैं $\left(\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \ldots = \frac{FA}{fa}\right)$। ये दो शर्तें पूरी हो जाने पर बहुभुजों के अन्य सानुरूप भागों की भी समरूपता निश्चित हो जाती है; उदाहरणार्थ, कर्ण AE और ae के बीच वही अनुपात है, जो भुजाओं के बीच है : $\frac{AE}{ae} = \frac{AB}{ab}$।

चित्र 107

बहुभुजों की समरूपता के लिए सिर्फ भुजाओं की समानुपातिकता पर्याप्त नहीं है।

चित्र 108 चित्र 109 चित्र 110

उदाहरणार्थ, चित्र 108 में चतुर्भुज $ABCD$ (एक वर्ग) की भुजाएं चतुर्भुज $abcd$ (एक रोंब) की भुजाओं के साथ समानुपाती हैं; वर्ग की हर भुजा रोंब

की भुजा से दुगुनी अधिक है। पर वर्ग के कर्ण और रोंब के कर्ण समानुपाती नहीं हो सकते (वर्ग के कर्ण बराबर होते हैं और रोंब में एक कर्ण दूसरे से बड़ा होता है)। दोनों आकृतियां समरूप नहीं हैं, क्योंकि रोंब $abcd$ और वर्ग $ABCD$ के सानुरूप कोण समान नहीं हैं।

त्रिभुजों की समरूपता के लिए उनकी भुजाओं की समानुपातिकता पर्याप्त है : *दो त्रिभुज समरूप होते हैं, यदि उनकी भुजाएं समानुपाती हैं।* यथा, यदि त्रिभुज ABC (चित्र 109) की भुजाएं त्रिभुज abc की भुजाओं से दुगुनी लंबी हैं, तो अर्धक BD भी अर्धक bd से दुगुनी है. ऊँचाई BE ऊँचाई be से दुगुनी है, आदि; उनके सानुरूप कोण भी बराबर हैं ($\angle A = \angle a, \angle B = \angle b, \angle C = \angle c$)।

यदि दो त्रिभुजों के सानुरूप कोण बराबर हैं, तो त्रिभुज समरूप हैं (यदि दो कोण बराबर हैं. तो यही काफी है, क्योंकि त्रिभुज के तीनों कोण मिलकर हमेशा 180° के बराबर होते हैं)। लेकिन समरूपता का यह लक्षण हर बहुभुज के लिए सही नहीं है। उदाहरणार्थ, वर्ग $ABCD$ और आयत $abcd$ (चित्र 110) के सानुरूप कोण बराबर हैं, पर दोनों आकृतियां समरूप नहीं हैं।

त्रिभुज उस स्थिति में भी समरूप होते हैं, जब उनकी दो सानुरूप भुजाएं समानुपाती होती हैं और उनके बीच के कोण बराबर होते हैं (अर्थात् जब $\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}$ और $\angle B = \angle b$; चित्र 109 में)।

समकोण त्रिभुज समरूप होते हैं, यदि एक का कर्ण और संलंब दूसरे के कर्ण और संलंब के साथ समानुपाती होते हैं।

कोई भी दो वृत्त सदा समरूप होते हैं (उनमें से एक वृत्त दूसरे का वर्धित या लघुकृत रूप होता है)।

समरूप आकृतियों (विशेषकर बहुभुजों) *के क्षेत्रफल उनके सानुरूप कर्णों* (उदाहरणार्थ, भुजाओं) *के वर्ग के साथ समानुपाती होते हैं।* विशेष उदाहरण : *वृत्तों के क्षेत्रफल उनकी त्रिज्याओं या व्यासों के वर्ग के साथ समानुपाती होते हैं।* अतः दो वृत्तों के क्षेत्रफल के व्यतिमान को उनके व्यासों के व्यतिमान के बराबर मानना बहुत बड़ी गलती है। पर यह गलती लोग अक्सर किया करते हैं।

उदाहरण 1. 20 cm व्यास वाली धातु की एक चकती का भार 2.4 kg है। इसमें काटकर निकाली गयी 10 cm व्यास वाली चकती का भार कितना होगा ?

इस प्रश्न को हल करने में यदि आप निम्न विचार-क्रम का अनुसरण करते हैं, तो यह गलत होगा : छोटी का व्यास दुगुना कम है, बनिस्बत कि बड़ी के, इसलिए छोटी चकती का भार दुगुना कम होगा, अर्थात् 1.2 kg होगा।

सही हल निम्न है : चूंकि चकती का द्रव्य और उसकी मोटाई पहले जैसी ही है, इसलिए चकतियों के भार उनके क्षेत्रफलों के अनुपात में हैं और छोटी व बड़ी चकतियों के क्षेत्रफलों का अनुपात $\frac{10^2}{20^2}=\frac{1}{4}$ है। अतः छोटी चकती का भार $2.4\cdot\frac{1}{4}=0.6$ kg है।

उदाहरण 2. हालैंड की जनसंख्या 8.2 मिलियन है और स्विटजरलैंड की 4.1 मिलियन है। मान लें कि स्विटजरलैंड की जनसंख्या को आरेख में 10 cm भुजा वाले वर्ग द्वारा द्योतित किया जा रहा है। हालैंड की जनसंख्या को द्योतित करने वाले वर्ग की भुजा क्या होगी?

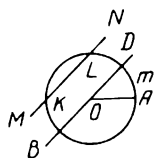
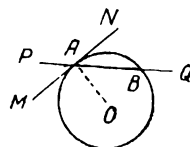
इष्ट भुजा को a से द्योतित करते हैं :

$$\frac{a^2}{10^2}=\frac{8.2}{4.1}=2\ ;\ \frac{a}{10}=\sqrt{2}\approx 1.4\ ;\ a\approx 14 \text{ cm}$$

§ 153. बिंदुओं का ज्यामितिक स्थान. वृत्त और परिधि

किसी प्रत्त गुण वाले बिंदुओं का **ज्यामितिक स्थान** उन सभी बिंदुओं की संचि को कहते हैं, जो प्रत्त शर्तों को संतुष्ट करते हैं।

परिधि *समतल के उन बिंदुओं का ज्यामितिक स्थान है, जो उसके किसी एक बिंदु (केंद्र) से समान दूरी पर स्थित होते हैं।*

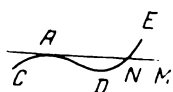
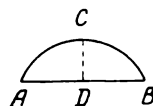
केंद्र को परिधि के बिंदुओं से मिलाने वाले तुल्य कर्तों को **त्रिज्याएं** कहते हैं (इन्हें r या R से द्योतित करते हैं)। परिधि के किसी खंड (जैसे चित्र 111

चित्र 111   चित्र 112

में AmD) को **चाप** कहते हैं; इसे $\overset{\frown}{AD}$ से भी द्योतित करते हैं। परिधि के दो बिंदुओं से गुजरने वाली रेखा MN को **छेदक** कहते हैं और उसके कर्त KL को

चापकर्ण कहते हैं। छेदक रेखा जैसे-जैसे केंद्र के निकट आती है, चापकर्ण की लंबाई बढ़ती जाती है। केंद्र O से गुजरने वाला चापकर्ण **व्यास** कहलाता है (इसे d या D से द्योतित करते हैं)। व्यास दो त्रिज्याओं के बराबर होता है ($d=2r$)।

वृत्त परिधि से घिरा हुआ समतल क्षेत्र है [अधिकांशत: 'परिधि' की जगह भी 'वृत्त' शब्द का ही प्रयोग करते हैं]।

स्पर्शक रेखा. मान लें कि छेदक रेखा PQ (चित्र 112) परिधि के बिंदु A तथा B से गुजरती है। यह भी मान लें कि बिंदु B परिधि पर A की ओर भ्रमण कर रहा है। इससे छेदक रेखा PQ बिंदु A के गिर्द घूर्णन करती हुई अपनी स्थिति बदलने लगेगी। जैसे-जैसे बिंदु B बिंदु A के निकट आयेगा, छेदक रेखा एक चरम स्थिति MN की ओर प्रवृत्त होगी। सरल रेखा MN को बिंदु A पर परिधि (या वृत्त) की **स्पर्शक रेखा** कहते हैं। स्पर्शक रेखा और परिधि के हिस्से में सिर्फ एक बिंदु सामूहिक होता है।* स्पर्शक रेखा को अवजात छेदक रेखा कह सकते हैं।

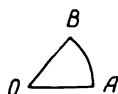
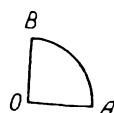
वृत्त की स्पर्शक (रेखा) स्पर्श-बिंदु A से खींची गई त्रिज्या OA के साथ लंब होती है।

चित्र 113

चित्र 114

वृत्त के बाहर स्थित बिंदु से वृत्त की दो स्पर्शक रेखाएं खींची जा सकती हैं; (उनकी लंबाइयां समान होंगी) (दे. पृष्ठ 323 पर चित्र 120)।

चाप ACB तथा उसके चापकर्ण से घिरा हुआ वृत्त का टुकड़ा **वृत्तखंड** कहलाता है (चित्र 114)।

---

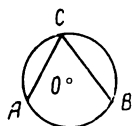
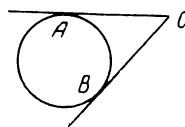
* इस गुण को अक्सर वृत्त (परिधि) की स्पर्शी रेखा की परिभाषा मानते हैं; पर अन्य प्रकार की रेखाओं के लिए यह परिभाषा सही नही उतरती। उदाहरण के लिए, चित्र 113 में MN वक्र रेखा $CADE$ के बिंदु A पर स्पर्शक रेखा है। पर MN वक्र $CADE$ के साथ बिंदु A के अतिरिक्त एक और सामूहिक बिंदु N भी रखती है। स्पर्शक रेखा की उपरोक्त परिभाषा—छेदक की चरम स्थिति—किसी भी रेखा के लिए सही है।

चापकर्ण AB के मध्य से चाप AB के कटान-बिंदु तक खींचा गया लंब वृत्तखंड का **तीर** कहलाता है। तीर DC (चित्र 114) की लंबाई वृत्तखंड की **ऊँचाई** कहलाती है।

चित्र 115 चित्र 116 चित्र 117

किसी चाप और उसके सिरों से खींची गयी त्रिज्याओं से घिरा हुआ वृत्त का भाग **वृत्तांश** कहलाता है (चित्र 115, 116)। परस्पर 90° के कोण पर स्थित त्रिज्याओं से बना हुआ वृत्तांश एक **चतुर्थांश** कहलाता है (चित्र 117)।

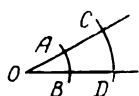
§ 154. वृत्त में कोण. परिधि और चाप की लंबाई

दो त्रिज्याओं से बने कोण को **केंद्रीय कोण** या केंद्रस्थ कोण कहते हैं (चित्र 118 में $\angle AOB$)।

अंतरित कोण परिधि के किसी एक बिंदु से निकले दो चापकर्णों से बना कोण है (चित्र 119 में चापकर्ण CA और CB से बना हुआ कोण ACB)।

परांत कोण एक ही बिंदु से खींची गयी दो स्पर्शक रेखाओं के बीच का कोण है (चित्र 120 में कोण ACB)।

चित्र 118 चित्र 119 चित्र 120

त्रिज्या के सिरे द्वारा निरूपित **चाप की लंबाई** तदनुरूप केंद्रीय कोण के साथ समानुपाती होती है; इसलिए दी हुई परिधि के चापों को (कोणों की तरह ही) डिग्रियों में नाप सकते हैं (दे. § 144)। 1° का चाप परिधि का $\frac{1}{360}$ वां भाग माना जाता है (यह ऐसा चाप है, जो 1° का केंद्रीय कोण बनाता है)।

पूरी परिधि में 360° है और आधी परिधि में 180° ।

एक अक्सर दुहराई जाने वाली गलती से बचने के लिए यह स्पष्ट कर लेना चाहिए कि *केंद्रीय कोण का मान त्रिज्या की लंबाई पर बिल्कुल ही निर्भर नहीं करता, लेकिन दो वृत्तों के सानुरूप चाप अपनी त्रिज्याओं के अनुपात में होते हैं* । यथा, चित्र 121 में केंद्रीय कोण का मान ज्यों का त्यों रहता है, चाहे उसे त्रिज्या CO और DO से बनाया जाये या आधी कम त्रिज्या AO और BO से । पर चाप AB और CD लंबाई में समान नहीं हैं; चाप AB छोटा है और चाप CD बड़ा है, यद्यपि डिग्रियों की संख्या दोनों में बराबर है ।

चित्र 121

सामान्य तौर पर चाप की लंबाई निम्न के साथ समानुपाती होती है : (1) उसकी त्रिज्या, और (2) तदनुरूप केंद्रीय कोण के मान के साथ ।

परिधि की लंबाई p व्यास की लंबाई से लगभग $3\frac{1}{7}$ गुनी अधिक होती है : $p = 3\frac{1}{7}d$ । यदि अन्य शब्दों में कहें, तो परिधि और व्यास का व्यतिमान लगभग $3\frac{1}{7}$ है :

$$\frac{p}{d} \approx 3\frac{1}{7}.$$

$\frac{p}{d}$ के शुद्ध मान को ग्रीक वर्ण π (पाइ) से द्योतित करते हैं :

$$\frac{p}{d} = \pi. \qquad (1)$$

$3\frac{1}{7}$ संख्या π का सन्निकृत (उससे बड़ा) मान है । π एक अव्यतिमानी संख्या है (दे. § 92), अर्थात् उसे भिन्न के रूप में शुद्ध-शुद्ध नहीं लिखा जा सकता । पाँच दशमलव अंकों की शुद्धता से इसका मान 3.14159 है । व्यवहार में इसका सन्निकृत (इससे छोटा) मान $\pi = 3.14$ लेना पर्याप्त होता है, यह कुछ कम शुद्ध है बनिस्बत कि $\pi \approx 3\frac{1}{7}$ ।

सूत्र (1) से

$$p = \pi d \qquad (2)$$

या

$$p = 2\pi r \quad (\pi \approx 3.14) \qquad (3)$$

1° में चाप की लंबाई

$$p_{1^\circ} = \frac{2\pi r}{360} = \frac{\pi r}{180}. \qquad (4)$$

n° में चाप की लंबाई

$$p_{n^\circ} = \frac{\pi r n}{180}. \qquad (5)$$

सूत्र (2) से (5) तक का व्यावहारिक तथा सैद्धांतिक महत्त्व बहुत ज्यादा है।

उदाहरण 1. 2.4 m लंबी लोहे की छड़ से एक छल्ला बनाना है; सिरों की ढलैया में 0.2 m खर्च हो जाता है। छल्ले की त्रिज्या बतायें।

परिधि की लंबाई $p = 2.4 - 0.2 = 2.2$ m है। सूत्र (3) से

$$r = \frac{p}{2\pi} \approx \frac{2.2}{6.3} \approx 0.35 \text{ m}.$$

उदाहरण 2. इंजन के चक्के का व्यास 1.5 m है। इंजन का वेग 30 km/h होने पर चक्का एक मिनट में कितने चक्कर लगायेगा ?

1 मिनट में चक्का $30 : 60 = \frac{1}{2}$ km अर्थात् 500 m दूरी तय करता है। एक चक्कर में वह अपनी परिधि p के बराबर पथ तय करता है; $p = \pi d \approx 3.14 \cdot 1.5 \approx 4.71$ m। चक्करों की इष्ट संख्या होगी $500 : 4.71 \approx 106$।

उदाहरण 3. रेलवे लाइन पर 800 m त्रिज्या वाला एक मोड़ है; इस पर पथ की लंबाई 60 m है। इस मोड़ के चाप में कितनी डिग्रियां होंगी ?

सूत्र (5) से :

$$n = \frac{180p}{\pi r} \approx \frac{180 \cdot 60}{3.14 \cdot 800} \approx 4^\circ 18' \text{ (सन्निकृत परिणाम)}।$$

वृत्त का क्षेत्रफल अर्ध परिधि गुणा त्रिज्या है :

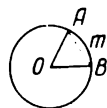
$$S = \tfrac{1}{2} pr, \text{ या } S = \pi r^2.$$

वृत्तांश का क्षेत्रफल S_{sect} (sector = वृत्तांश) तदनुरूप चाप p_{sect} के आधा और त्रिज्या r का गुणनफल है :

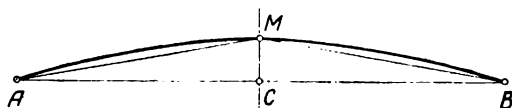
$$S_{sect} = \tfrac{1}{2} p_{sect}\, r.$$

चित्र 122

n° में निहित चाप वाले वृत्तांश का क्षेत्रफल

$$S_{n^\circ} = \frac{\pi r^2 n}{360}.$$

वृत्तखंड का क्षेत्रफल वृत्तांश $AOBm$ और त्रिभुज AOB के क्षेत्रफलों के अंतर के रूप में ज्ञात किया जाता है (चित्र 122)।

§ 154a. चाप की लंबाई के लिए ह्यूजेंस का सूत्र

व्यवहार में अक्सर ऐसी स्थिति आती है, जब किसी आरेख में दिये गये चाप या प्रकृति में पाये जाने वाले किसी चाप की लंबाई निकालनी पड़ती है

चित्र 122a

और यह अज्ञात रहता है कि विचाराधीन चाप वृत्त का कौन-सा हिस्सा है या उसकी त्रिज्या कितनी है। इन स्थितियों में निम्न विधि अपनाते हैं :

चाप $\overset{\frown}{AB}$ (चित्र 122a) में उसके मध्य बिंदु M पर निशान लगा देते हैं (यह चापकर्ण AB के मध्य बिंदु C से खींचे गये लंब CM पर है)। फिर चापकर्ण AB और आधे चाप का चापकर्ण AM नापते हैं। चाप $\overset{\frown}{AB}$ की लंबाई p ह्यूजेंस* के सूत्र से (लगभग रूप में) व्यक्त होती है :

$$p \approx 2l + \frac{l}{3}(2l - L),$$

जहाँ $l = AM$ और $L = AB$.

यदि $\overset{\frown}{AB}$ में 60° होते हैं, तो इस सूत्र से करीब 0.5% सापेक्षिक त्रुटि होती है। चाप का कोणीय मान घटने पर त्रुटि और भी तेजी से कम होती है। यथा, 45° वाले चाप के लिए सापेक्षिक त्रुटि करीब 0.02% होती है।

उदाहरण. चित्र 122a में चाप $\overset{\frown}{AB}$ दिखाया गया है, जिसके लिए

$$l = AM = 34.0 \text{ mm}, \; L = AB = 67.1 \text{ mm}.$$

ह्यूजेंस के सूत्र से :

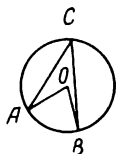
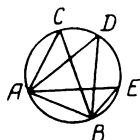
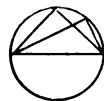
$$p = 2 \cdot 34.0 + \tfrac{1}{3}(2 \cdot 34.0 - 67.1) \approx 68.3 \text{ mm}.$$

यहाँ सभी अंक विश्वस्त हैं, क्योंकि चाप $\overset{\frown}{AB}$ में (अंदाजन) 45° हैं, अतः त्रुटि 0.02% अर्थात् 0.05 mm से कम ही है।

---

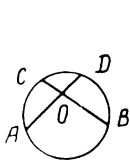
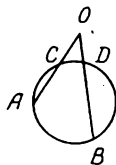
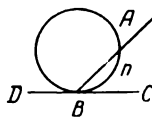
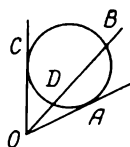
* क्रिश्चियान ह्यूजेंस (1629-1695) हालैंड के वैज्ञानिक थे, जो यांत्रिकी और प्रकाशिकी पर अपनी कृतियों के लिए प्रसिद्ध हैं।

§ 155. वृत्त में कोणों की माप

अंतरित कोण उससे प्रतिच्छेदित चाप द्वारा बने केंद्रीय कोण का आधा होता है। चित्र 123 में $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$ है। इसीलिए एक ही चाप पर टिके

चित्र 123

चित्र 124

चित्र 125

सभी अंतरित कोण परस्पर बराबर होते हैं। चित्र 124 में $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB$। अन्यतः, चापकर्ण AB उस पर टिके चाप के किसी भी बिंदु से सदा एक ही कोण पर दीखता है। कहते हैं कि चाप $ACDEB$ में एक नियत मान वाला कोण ही अंतरित होता है। उदाहरणार्थ, अर्ध वृत्त में हमेशा $90°$ का कोण अंतरित होता है (चित्र 125)।

चूंकि केंद्रीय कोण में उतनी ही डिग्रियां (कोणिक) होती हैं जितनी उसके चाप में (चापीय) डिग्रियां होती हैं, इसलिए अंतरित कोण (चित्र 123 में $\angle ACB$) उससे प्रतिच्छेदित चाप AB के आधे के बराबर होता है।

दो चापकर्णों के कटान में बना कोण (जैसे चित्र 126 में $\angle AOB$) *उसकी (दोनों तरफ बढ़ी) भुजाओं के बीच स्थित चापों के अर्ध योगफल* $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AB})$ *जितना नाप रखता है।* अंतरित कोण को ऐसे कोण का विशिष्ट रूप माना जा सकता है, जिसमें एक चाप शून्य होता है।

चित्र 126

चित्र 127

चित्र 128

चित्र 129

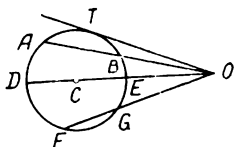
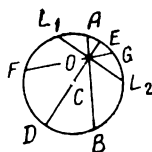
दो छेदक रेखाओं के बीच का कोण (चित्र 127 में AOB) *उसकी भुजाओं के बीच स्थित चापों के अर्ध अंतर* $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD})$ *द्वारा नपता है।* अंतरित कोण दो छेदकों से बने कोण का विशिष्ट रूप है ($\overset{\frown}{CD} = 0$)।

चूँकि स्पर्शक रेखा को छेदक का अवजनन मान सकते हैं (§ 153), इसलिए *स्पर्शक और चापकर्ण रेखाओं के बीच का कोण* (जैसे चित्र 128 में $\angle ABC$) उसके बीच स्थित चाप के आधे भाग ($\frac{1}{2}\overset{\frown}{AnB}$) द्वारा नपता है; *स्पर्शक और छेदक से बना कोण* (चित्र 129 में $\angle BOA$) उनके बीच स्थित चापों के अर्ध अंतर $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BA} - \overset{\frown}{DA})$ से नपता है; *परीत कोण* (चित्र 129 में $\angle AOC$) उसकी भुजाओं के बीच स्थित चापों के अर्ध अंतर $\frac{1}{2}(\overset{\frown}{CBA} - \overset{\frown}{CDA})$ से नपता है।

§ 156. बिंदु का घात

त्रिज्या r वाली परिधि के सापेक्ष *बिंदु O का घात* राशि $d^2 - r^2$ को कहते हैं, जहाँ d उस बिंदु से केंद्र C तक की दूरी OC है। बाह्य बिंदु का घात धनात्मक होता है और आंतरिक का ऋणात्मक।

बिंदु के घात के परम मान $|d^2 - r^2|$ को p^2 द्वारा द्योतित करते हैं, अत: बाह्य बिंदु के लिए $p^2 = d^2 - r^2$ है और आंतरिक बिंदु के लिए $p^2 = r^2 - d^2$ है। राशियां p^2 और p (अंतिम धनात्मक मानी जाती है) बहुत महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाती हैं।

मान लें कि बिंदु O से (चित्र 130 और 131 में) सभी संभव छेदक रेखाएं (AB, DE, FG आदि) खींची गयी हैं। बिंदु O से परिधि के कटान-बिंदुओं

चित्र 130

चित्र 131

तक के कर्तों का गुणनफल ($OA \cdot OB$, या $OD \cdot OE$, या $OF \cdot OG$ आदि) एक स्थिर राशि है और यह p^2 के बराबर होता है। जब छेदक रेखा केंद्र से गुजरती है, तो यह स्थिति और भी महत्त्वपूर्ण होती है (दे. नीचे के उदाहरण)।

यदि बिंदु O परिधि के बाहर है (चित्र 130), तो स्पर्शक रेखा को छेदक का अवजनन मानने पर $OT^2 = p^2$ मिलता है, अर्थात् *स्थिर राशि "बिंदु का घात" स्पर्शक की लंबाई का वर्ग है*। इस प्रकार, राशि p स्पर्शक OT के बराबर है।

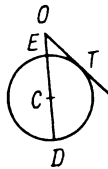
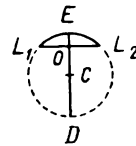
यदि बिंदु O आंतरिक है (चित्र 131), तो बिंदु O से व्यास DE के लंब स्थित चापकर्ण L_1L_2 में $OL_1 = OL_2$ होगा, अतः $OL_1^2 = p^2$, अर्थात् बिंदु का घात इस बिंदु से गुजरने वाले लघुतम अर्ध चापकर्ण का **वर्ग है**। इस प्रकार, राशि p अर्ध चापकर्ण OL_1 के बराबर है।

उदाहरण 1. समुद्र के ऊपर 2 km की ऊंचाई पर उड़ते हवाई जहाज से कितनी दूर तक नीचे देख सकते हैं? (पृथ्वी का व्यास 12700 km है)।

चित्र 132 में पृथ्वी के उदग्र-काट का आरेख दिखाया गया है।

O हवाई जहाज है, $OE = 2$ km, $ED \approx 12700$ km। हवाई जहाज से पृथ्वी का दूरतम दृश्य-बिंदु T है; OT वृत्त ETD की स्पर्शक रेखा है अतः $OT = p$। पर दूसरी ओर से, $p^2 = OE \cdot OD \approx 2 \cdot 12700$ (हम $OD \approx 12700$ km ही ले रहे हैं, इससे जो त्रुटि होगी, वह मान 12700 km की चरम त्रुटि से बहुत कम है)। अतः

$$p = \sqrt{25400} \approx 160 \text{ km}$$

उदाहरण 2. गुंबद का विस्तार 6 m है; तीर 0.4 m है। गुंबद के चाप की त्रिज्या बतायें।

चित्र 132

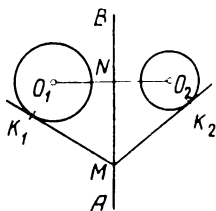
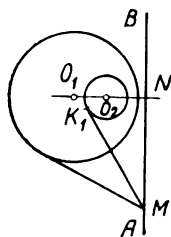
चित्र 133

चित्र 133 में : $L_1L_2 = 6$ m, $EO = 0.4$ m है। बिंदु O का घात $p^2 = OL_1^2 = \left(\frac{L_1L_2}{2}\right)^2 = 9$ है। पर दूसरी ओर से, $p^2 = EO \cdot OD$; चूंकि OD की तुलना में EO बहुत छोटा है, इसलिए $OD = 2r$ मान सकते हैं, जिससे $9 \approx 0.4 \cdot 2r$ मिलता है और

$$r = \frac{9}{0.8} \approx 11\frac{1}{4} \text{ m}.$$

§ 157. मौलिक अक्ष. मौलिक केंद्र

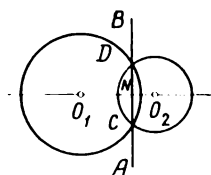
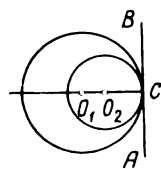
दो परिधियों (केंद्र O_1, O_2) के सापेक्ष समान घात ($MK_1 = MK_2$)

रखने वाले बिंदुओं M का ज्यामितिक स्थान उनके केंद्रों को मिलाने वाली रेखा पर लंब रेखा AB है (चित्र 134, 135, 136, 137, 138)।

चित्र 134 चित्र 135

इस रेखा को वृत O_1 व O_2 का **मौलिक अक्ष** कहते हैं। केंद्र O_1 व O_2 से मौलिक अक्ष की दूरियां d_1 व d_2 निम्न सूत्रों से कलित हो सकती हैं :

$$d_1 = O_1N = \frac{d}{2} + \frac{r_1^2 - r_2^2}{2d},$$

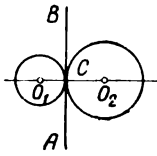
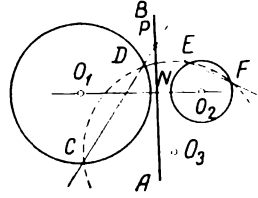
$$d_2 = NO_2 = \frac{d}{2} + \frac{r_2^2 - r_1^2}{2d}.$$

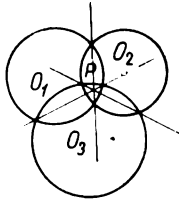
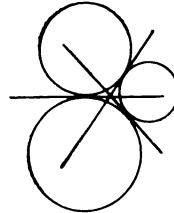
जहां d केंद्रों की आपसी दूरी O_1O_2 है, r_1 व r_2 वृत्तों की त्रिज्याएं हैं।

मौलिक अक्ष को बनावट की सहायता से ढूँढ़ना अधिक सरल है। यदि वृत्त एक-दूसरे को बिंदु C और D पर काटते हैं, तो बिंदु C और D के घात दोनों

चित्र 136 चित्र 137

वृत्तों के सापेक्ष तुल्य (शून्य) होंगे। इसका मतलब हुआ कि मौलिक अक्ष C और D से गुजरता है (चित्र 136)।

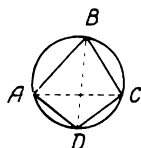
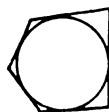
यदि वृत्त एक-दूसरे को बिंदु C पर स्पर्श करते हैं (चित्र 137, 138), तो उनका मौलिक अक्ष उनकी सामूहिक स्पर्शक रेखा होती है।

यदि वृत्त एक-दूसरे को स्पर्श नहीं करते या काटते नहीं हैं, तो मौलिक अक्ष निम्न विधि से ज्ञात किया जाता है (चित्र 139)। किसी बिंदु O_3 को केंद्र मानकर मनचाही त्रिज्या का वृत्त खींचते हैं, जो वृत्त O_1 की परिधि को C तथा D पर और वृत्त O_2 की परिधि को बिंदु E तथा F पर काटती है। रेखा CD वृत्त O_1 तथा O_3 का मौलिक अक्ष है, रेखा EF वृत्त O_2 तथा O_3 का

चित्र 138 चित्र 139

मौलिक अक्ष है; इन रेखाओं के कटान-बिंदु P का घात तीन वृत्तों के सापेक्ष एक जैसा होगा, अतः बिंदु P वृत्त O_1 तथा O_2 के मौलिक अक्ष पर भी स्थित है। इसी तरह का एक और बिंदु प्राप्त कर लेने पर वृत्त O_1 तथा O_2 का मौलिक अक्ष मिल जायेगा या बिंदु P से O_1O_2 पर लंब PN खींचते हैं; रेखा PN इष्ट मौलिक अक्ष होगी।

चित्र 140 चित्र 141

इस विचार-क्रम का अनुसरण करने से स्पष्ट हो जाता है कि किन्हीं तीन वृत्तों O_1, O_2, O_3 में से तीन जोड़े वृत्तों के तीन मौलिक अक्ष एक-दूसरे को एक ही बिंदु पर काटते हैं। इस बिंदु को वृत्त O_1, O_2, O_3 का **मौलिक केंद्र** कहते हैं। चित्र 140 में दिखाया गया है : एक-दूसरे को काटने वाले तीन वृत्तों में से दो-दो का सामूहिक चापकर्ण खींचने पर ये चापकर्ण एक-दूसरे को एक बिंदु पर काटते हैं। चित्र 141 में दिखाया गया है : परस्पर स्पर्शरत तीन वृत्तों में से दो-दो की खींची गयी सामूहिक स्पर्शक रेखाएं भी एक-दूसरे को एक बिंदु पर काटती हैं।

§ 158. अंतरित और परीत बहुभुज

वृत्त में अंतरित बहुभुज ऐसे बहुभुज को कहते हैं, जिसके सभी शीर्ष किसी वृत्त की परिधि पर होते हैं (चित्र 142) ; वृत्त के गिर्द **परीत बहुभुज** की हर भुजा वृत्त की स्पर्शक होती है (चित्र 143)।

चित्र 142 चित्र 143

बहुभुज के गिर्द **परीत वृत्त** की परिधि बहुभुज के सभी शीर्षों से गुजरती है (चित्र 142); बहुभुज में **अंतरित वृत्त** की परिधि बहुभुज की सभी भुजाओं को छूती हैं (चित्र 143)।

मनचाहे बहुभुज में हमेशा वृत्त अंतरित नहीं किया जा सकता, न ही वृत्त उसके गिर्द हमेशा परीत किया जा सकता है।

यदि बहुभुज कोई त्रिभुज है, तो उसके लिए अंतरित और परीत वृत्त हमेशा खींचा जा सकता है (दे. § 139, प्रश्न 20-21)।

अंतरित वृत्त की त्रिज्या r त्रिभुज की भुजाओं के जरिये निम्न प्रकार से व्यक्त होती है :

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \quad \left(p = \frac{a+b+c}{2}\right).$$

परीत वृत्त की त्रिज्या R निम्न सूत्र से ज्ञात होती है :

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

चतुर्भुज में वृत्त तभी अंतरित किया जा सकता है, जब उसकी आमने-सामने की भुजाओं के योगफल समान होते हैं। समांतर चतुर्भुजों में से सिर्फ रोंब (विशेषकर वर्ग) में वृत्त अंतरित किया जा सकता है; उसका केंद्र कर्णों के कटान-बिंदु पर होता है।

चतुर्भुज पर वृत्त परीत करना तभी संभव है, जब उसके आमने-सामने के कोण मिलकर 180° होते हैं। (यदि एक जोड़ा आमने-सामने के कोण 180° होते हैं, तो दूसरा जोड़ा भी मिलकर जरूर 180° होता है)। समांतर चतुर्भुजों

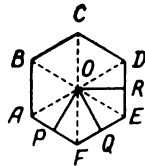
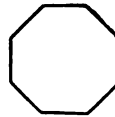
म मे सिर्फ आयत (विशेष स्थिति : वर्ग) पर ही वृत्त परीत किया जा सकता है ; उसका केंद्र कर्णों के कटान-बिंदु पर होता है ।

त्रापेस (समलंब चतुर्भुज) पर वृत्त परीत करना तभी संभव होता है, जब वह समपार्श्वी होता है ।

वृत्त में अंतरित उत्तल चतुर्भुज में कर्णों का गुणनफल आमने-सामने की भुजाओं के गुणनफलों का योगफल है—यह तोलेमी (Ptolemy) का प्रमेय है; अत: (चित्र 142) :

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$$

§ 159. नियमित बहुभुज

नियमित बहुभुज ऐसे बहुभुज को कहते हैं, जिसमें सभी कोण आपस में बराबर होते हैं और सभी भुजाएं आपस में बराबर होती हैं । चित्र 144 और 145 में क्रमश: नियमित षटभुज और नियमित अष्टभुज दिखाये गये हैं । नियमित चतुर्भुज एक वर्ग है; नियमित त्रिभुज समबाहु त्रिभुज है । नियमित n-भुज (n भुजाओं वाले बहुभुज) में हर कोण $\frac{180^\circ (n-2)}{n}$ के बराबर होता है ।

चित्र 144

चित्र 145

नियमित बहुभुज के भीतर एक ऐसा बिंदु होता है, जो सभी शीर्षों से समान दूरी रखता है (चित्र 144 में $OA = OB = OC$ आदि) ; इसे बहुभुज का केंद्र कहते हैं। केंद्र बहुभुज की भुजाओं से भी समान दूरी (समान लांबिक दूरी) रखता है ($OP = OQ = OR$ आदि) ।

कर्त OP, OQ आदि को **दूरक** [apothem, (भुजाओं को) दूर रखने वाला] कहते हैं [इन्हें **आंतर त्रिज्याएं** भी कहते हैं, क्योंकि ये बहुभुज में अंतरित वृत्त की त्रिज्याएं हैं]; कर्त OA, OB आदि को **बाह्य त्रिज्याएं** कहते हैं।

नियमित बहुभुज का क्षेत्रफल अर्ध परिमिति गुणा दूरक होता है :

$$S = ph,$$

जहां

$$p = \tfrac{1}{2}\,(AB + BC + CD + \ldots),\ \ h = OP$$

नियमित बहुभुज में वृत्त अंतरित किया जा सकता है और उस पर वृत्त परीत भी किया जा सकता है। परीत और अंतरित वृत्तों के केंद्र नियमित बहुभुज के केंद्र पर होते हैं। परीत वृत्त की त्रिज्या नियमित बहुभुज की बाह्य त्रिज्या है और अंतरित वृत्त की त्रिज्या दूरक है (परीत और अंतरित वृत्त खींचने की विधि देखें § 139 में, प्रश्न 30-38)।

वृत्त पर परीत नियमित बहुभुज की भुजा b_n उसी वृत्त में अंतरित नियमित बहुभुज की भुजा a_n के साथ निम्न सूत्र से संबंधित है (यदि दोनों बहुभुजों में भुजाओं की संख्या n है) :

$$b_n = Ra_n : \sqrt{R - \tfrac{1}{4}a_n} \qquad (R = \text{वृत्त की त्रिज्या})$$

दुगुनी संख्या में भुजाएं रखने वाले अंतरित नियमित बहुभुज की भुजा a_{2n} भुजा a_n द्वारा निम्न सूत्र से व्यक्त होती है :

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \tfrac{1}{4}a_n^2}}.$$

निम्न सूत्र कुछ अंतरित नियमित बहुभुजों की भुजा को वृत्त की त्रिज्या के साथ संबंधित करते हैं :

$$a_3 = R\sqrt{3} \approx 1.7321R;$$

$$a_4 = R\sqrt{2} \approx 1.4142R;$$

$$a_5 = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \approx 1.1755R;$$

$$a_6 = R;$$

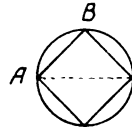
$$a_{10} = R\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.6180R;$$

$$a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 0.5176R;$$

$$a_{15} = \tfrac{1}{4}R\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\right] \approx 0.4158R.$$

a_3, a_4, a_6 के व्यंजनों की व्यवहार में अक्सर आवश्यकता पड़ती है; अतः इन्हें कंठस्थ कर लेना चाहिए। अन्य बहुभुजों की भुजा त्रिकोणमितिक सूत्रों

द्वारा सारणियों की सहायता से ज्ञात करना सुगम होता है (दे. § 188)। अधिकांश बहुभुजों के लिए व्यतिमान $a_n : R$ को मूल के चिह्नों की भरमार करके भी बीजगणितीय सूत्रों से व्यक्त करना संभव नहीं होता।

उदाहरण. 40 cm मोटे शहतीर से वर्गाकार अनुप्रस्थ काट वाली छड़ काट कर अलग की जा सकती है या नहीं ? वर्ग की भुजा 36 cm होनी चाहिए।

चित्र 146

शहतीर के अनुप्रस्थ काट को वृत्त माना जा सकता है, जिसकी त्रिज्या होगी :

$$R=\frac{40}{2}=20 \text{ cm}.$$

वृत्त में अँटने वाला सबसे बड़ा वर्ग, उसमें अंतरित वर्ग होता है (जिसके शीर्ष परिधि पर होते हैं)। इस वर्ग की भुजा AB (चित्र 146) $20\sqrt{2} \approx 20\cdot1.41 \approx 28$ cm होगी। अतः शहतीर से ऐसे वर्गाकार अनुप्रस्थ काट वाली छड़ अलग नहीं की जा सकती, जिसकी भुजा 36 cm हो।

§ 160. समतली आकृतियों के क्षेत्रफल

इस अनुच्छेद में समतली आकृतियों के क्षेत्रफल S के लिए सभी महत्त्वपूर्ण सूत्र संकलित हैं (इनमें से कुछ सूत्र तदनुरूप अनुच्छेदों में भी दिये गये हैं)।

वर्ग (चित्र 103, पृष्ठ 317). a = भुजा, d = कर्ण :

$$S=a^2=\frac{d^2}{2}$$

आयत (चित्र 101, पृ. 317). a, b भुजाएं हैं :

$$S=ab.$$

रोंब (चित्र 102, पृ. 317). a = भुजा, d_1, d_2 कर्ण हैं, α कोई एक (न्यून या अधिक) कोण है :

$$S=\frac{d_1 d_2}{2}=a^2 \sin \alpha.$$

समांतर चतुर्भुज (चित्र 100, पृ. 316). a, b भुजाएं हैं; α एक कोण है (न्यून या अधिक); h = ऊँचाई :

$$S=ah=ab \sin \alpha$$

ट्रापेस (चित्र 104, 106, पृ. 318). a, b आधार हैं; h ऊँचाई और c मध्य रेखा है :

$$S=\frac{a+b}{2}h=ch$$

चतुर्भुज, कोई भी. d_1, d_2 कर्ण हैं, α उनके बीच का कोण है (चित्र 147) :

$$S=\frac{1}{2}\,d_1\,d_2\sin\alpha$$

चतुर्भुज, जिस पर वृत्त परीत किया जा सके (§ 139, प्रश्न 22) a, b, c, d भुजाएं हैं :

$$p=\frac{a+b+c+d}{2},$$

$$S=\sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,(p-d)}.$$

समकोण त्रिभुज (चित्र 75, पृ. 308). a, b संलंब हैं:

$$S=\frac{1}{2}\,ab.$$

समद्विबाहु त्रिभुज (चित्र 77, पृ. 308). a=आधार, b=पार्श्व भुजा :

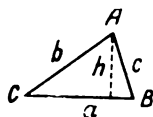
$$S=\frac{1}{2}a\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}.$$

समबाहु त्रिभुज (चित्र 78, पृ. 309). a= एक भुजा :

$$S=\frac{1}{4}\,a^2\sqrt{3}$$

त्रिभुज, कोई भी. a, b, c भुजाएं हैं; a=आधार, h=ऊँचाई; A, B, C कोण हैं (क्रमश: a, b, c के सामने स्थित); $p=\frac{a+b+c}{2}$ (चित्र 148) :

$$S=\frac{1}{2}\,ah=\frac{1}{2}\,ab\sin C=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{h^2.\sin A}{2\sin B.\sin A}$$

$$=\sqrt{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

चित्र 147

चित्र 148

चित्र 149

बहुभुज का क्षेत्रफल निकालने के लिए उसे किसी तरह से (उदाहरण-स्वरूप, कर्णों की सहायता से) त्रिभुजों में वांट लेते हैं। वृत्त पर परीत बहुभुज

का वृत्त के केंद्र से बहुभुज के शीर्षों की ओर जाने वाली रेखाओं द्वारा बांटना सुविधाजनक होता है (चित्र 149)। तब

$$S = rp,$$

r = वृत्त की त्रिज्या, p = बहुभुज की अर्ध परिमिति।

यह सूत्र विशेषकर सभी नियमित बहुभुजों के लिए लागू होता है।

नियमित षटभुज. (a = एक भुजा) :

$$S = \frac{3}{2}\sqrt{3}\,a^2.$$

वृत्त. (d = व्यास, r = त्रिज्या, C = परिधि) :

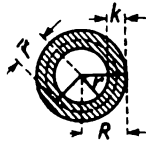
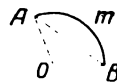
$$S = \frac{1}{2}Cr = \pi r^2 \;(\approx 3.142\, r^2) = \pi\frac{d^2}{4} \;(\approx 0.785\, d^2).$$

वृत्तांश. r = त्रिज्या, n = केंद्रीय कोण का डिग्रियों में माप, $p_{n}{}^{\circ}$ = चाप की लंबाई (चित्र 150) :

$$S = \frac{1}{2}\, r p_{n^\circ} = \frac{\pi r^2 n}{360}.$$

वृत्तीय छल्ला. R, r क्रमशः वाह्य तथा आंतर त्रिज्याएं हैं (चित्र 151); D, d वाह्य तथा आंतर व्यास हैं; $\bar{r}$ औसत त्रिज्या है; k छल्ले की चौड़ाई है :

$$S = \pi\,(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4}\,(D^2 - d^2) = 2\pi\,\bar{r}\,k.$$

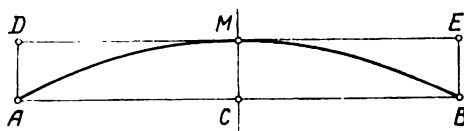
वृत्तखंड (चित्र 152) का क्षेत्रफल वृत्तांश $OAmB$ और त्रिभुज AOB के क्षेत्रफलों का अंतर है।

चित्र 150 चित्र 151 चित्र 152

§ 160a. वृत्तखंड के क्षेत्रफल का सन्निकृत सूत्र

व्यवहार में अक्सर प्राकृतिक या आरेखित चित्रित वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात करना पड़ता है, और वह भी ऐसी स्थिति में, जब न तो परिधि के साथ

चाप का व्यतिमान ही पता होता है, न चाप की त्रिज्या ही। ऐसी स्थिति में निम्न सन्निकृत सूत्र का उपयोग करते हैं :

$$S \approx \frac{2}{3} ah.$$

जहाँ $a = AB$ (चित्र 152 a), यह वृत्तखंड का आधार है; $h = CM$ उसकी ऊँचाई है। दूसरे शब्दों में, यह मान लेते हैं कि वृत्तखंड का क्षेत्रफल आयत $ADEB$ का $\frac{2}{3}$ भाग है। पर वास्तव में वृत्तखंड का क्षेत्रफल कुछ ज्यादा होता है। $\overset{\frown}{AB} = 60$ होने पर सूत्र की सापेक्षिक त्रुटि 1.5% होती है; $\overset{\frown}{AB} = 45°$

चित्र 152a

होने पर सापेक्षिक त्रुटि दुगुनी कम होती है; $\overset{\frown}{AB} = 30°$ होने पर त्रुटि सिर्फ 0.3% रह जाती है, तथा आगे और भी तेजी से घटती है।

उदाहरण. वृत्तखंड AMB (चित्र 152a) का क्षेत्रफल निकालें, जिसका आधार $a = 60.0$ mm और $h = 8.04$ mm है।

हल. $S \approx \frac{2}{3} \cdot 60.0 \cdot 8.04 \approx 321 \text{mm}^2$.

उत्तर में तीसरा अंक विश्वस्त नहीं है; चूंकि चाप $\overset{\frown}{AB}$ में लगभग 60° हैं, इसलिए सूत्र की त्रुटि 1.5% अर्थात लगभग 5 mm² है। यदि तदनुरूप सुधार किया जाये, तो $S \approx 326$ mm² मिलेगा। इसमें सभी अंक विश्वस्त हैं।

B. व्योममिति

§ 161. सामान्य सूचनाएं

व्योममिति व्यौम पिंडों और आकृतियों के ज्यामितिक गुणों का अध्ययन करती है। व्योममितिक प्रश्नों को हल करने में महत्वपूर्ण विधि है उन समतली रेखाओं तथा आकृतियों का परीक्षण करना, जो विचाराधीन वस्तु में उपस्थित हैं या जो सहायक तत्वों के रूप में बनावट से प्राप्त हों। इसीलिए व्यौम रूपों में

विविध समतली आकृतियों को पहचानना तथा उन्हें अलग करना जरूर सीखना चाहिए।

§ 162. मुख्य अवधारणाएं

जिस प्रकार तलमिति में सभी रेखाओं के बीच सरल रेखा को विशेष प्रमुखता दी जाती है, उसी प्रकार व्योममिति में समतली (चौरस) सतह—**समतल**—को विशेष प्रमुखता दी जाती है। *समतल* और *सरल* (ऋजु) *रेखा* व्योममिति के मुख्य तत्त्व हैं। [सरल ज्यामिति में रेखा का अर्थ सामान्यतया सरल रेखा होता है और तल का अर्थ समतल होता है।]

व्योम के तीन बिंदुओं से, जो एक सरल रेखा पर नहीं हैं, एक और सिर्फ एक समतल गुजरता है। एक सरल रेखा पर स्थित तीन बिंदुओं से असंख्य समतल खींचे जा सकते हैं; ये सभी मिलकर समतलों का **पुंज** बनाते हैं; जिस सरल रेखा से ये समतल गुजरते हैं, उसे पुंज का **अक्ष** कहते हैं।

किसी भी सरल रेखा और उसके बाहर के एक बिंदु से एक और सिर्फ एक तल (समतल) गुजरता है।

दो सरल रेखाओं से समतल गुजारना हमेशा संभव नहीं है। ऐसी दो सरल रेखाएं, जिनसे समतल गुजारना संभव नहीं हैं [अर्थात् जो एक समतल पर नहीं है], **कुटिल रेखाएं** कहलाती हैं।

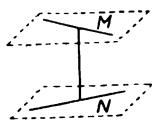
उदाहरण. कमरे की एक दीवार पर खींची गयी क्षैतिज सरल रेखा और सामने की दीवार पर खींची गयी उदग्र सरल रेखा कुटिल रेखाएं हैं।

कुटिल रेखाओं को कितना भी क्यों न बढ़ाया जाये, वे कभी एक दूसरे को काटती नहीं हैं, पर उन्हें समांतर रेखाएं नहीं कहते हैं।

समांतर रेखाएं ऐसी दो सरल रेखाओं को कहते हैं, जो एक-दूसरे को काटती नहीं हैं, और एक ही समतल पर स्थित होती हैं (तुलना करें § 150 से)।

समांतर तथा कुटिल रेखाओं के बीच स्पष्ट अंतर यह है कि समांतर रेखाओं की दिशाएं समान [एक ही ओर या परस्पर विपरीत ओर] होती हैं, पर कुटिल रेखाओं की दिशाएं भिन्न होती हैं।

एक समांतर रेखा के सभी बिंदु दूसरी के बिंदुओं से समान लांबिक दूरी पर रहते हैं, लेकिन एक कुटिल रेखा के बिंदु दूसरी के बिंदुओं से असमान दूरी पर होते हैं [समांतर रेखाओं के किसी भी बिंदु से उनका सामूहिक लंब खींचा जा सकता है, अतः समांतर रेखाओं पर लंबों के सापेक्ष सानुरूप बिंदु होते हैं; कुटिल रेखाओं के साथ ऐसी बात नहीं है]।

दो व्यतिकट रेखाओं से होकर एक और सिर्फ एक समतल गुजारा जा सकता है [एक-दूसरे को काटने वाली रेखाओं को **व्यतिकट रेखाएं** कहेंगे। समांतर और कुटिल रेखाएं **अव्यतिकट** हैं]।

चित्र 153

दो कुटिल **रेखाओं की आपसी दूरी** उनके निकटतम बिंदुओं M तथा N को मिलाने वाला कर्त MN है (चित्र 153)। सरल रेखा MN दोनों कुटिल रेखाओं पर सामूहिक लंब है।

समांतर रेखाओं की दूरी उसी तरह निर्धारित होती है, जैसे तलमिति में। व्यतिकट रेखाओं की आपसी दूरी शून्य के बराबर है।

दो समतल एक-दूसरे को काटते हैं (तो सरल रेखा पर ही), या एक-दूसरे को नहीं काटते हैं। अव्यतिकट समतल **समांतर समतल** कहलाते हैं।

सरल रेखा और समतल भी या तो एक-दूसरे को काटते हैं (एक बिंदु पर) या एक-दूसरे को नहीं काटते हैं; दूसरी स्थिति में कहते हैं कि *सरल रेखा समतल के साथ समांतर* है (या समतल समांतर है सरल रेखा के साथ)।

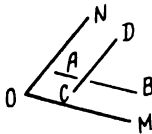
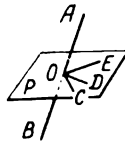
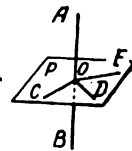
§ 163. कोण

दो व्यतिकट रेखाओं के बीच का कोण उसी तरह से नापा जाता है, जैसे तलमिति में (क्योंकि इन रेखाओं से होकर एक समतल खींचा जा सकता है)। *दो समांतर रेखाओं के बीच का कोण* शून्य (या 180°) माना जाता है (दे. § 150)।

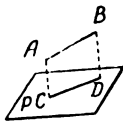
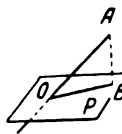
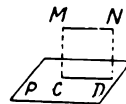
दो कुटिल रेखाओं AB और CD (चित्र 154)* के बीच का कोण निम्न विधि से निर्धारित होता है: किसी भी बिंदु O से किरण $OM \parallel AB$ और $ON \parallel CD$ खींचते हैं। AB और CD के बीच का कोण $\angle NOM$ के बराबर माना जायेगा। अन्यतः, AB और CD में से प्रत्येक को स्वयं के समांतर तब तक खिसकाते हैं, जब तक वे एक दूसरे को किसी बिंदु O पर काटें नहीं।

* **सरल रेखा** AB (या CD) **की दिशा** मनचाहे ढंग से निर्धारित की जा सकती है: A से B की ओर या B से A की ओर (C से D की ओर या D से C की ओर)। प्रथम स्थिति में सरल रेखा को AB से द्योतित करते हैं और दूसरी स्थिति में BA से।

विशेष स्थिति में बिंदु O दोनों में से एक सरल रेखा (AB या CD) पर भी लिया जा सकता है (यह रेखा स्थिर रहेगी)।

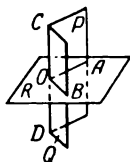
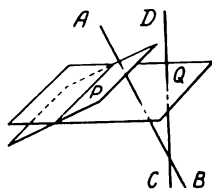
समतल P को बिंदु O पर काटने वाली रेखा AB समतल P पर खींची गयी रेखाओं OC, OD, OE के साथ *सामान्यतया* भिन्न-भिन्न कोण बनाती है (कोण AOC, AOD, AOE; चित्र 155)। पर यदि वह ऐसी किन्हीं दो सरल रेखाओं (यथा OE, OD) के साथ लंब है, तो वह बिंदु O से गुजरने वाली सभी सरल रेखाओं (जैसे OC) के साथ लंब होगी। इस स्थिति में (चित्र 156) रेखा AB को समतल P पर **लंब** कहते हैं और समतल P को रेखा AB पर लंब कहते हैं।

चित्र 154 चित्र 155 चित्र 156

ऋजुकोणिक प्रक्षेप. *समतल P पर बिंदु A का ऋजुकोणिक प्रक्षेप* (या सिर्फ प्रक्षेप) बिंदु A से समतल P पर खींचे गये लंब AC के आधार-बिंदु C को कहते हैं; *कर्त AB का समतल P पर प्रक्षेप* कर्त CD है, जिसके सिरे कर्त AB के सिरों के प्रक्षेप हैं (चित्र 157)।

प्रक्षेपण ज्यामितिक अन्वीक्षण की एक महत्त्वपूर्ण विधि है (दे. § 164)। प्रक्षेपण की सहायता से ही सरल रेखा और समतल के बीच का कोण निर्धारित करते हैं।

चित्र 157 चित्र 158 चित्र 159

सरल रेखा OA और समतल P के बीच का कोण ऐसे कोण को कहते हैं, जो OA और समतल P पर उसके प्रक्षेप OB से बनता है (चित्र 158 में $\angle AOB$)। यदि सरल रेखा MN किसी समतल P के समांतर है (चित्र

159), तो वह अपने प्रक्षेप CD के भी समांतर है, और MN तथा समतल P के बीच का (तीछ) कोण शून्य के बराबर माना जाता है।

एक सरल रेखा CD (चित्र 160) से निसृत दो अर्ध समतल P तथा Q से बनी आकृति **दुफलकी कोण** कहलाती है। सरल रेखा CD को दुफलकी कोण का अस्र कहते हैं। समतल P और Q कोण के फलक कहलाते हैं।

चित्र 160

चित्र 161

दुफलकी कोण के अस्र पर लंब तल R फलक P और Q के साथ की कटान-रेखाओं से कोण AOB बनाता है, जिसे दुफलकी कोण का **रैखिक कोण** कहते हैं।

दुफलकी कोण की माप के रूप में उसके रैखिक कोण का मान प्रयुक्त होता है। पर "दुफलकी कोण की माप 30° है" की बजाय हम कहते हैं: "दुफलकी कोण 30° के बराबर है"।

जिस प्रकार तलमिति में "दो सरल रेखाओं के बीच के कोण" की बात चलती थी, उसी प्रकार यहां अक्सर "दो समतलों के बीच के कोण" की बात चलती है। यहां कोण से तात्पर्य है समतलों से बने चार कोणों में से कोई एक कोण (सामान्यतया न्यून कोण)।*

दो समांतर समतलों के बीच का कोण शून्य माना जाता है, प्रत्यक्ष अर्थ में यहाँ कोई कोण नहीं है।

एक दूसरे के साथ समकोण (ऋजकोण) बनाने वाले समतल लंब कहलाते हैं।

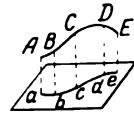
समतल P और Q के साथ क्रमश: लंब सरल रेखा AB और CD के बीच का कोण P और Q मे बने कोण के बराबर होता है (चित्र 161)। अत:

---

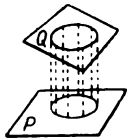
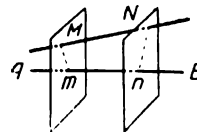
* सम्मुख और आसन्न कोणों की परिभाषाएं वैसी ही हैं, जैसी सरल रेखाओं के लिए होती हैं। सम्मुख कोण बराबर होते हैं; आसन्न कोण मिलकर 180° का कोण बनाते हैं।

समतल P और Q के बीच के कोण की माप एक और विधि से निर्धारित कर सकते हैं—सरल रेखा AB और CD से बने कोण की माप के रूप में।

§ 164. प्रक्षप

समतल पर सिर्फ सरल रेखा ही नहीं, कोई भी रेखा प्रक्षिप्त कर सकते हैं; यह रेखा पूर्णत: एक ही समतल पर स्थित हो भी सकती है, या नहीं भी। मान लें कि $ABCDE$ (चित्र 162) कोई रेखा है (वक्र या टूटी)। इस रेखा पर किसी बिंदु पर अविराम खिसकाते जायें। जब यह बिंदु क्रमश: A, B, C, D आदि स्थितियों पर पहुंचेगा, उसके प्रक्षेप (§ 162) क्रमश: a, b, c, d आदि होंगे। चूंकि बिंदु की गति अविराम (सतत, बिना छलांग लगाये) संपन्न होती है, इसलिए उसकी विभिन्न स्थितियों के प्रक्षेप एक सतत रेखा $abcde$ बनायेंगे। *रेखा $ABCDE$ पर गतिमान बिंदु के प्रक्षेपों द्वारा निरूपित रेखा $abcde$ को रेखा $ABCDE$ का प्रक्षेप कहते हैं।*

चित्र 162

प्रक्षेप का रूप प्रक्षेप्य रेखा पर पूर्णत: निर्भर करता है, पर प्रक्षेप का रूप प्रक्षेप्य रेखा का रूप निर्धारित नहीं करता। लेकिन यदि दो [असमांतर] समतलों पर किसी रेखा $ABCDE$ के प्रक्षेप ज्ञात हों, तो उनके सहारे सरल रेखा $ABCDE$ का रूप निर्धारित किया जा सकता है (सिर्फ कुछ अपवाद-जनक स्थितियों में ही यह संभव नहीं होता)। यह तथ्य **निरूपक ज्यामिति** का मूल आधार है; निरूपक ज्यामिति में ज्यामितिक आकृतियों का अध्ययन दो परस्पर लंब समतलों पर उनके प्रक्षेपों की सहायता से होता है।

समतल पर रेखा के प्रक्षेपण से उसका रूप बदल जाता है। यथा, यदि समतल P पर वृत्त प्रक्षिप्त किया जाये, जिसका तल Q तल P के साथ समांतर नहीं है (चित्र 163), तो प्रक्षेप में वृत्त की जगह अंडे जैसी एक आकृति मिलेगी जिसे **एलिप्स** (दीर्घ या लमड़ा हुआ वृत्त) कहते हैं।

चित्र 163

चित्र 164

यदि तल Q पर स्थित संवृत रेखा (जिसके सिरे एक बिंदु पर मिलते हैं) तल P पर प्रक्षिप्त होती है, तो प्रक्षेप में घिरा क्षेत्र S_1 प्रक्षेप्य आकृति से घिरे क्षेत्र S के साथ निम्न सूत्र द्वारा संबंधित होता है :

$$S_1 = S \cos \alpha,$$

जहां α तल P तथा Q के बीच का कोण है।

कर्त AB की लंबाई a भी (चित्र 157 में) तल P पर अपने प्रक्षेप CD की लंबाई a_1 के साथ इसी तरह के सूत्र से संबंधित है।

$$a_1 = a \cos \alpha,$$

जहां α रेखा AB और तल P के बीच का कोण है।

अक्सर बिंदुओं और कर्तों को सरल रेखा पर भी प्रक्षिप्त करते हैं (ऐसी सरल रेखा को **प्रक्षेप का अक्ष** कहते हैं)।

मान लें कि AB एक सरल रेखा है और M कोई बिंदु है (चित्र 164)। M से रेखा AB के लंब एक समतल खींचते हैं, मान लें कि यह समतल AB को बिंदु m पर काटता है। बिंदु m को *बिंदु M का रेखा AB पर प्रक्षेप* कहते हैं।

सरल रेखा AB पर कर्त MN के सिरों M व N के प्रक्षेप क्रमश: बिंदु m और n मिलते हैं; इनमे घिरा हुआ कर्त मरल रेखा AB पर कर्त MN का प्रक्षेप है।*

कर्त MN की लंबाई a अपने प्रक्षेप mn की लंबाई a_1 के साथ निम्न सूत्र से संबंधित है :

$$a_1 = a \cos \alpha,$$

जहां α रेखा MN और AB के बीच का कोण है।

सरल रेखा पर कर्तों के प्रक्षेपों को भी ठीक उसी तरह बीजगणितीय राशि मान सकते हैं, जैसे समतलीय प्रक्षेपण में माना गया था (दे. § 149)। इस स्थिति में तलमिति की तरह ही प्रमेय प्राप्त होता है : *टूटी रेखा की कड़ियों के प्रक्षेपों का योगफल रेखा के सिरों को मिलाने वाले कर्त के प्रक्षेप के बराबर होता है।*

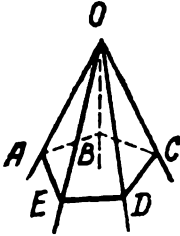
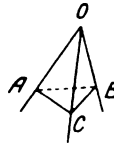
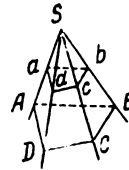
---

* ध्यान दें कि Mm और Nn रेखा AB पर लंब हैं, पर सामान्य स्थिति में उनका समांतर होना कोई जरूरी नहीं है; वे कुटिल होते हैं, यदि रेखा MN और AB कुटिल होती हैं।

§ 165. बहुफलकी कोण

यदि किसी बिंदु O से (चित्र 165) कई समतल AOB, BOC, COD आदि खींचे जायें, जो एक-दूसरे को क्रमश: OB, OC, OD आदि पर काटते हैं (अंतिम समतल AOE प्रथम समतल को रेखा OA पर काटता है), तो प्राप्त आकृति को **बहुफलकी कोण** कहते हैं। बिंदु O को बहुफलकी कोण का **शीर्ष** कहते हैं।

बहुफलकी कोण बनाने वाले समतलों को कोण का **फलक** कहते हैं; फलक जिन रेखाओं पर एक-दूसरे को क्रम से काटते हैं, उन्हें कोण का **अस्र** कहते हैं। कोण AOB, BOC आदि **समतली कोण** कहलाते हैं।

बहुफलकी कोण में फलकों की अल्पतम संख्या तीन है (**त्रिफलकी कोण** में, चित्र 166)। त्रिफलकी कोण में प्रत्येक समतली कोण बाकी दो के योग से कम होता है और उनके अंतर से अधिक होता है।

चित्र 165 चित्र 166 चित्र 167

बहुफलकी कोण का किसी समतल के साथ काट एक बहुभुज होता है (बशर्ते कि समतल प्रत्त कोण के शीर्ष से नहीं गुजरता हो); दे. चित्र 165 में बहुभुज $ABCDE$।* यदि यह उत्तल बहुभुज है, तो बहुफलकी कोण भी उत्तल कहलाता है। *उत्तल बहुफलकी कोण में सभी समतली कोणों का योगफल 360° से अधिक नहीं होता।*

समांतर समतलों द्वारा बहुफलकी कोण के अस्र समानुपाती कर्तों में विभक्त होते हैं (चित्र 167 में $SA : Sa = SB : Sb$ आदि) और समरूप बहुभुज बनाते हैं।

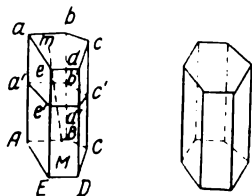
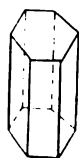
---

* सरल ज्यामिति में सिर्फ ऐसे बहुफलकी कोणों पर विचार किया जाता है, जिनमें परिरेखा $ABCDE$ अस्वकट होती है (स्वयं को नहीं काटती है)। सरल बहुफलकी कोण व्योम का एक भाग विलग करता है; इसे भी बहुफलकी कोण ही कहते हैं। बहुफलकी कोण नापने के बारे में देखें, § 174।

§ 166. बहुफलक. प्रिज्म, समांतर षटफलक, पिरामिड

समतलों के टुकड़ों (बहुभुजों) से घिरे पिंड को **बहुफलक** कहते हैं। इन बहुभुजों को **फलक** कहते हैं; उनकी भुजाओं को **अस्र** (किनारी) कहते हैं; उनके शीर्षों को बहुफलक के **शीर्ष** कहते हैं।

किन्हीं दो शीर्षों को मिलाने वाले कर्त को (यदि वह किसी फलक पर स्थित नहीं है) बहुफलक का **कर्ण** कहते हैं। जिस बहुफलक के सभी कर्ण पूर्णतया उसके भीतर होते हैं, इसे **उत्तल बहुफलक** कहते हैं।

प्रिज्म (चित्र 168). प्रिज्म एक बहुफलक है, जिसमें दो तुल्य फलकों $ABCDE$ और $abcde$ (प्रिज्म के आधार) की सानुरूप भुजाएं परस्पर समांतर होती हैं, और बाकी फलक ($AabB$, $BbcC$ आदि) समांतर चतुर्भुज होते हैं, जिनके तल किसी एक सरल रेखा (Aa या Bb या Cc आदि) के समांतर होते हैं। समांतर चतुर्भुज $ABba$, $BCcb$ आदि **पार्श्विक फलक** कहलाते हैं। अस्र Aa, Bb आदि **पार्श्विक अस्र** कहलाते हैं। प्रिज्म की **ऊँचाई** लंब Mm को कहते हैं, जो एक आधार के किसी भी बिंदु से दूसरे आधार के तल तक खींचा गया हो। आधार त्रिभुज होने पर प्रिज्म को तिकोण प्रिज्म कहते हैं, आधार चतुर्भुज होने पर प्रिज्म को चौकोण प्रिज्म कहते हैं, इत्यादि।

चित्र 168 चित्र 169

यदि प्रिज्म के पार्श्विक अस्र आधार के तल पर लंब होते हैं, तो प्रिज्म को **ऋजु** कहते हैं, अन्यथा **तिर्यक** कहते हैं। चित्र 168 में तिर्यक पचकोण प्रिज्म दिखाया गया है और चित्र 169 में ऋजु षट्कोण प्रिज्म दिखाया गया है।

प्रिज्म का लांबिक काट $a'b'c'd'e'$ उसके पार्श्विक अस्र के साथ लंब समतल द्वारा बना हुआ काट है (चित्र 168)।

प्रिज्म की पार्श्विक सतह, अर्थात् सभी पार्श्विक फलकों के क्षेत्रफलों का योग लांबिक काट की परिमिति p' और पार्श्विक अस्र की लंबाई l का गुणनफल है :

$$S_{par} = p'l.$$

ऋजु प्रिज्म के लिए लांबिक काट उसका आधार होता है और पार्श्विक अस्र उसकी ऊँचाई h होता है, अतः

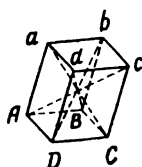
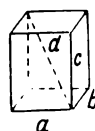
$$S_{par} = ph.$$

प्रिज्म का आयतन लांबिक काट के क्षेत्रफल S' और पार्श्विक अस्त्र की लंबाई l का गुणनफल है :

$$V=S'l,$$

या आधार का क्षेत्रफल S गुणा ऊँचाई h है, अर्थात्

$$V=Sh.$$

समांतर छेफलक ऐसा प्रिज्म है, जिसका आधार कोई समांतर चतुर्भुज होता है (चित्र 170); इस प्रकार, समांतर छेफलक में छ: फलक होते हैं और सभी समांतर चतुर्भुज होते हैं। आमने-सामने के फलक परस्पर बराबर और समांतर होते हैं। समांतर छेफलक में छ: कर्ण होते हैं और सभी एक बिंदु पर

चित्र 170

चित्र 171

व्यतिकट होते हैं; यह बिंदु प्रत्येक कर्ण को आधा करता है। आधार के रूप में किसी भी फलक को लिया जा सकता है; आयतन आधार का क्षेत्रफल गुणा ऊँचाई है :

$$V=Sh.$$

समांतर छेफलक, जिसके चारों पार्श्विक फलक आयत हैं, **ऋजु** समांतर छेफलक कहलाता है।

ऋजु समांतर छेफलक, जिसके सभी छ: फलक आयत होते हैं, **ऋजकोणिक** कहलाता है (चित्र 171)। ऋजु समांतर छेफलक का आयतन V आधार के क्षेत्रफल S और उसकी ऊँचाई h का गुणनफल है :

$$V=Sh.$$

ऋजकोणिक समांतर छेफलक के लिए इसके अतिरिक्त एक और सूत्र है :

$$V=abc,$$

जहां a, b, c उसके अस्त्र [परस्पर लंब अस्त्र] हैं।

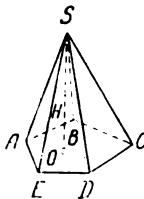
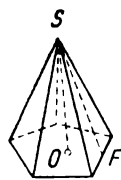
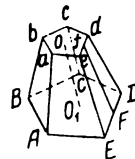
ऋजकोणिक समांतर छेफलक का कर्ण d उसके अस्त्रों के साथ निम्न सूत्र द्वारा संबंधित है :

$$d^2=a^2+b^2+c^2.$$

ऋजकोणिक समांतर छेफलक, जिसके सभी फलक वर्ग होते है, एक **घन** कहलाता है । घन के सभी अस्र बराबर होते हैं; घन का आयतन है :

$V = a^3$, जहां a घन का अस्र है ।

पिरामिड ऐसे बहुफलक को कहते हैं, जिसमें एक **फलक**—पिरामिड का **आधार**— कोई बहुभुज (जैसे चित्र 172 में $ABCDE$) होता है और बाकी—**पार्श्विक फलक**—एक सामूहिक शीर्ष S वाले त्रिभुज होते हैं; S को पिरामिड का **शीर्ष** कहते हैं । शीर्ष से आधार पर खींचा गया लंब SO पिरामिड की **ऊँचाई** है । पिरामिड का जैसा आधार होता है (त्रिभुज, चतुर्भुज आदि), पिरामिड का नाम भी वैसा ही होता है (तिकोण पिरामिड, चौकोण पिरामिड आदि) । तिकोण पिरामिड चतुर्फलक होता है, चौकोण पिरामिड पंचफलक होता है, आदि ।

यदि पिरामिड का आधार कोई नियमित बहुभुज होता है और उसकी उँचाई आधार के केंद्र से गुजरती है, तो उसे **नियमित पिरामिड** कहते हैं (चित्र 173) । नियमित पिरामिड में सभी पार्श्विक अस्र बराबर होते हैं; सभी पार्श्विक फलक तुल्य समद्विबाहु त्रिभुज होते हैं । पार्श्विक फलक की ऊँचाई SF पिरामिड का **दूरक** कहलाती है ।

चित्र 172 चित्र 173 चित्र 174

नियमित पिरामिड की **पार्श्विक सतह** S_{pa}, अर्थात् उसके पार्श्विक फलकों के क्षेत्रफलों का योगफल, आधार की अर्ध परिमिति $\frac{1}{2}p$ और दूरक a का गुणनफल है :

$$S_{pa} = \frac{1}{2}pa$$

किसी भी पिरामिड का **आयतन** एक बटा तीन आधार का क्षेत्रफल ($\frac{1}{3}S$) गुणा ऊँचाई (h) है :

$$V = \frac{1}{3}Sh.$$

यदि पिरामिड के आधार $ABCDE$ (चित्र 174) के समांतर एक काट $abcde$ लगायी जाये तो आधार, इस काट और पार्श्विक फलकों से घिरा हुआ

पिंड **उच्छेदित पिरामिड** कहलाता है। उच्छेदित पिरामिड के समांतर फलक उसके आधार कहलाते हैं; उनके बीच की दूरी (OO_1) उसकी ऊँचाई कहलाती है। उच्छेदित पिरामिड **नियमित** कहलाता है, यदि वह नियमित पिरामिड के उच्छेदन से प्राप्त होता है। नियमित पिरामिड के सभी पार्श्विक फलक तुल्य समपार्श्वी त्रापेस होते हैं। पार्श्विक फलक की ऊँचाई Ff नियमित उच्छेदित पिरामिड का **दूरक** कहलाती है।

नियमित उच्छेदित पिरामिड की **पार्श्विक सतह** आधारों की परिमितियों का **अर्धयोगफल** गुणा दूरक होती है :

$$S_{pa} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)\ a,$$

जहां p_1, p_2 आधारों की परिमितियां हैं और a दूरक है।

किसी भी उच्छेदित पिरामिड का आयतन V एक बटा तीन ऊँचाई में ऊपरी और निचले आधारों के क्षेत्रफलों और उनके समानुपाती औसत के योगफल से गुणा करने पर प्राप्त होता है :

$$V = \frac{1}{3}h\ (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2),$$

जहाँ $S_1 = ABCDE$ का क्षेत्रफल, $S_2 = abcde$ का क्षेत्रफल, h = ऊँचाई OO_1।

विशेष स्थिति : नियमित चौकोण उच्छेदित पिरामिड का आयतन V निम्न सूत्र से व्यक्त होता है :

$$V = \frac{1}{3}\ h\ (a^2 + ab + b^2),$$

जहां a और b आधारों पर स्थित वर्गों की भुजाएं हैं।

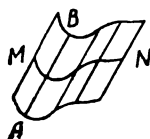
§ 167. बेलन

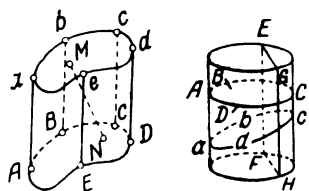
बेलनकर सतह ऐसी सतह को कहते हैं, जो किसी प्रत्त रेखा MN के अनुतीर सरल रेखा AB की गति से बनती है; दे. चित्र 175 [AB की गति ऐसी होती है कि उसकी क्रमिक स्थितियाँ परस्पर समांतर रहती हैं]। रेखा MN को **प्रवर्तक** कहते हैं; सरल रेखाएं, जो सरल रेखा AB की विभिन्न स्थितियों के अनुरूप होती हैं, बेलनकर सतह की **निमित्त** कहलाती हैं।

संवृत (जिसके सिरे आपस में मिले हुए हैं) प्रवर्तक रेखा वाली बेलनकर सतह और दो परस्पर समांतर समतलों से घिरे पिंड को **बेलन** कहते हैं (चित्र 176)। समांतर समतलों के वे भाग, जो बेलन को घेरते हैं; बेलन के **आधार** कहलाते हैं (चित्र 176 में $ABCDE$ और $abcde$)। आधारों के बीच की दूरी बेलन की **ऊँचाई** कहलाती है (चित्र 176 में MN)।

प्रिज्म बेलन का विशिष्ट रूप है (निमित्त पार्श्विक अस्रों के साथ समांतर हैं; प्रवर्तक रेखा आधार पर स्थित कोई बहुभुज है) ।

दूसरी ओर से, किसी भी बेलन को अवजात (कोने पर चिकना गोल किया हुआ) प्रिज्म के रूप में देख सकते हैं; जिसे असंख्य संकीर्ण पार्श्विक तलों से बना हुआ माना जा सकता है । ऐसे प्रिज्म और बेलन में कोई व्यावहारिक अन्तर नहीं होता । प्रिज्म के सभी गुण बेलन में सुरक्षित रहते हैं (दे. नीचे) ।

ऋजु बेलन की निमित्त रेखाएं आधार के साथ लंब होती हैं; यदि वे आधार के साथ लंब नहीं हैं, तो **तिर्यक बेलन** मिलता है । वृत्ताकार आधार वाले बेलन को गोल बेलन कहते हैं । ऋजु गोल बेलन (चित्र 177) को नियमित प्रिज्म का अवजनन मान सकते हैं । दैनंदिन जीवन में काम आने वाली अनेक वस्तुओं का रूप ऋजु गोल बेलन जैसा होता है (पाइप, बेलना, आदि-आदि) । ऋजु गोल बेलन आयत को किसी भुजा के गिर्द घूर्णित करने पर भी प्राप्त हो सकता है, इसलिए ऋजु गोल बेलन को **घूर्णन का बेलन** भी कहते हैं ।

चित्र 175

गोल बेलन में पार्श्विक सतह के काट (जो आधार के साथ समांतर हैं) समान त्रिज्या वाली परिधियां हैं (यथा, चित्र 177 में $ABCD$) । निमित्त रेखाओं के समांतर काट से समांतर रेखाओं (EF और EG) की जोड़ी मिलती है । जो काट न तो आधार के समांतर होते हैं न निमित्त रेखाओं के, वे एलिप्स होते हैं (दे. § 164) ।

चित्र 176 चित्र 177

बेलन की पार्श्व सतह निमित्त में लांबिक काट की परिमिति से गुणा करने पर मिलती है । ऋजु बेलन में ऐसा काट उसका आधार होता है और ऊँचाई उसकी निमित्त रेखा होती है । इसलिए ऋजु गोल बेलन की **पार्श्विक सतह** आधार की परिधि और बेलन की ऊँचाई का गुणनफल है :

$$S_{pa} = 2\pi rh.$$

किसी भी बेलन का **आयतन** आधार का क्षेत्रफल गुणा ऊँचाई है :

$$V = Sh.$$

ऋजु गोल बेलन के लिए

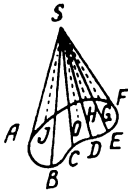
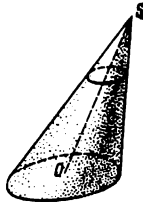
$$V = \pi r^2 h \qquad (r - \text{आधार की त्रिज्या}).$$

§ 168. कोन (शंकु)

सदैव एक स्थिर बिंदु से गुजरने वाली सरल रेखा AB (चित्र 178) जब किसी प्रत्त रेखा MN पर चलती है, तो उसकी गति से बनी सतह **कोनिक सतह** कहलाती है ।*

रेखा MN को **प्रवर्तक** कहते हैं; सरल रेखाएं, जो AB की विभिन्न स्थितियों के अनुरूप होती हैं, कोनिक सतह की **निमित्त** (रेखाएं) कहलाती हैं । बिंदु S कोनिक सतह का **शीर्ष** है ।

चित्र 178

कोनिक सतह के दो खंड होते हैं; एक खंड किरण SB द्वारा निरूपित होता है और दूसरा किरण SA द्वारा । कोनिक सतह से तात्पर्य अक्सर किसी एक खंड से होता है ।

चित्र 179

चित्र 180

चित्र 181

कोन ऐसे पिंड को कहते हैं, जो संवृत प्रवर्तक वाली कोनिक सतह के एक खंड और एक समतल (चित्र 179 में $ABCDEFGHJ$) द्वारा घिरा होता है; यह समतल शीर्ष S से नहीं गुजरता और सभी निमित्त रेखाओं को काटता है । इस समतल का वह भाग, जो कोनिक सतह से घिरा होता है, कोन का **आधार** कहलाता है । शीर्ष से आधार तक खींचा गया लंब SO कोन की **ऊँचाई** है ।

पिरामिड कोन का ही एक विशिष्ट रूप है, जिसमें प्रवर्तक का काम किसी बहुभुज की परिरेखा करती है ।

कोन को **गोल** कोन कहते हैं, जब उसका आधार वृत्त होता है (चित्र 180) ।

---

* सरल ज्यामिति में सिर्फ ऐसी कोनिक सतहों पर विचार किया जाता है, जो स्वयं को नहीं काटती ।

आधार के केंद्र और कोन के शीर्ष को मिलाने वाली रेखा को कोन का **अक्ष** कहते हैं। यदि अक्ष वृत्ताकार आधार के साथ लंब होता है या यदि गोल कोन की ऊँचाई का पाद-बिंदु आधार के केंद्र पर होता है, तो इसे **ऋजु गोल कोन** कहते हैं (चित्र 181)। ऋजु गोल कोन ऋजकोणिक त्रिभुज को किसी संलंब के गिर्द घूर्णन देने से प्राप्त होता है, इसलिए ऋजु गोल कोन को **घूर्णन का कोन** भी कहते हैं।

आधार के समांतर गुजरते समतल द्वारा गोल कोन का काट वृत्त होता है (चित्र 180)।

आधार के साथ असमांतर समतलों द्वारा कोन का काट देखें § 169 में।

ऋजु गोल कोन की **पार्श्विक सतह** आधार की अर्ध परिधि C गुणा निमित्त l है :

$$S_{pa}=\frac{1}{2}Cl=\pi rl \quad (r=\text{आधार की त्रिज्या}).$$

किसी भी कोन का आयतन आधार के क्षेत्रफल का एक बटा तीन गुणा ऊँचाई होता है :

$$V=\frac{1}{3}Sh.$$

ऋजु गोल कोन के लिए

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

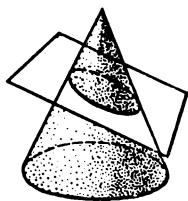
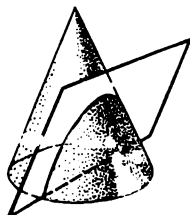
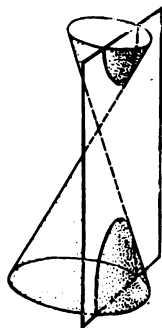
§ 169. कोनिक काट

किसी भी गोल कोन की पार्श्विक सतहों को विभिन्न समतलों से काटने पर जो रेखाएं मिलती हैं, उन्हें **कोनिक काट** कहते हैं। इसके लिए कोनिक सतह को शीर्ष के दोनों ओर अनंत विस्तृत मानते हैं।

यदि कर्तक तल कोनिक सतह के सिर्फ एक खंड को काटता है और किसी भी निमित्त रेखा के साथ समांतर नहीं है (चित्र 182), तो कोनिक काट एक एलिप्स (§ 164) होता है। कुछ अपवादजनक स्थितियों में एलिप्स वृत्त की परिधि में परिणत हो जाता है।*

यदि कर्तक तल कोनिक सतह के सिर्फ एक खंड को काटता है और किसी एक निमित्त रेखा के साथ समांतर होता है (चित्र 183), तो काट के रूप में एक असीम (एक तरफ से असीम) रेखा मिलती है, जिसे **परवलय** कहते हैं।

* उदाहरणार्थ, ऋजु गोल कोन में आधार के सामंतर सभी काट वृत्ताकार होते हैं।

यदि कर्तक तल कोनिक सतह के दोनों खंडों को काटता है (चित्र 184), तो काट के रूप में प्राप्त रेखा को **अतिवलय** कहते हैं; इसकी दो असीम शाखाएं होती हैं। विशेष स्थितिः जब कर्तक तल कोन के अक्ष के साथ समांतर होता है, तब भी अतिवलय मिलता है।

चित्र 182 चित्र 183 चित्र 184

कोनिक काटों का सैद्धांतिक और व्यावहारिक दोनों ही दृष्टियों से बहुत महत्त्व है। यथा, तकनीक में एलिप्सी दाँतदार चक्के और परवलयी प्रोजेक्टर प्रयुक्त होते हैं; ग्रह और कुछेक धूमकेतु एलिप्साकार पथ पर घूमते हैं; कुछ धूमकेतुओं का पथ परवलयी या अतिवलयी होता है।

कोनिक काटों के प्रमुख गुणों का वर्णन वैश्लेषिक ज्यामिति की सभी पुस्तकों में अनिवार्य है।

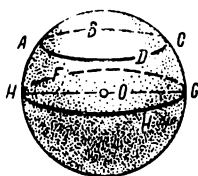
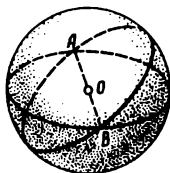
§ 170. वर्तुल (गोला)

वर्तुलाकार सतह व्योम के ऐसे बिंदुओं का ज्यामितिक स्थान है, जो किसी स्थिर बिंदु से समान दूरी रखते हैं; इस स्थिर बिंदु को वर्तुलाकार सतह का **केंद्र** कहते हैं (चित्र 185 में बिंदु O)। वर्तुलाकार सतह की त्रिज्या OE और उसका व्यास EG उसी तरह से परिभाषित होते हैं, जैसे परिधि की त्रिज्या और व्यास (§ 153)।

वर्तुलाकार सतह से घिरे पिंड को **वर्तुल** *कहते हैं।*

वृत्त (या अर्ध वृत्त) को किसी व्यास के गिर्द घूर्णन देने से वर्तुल प्राप्त हो सकता है।

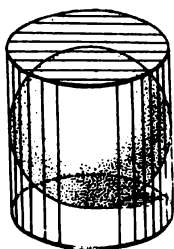
समतल के साथ वर्तुल का कोई भी काट एक **वृत्त** होता है (जैसे चित्र 185 में $ABCD$)। कर्तक समतल जैसे-जैसे वर्तुल के केंद्र के निकट आता है, काट से प्राप्त वृत्त का व्यास बढ़ता जाता है। सबसे बड़ा वृत्त $EFGH$ वर्तुल के केंद्र O से गुजरने वाले समतल के काट से मिलता है। ऐसा वृत्त **वृहत वृत्त** कहलाता है; वह वर्तुल और उसकी सतह को दो बराबर भागों में बाँटता है। वृहत वृत्त की त्रिज्या वर्तुल की त्रिज्या के बराबर होती है।

कोई भी दो वृहत वृत्त एक-दूसरे को वर्तुल के व्यास (चित्र 186 में AB) पर काटते हैं; यही व्यास व्यतिकट वृत्तों का भी व्यास होता है।

चित्र 185

चित्र 186

वर्तुलाकार सतह के दो बिंदुओं से, जो वर्तुल के किसी एक व्यास के सिरों पर स्थित होते हैं, असंख्य वृहत परिधियाँ खींची जा सकती हैं (जैसे पृथ्वी के ध्रुवों से याम्योत्तर रेखाएं खींची जाती हैं)। दो बिंदुओं से, जो एक व्यास के सिरों पर नहीं स्थित हैं, वर्तुलाकार सतह पर सिर्फ एक वृहत परिधि खींची जा सकती है।

वर्तुलाकार सतह पर दो बिंदुओं के बीच की दूरी इन बिंदुओं से गुजरने वाली वृहत परिधि का छोटा वाला चाप है।

वर्तुल की सतह का क्षेत्रफल वृहत वृत्त के क्षेत्रफल का चौगुना होता है।

$$S=4\pi R^2 \ (R=\text{वर्तुल का व्यास}).$$

वर्तुल का आयतन ऐसे पिरामिड का आयतन है, जिसके आधार का क्षेत्रफल वर्तुलाकार सतह के क्षेत्रफल के बराबर है और जिसकी ऊँचाई वर्तुल की त्रिज्या के बराबर है :

$$V=\frac{1}{3} RS=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

चित्र 187

वर्तुल का आयतन उस पर परीत **बेलन** (चित्र 187) के आयतन से डेढ़ गुना कम होता है और वर्तुल की सतह उसी बेलन की पूर्ण सतह से डेढ़ गुनी कम

होती है (आर्किमेडिस का प्रमेय) :

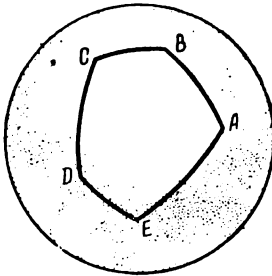
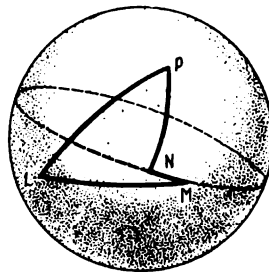
$$S = \frac{2}{3} S_1,$$
$$V = \frac{2}{3} V_1,$$

जहां S_1 व V_1 चित्र 187 में दर्शित परीत बेलन की पूर्ण सतह और उसका आयतन है ।

§ 171. वर्तुली बहुभुज

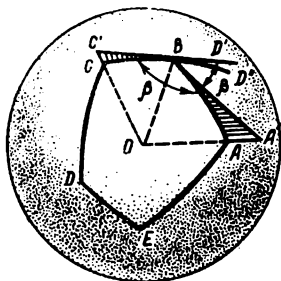
वर्तुली बहुभुज ऐसी आकृति को कहते हैं, जो वृहत वृत्तों के चापों की संवृत कतार से घिरी होती है; कोई भी चाप वृहत वृत्त की अर्ध परिधि से बड़ा नहीं होना चाहिए । चित्र 188 में एक वर्तुली पंचभुज दिखाया गया है ।

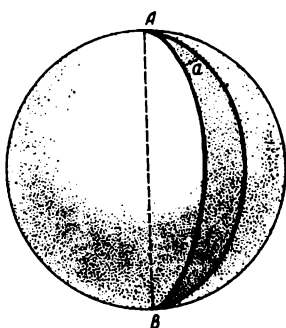
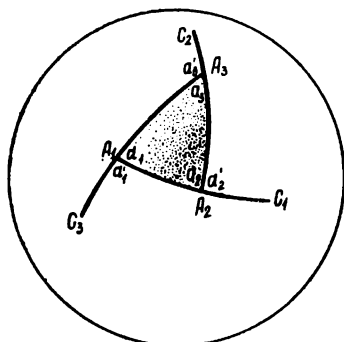
चाप AB, BC आदि वर्तुली बहुभुज की **भुजाएं** हैं; बिंदु A, B, C आदि उसके **शीर्ष** हैं ।

वर्तुली बहुभुज उत्तल होता है, यदि उसकी हर भुजा के लिए निम्न शर्त्त पूरी होती है : जिस वृहत परिधि पर यह भुजा स्थित है, उसके द्वारा विभाजित दो अर्ध वर्तुलों में से प्रत्त बहुभुज को सिर्फ एक में होना चाहिए । चित्र 188 में बहुभुज $ABCDE$ उत्तल है । चित्र 189 में बहुभुज $\angle MNP$ अवतल है, क्योंकि NM से गुजरने वाली वृहत परिधि द्वारा बने दोनों अर्ध वर्तुलों में $\angle MNP$ के भाग स्थित हैं । NP से गुजरने वाली अर्ध परिधि के भी दोनों ओर $\angle MNP$ के भाग उपस्थित होंगे ।

चित्र 188 चित्र 189

टिप्पणी. सरल ज्यामिति में सिर्फ सरल वर्तुली बहुभुजों पर विचार होता है, अर्थात ऐसे बहुभुजों का अध्ययन होता है, जिसकी परिरेखा स्वयं को नहीं

काटती। कोई भी सरल बहुभुज अर्ध वर्तुल को दो क्षेत्रों में बाँटता है। इनमें से एक को आंतरिक मानते हैं और दूसरे को बाह्य। यदि दोनों क्षेत्रों के क्षेत्रफल असमान हैं, तो छोटे वाले को आंतरिक मानते हैं और बड़े वाले को बाह्य मानते हैं।

वर्तुली बहुभुज का **आंतरिक कोण** (जैसे चित्र 190 में β से द्योतित कोण *ABC*) भुजा *BA* और *BC* को बिंदु *B* पर स्पर्श करने वाली रेखाओं *BA'* तथा *BC'* से बने रैखिक कोण के रूप में नापा जाता है। रैखिक कोण *A'BC'* की जगह इसके द्वारा नापा जाने वाला दुफलकी कोण भी ले सकते हैं, जिसका अक्ष त्रिज्या *OB* है और फलक हैं—वृहत परिधियों *BA* तथा *BC* के समतल क्रमशः *OBA'* तथा *OBC'*।

चित्र 190

इसी तरह से, वर्तुली बहुभुज का **बाह्य कोण** (जैसे चित्र 190 में β' से द्योतित कोण *D''BA*) रैखिक कोण *D'BA'* या तदनुरूप दुफलकी कोण के रूप में नापा जाता है। किसी भी शीर्ष पर बने बाह्य तथा आंतरिक कोणों का योगफल 180° के बराबर, अर्थात् π रेडियन होता है।

चित्र 191

चित्र 192

समतली बहुभुज तीन से कम भुजाओं द्वारा नहीं बन सकता। वर्तुली बहुभुज दो भुजाओं वाला भी होता है। चित्र 191 में एक वर्तुली द्विभुज दिखाया गया है; इसके आंतरिक कोण α तथा β परस्पर बराबर हैं।

दुभुज का क्षेत्रफल निम्न सूत्र से व्यक्त होता है :

$$S = 2R^2\alpha,$$

जहां R = वर्तुल की त्रिज्या, α = दुभुज का आंतरिक कोण (रेडियन में व्यक्त)।

उदाहरण. समकोण के बराबर आंतरिक कोण वाले दुभुज का क्षेत्रफल $2R^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi R^2$ है, अर्थात् वर्तुल की सतह का चौथाई (या बृहत वृत्त के बराबर)।

वर्तुली त्रिभुजों में आंतरिक कोणों का योगफल 180° से हमेशा अधिक होता है; त्रिभुज का क्षेत्रफल इस योगफल और 180° के अंतर के साथ समानुपाती होता है, अर्थात् यदि त्रिभुज के आंतरिक कोण α_1, α_2, α_3 रेडियन हैं (चित्र 192), तो

$$S = R^2\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi). \qquad (1)$$

वर्तुली त्रिभुज के बाह्य कोणों का योगफल हमेशा 360° से कम होता है। यदि α_1', α_2', α_3' त्रिभुज के बाह्य कोण हैं, तो

$$S = R^2\,[2\pi - (\alpha_1' + \alpha_2' + \alpha_3')]. \qquad (2)$$

यह सूत्र किसी भी वर्तुली बहुभुज पर लागू होता है :

$$S = R^2[2\pi - (\alpha_1' + \alpha_2' + \ldots + \alpha_n')]$$

अर्थात् वर्तुली बहुभुज का क्षेत्रफल 2π के साथ वाह्य कोणों के योगफल के अंतर के साथ समानुपाती होता है।

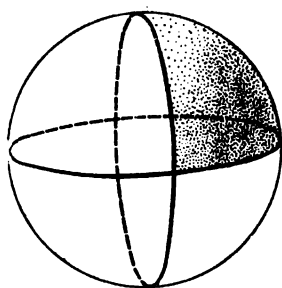
चित्र 193

उदाहरण. तीन परस्पर लंब वृहत वृत्तों से बने वर्तुली त्रिभुज पर गौर करें (चित्र 193)। इसके आंतरिक कोणों का योगफल $\frac{3\pi}{2}$ है। सूत्र (1) से :

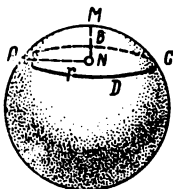
$$S = \tfrac{1}{2}\,\pi R^2.$$

यदि यह ध्यान में रखा जाये कि प्रत्त त्रिभुज वर्तुलाकार सतह का $\frac{1}{8}$ भाग है, तो भी यही परिणाम मिलेगा (तुलना करें, § 170 से)।

प्रत्त त्रिभुज के बाह्य कोणों का भी योग $\frac{3\pi}{2}$ के बराबर है। सूत्र 2 के अनुसार पुनः

$$S = \tfrac{1}{2}\,\pi R^2.$$

§ 172. वर्तुल के अंग

वर्तुल का किसी समतल (जैसे चित्र 194 में $ABCD$) से उच्छेदित **भाग** **वर्तुलखंड** कहलाता है।

वर्तुलखंड **का आधार** वृत्त $ABCD$ कहलाता है। वर्तुलखंड की **ऊँचाई** आधार के केंद्र N से वर्तुल की सतह तक खींचे गये लंब की लंबाई को कहते हैं। M को वर्तुलखंड का **शीर्ष** कहते हैं।

वर्तुल खंड की **वक्र सतह** वर्तुल की वृहत परिधि और वर्तुलखंड की ऊँचाई का गुणनफल है :

$S=2\pi Rh$ (R वर्तुल की त्रिज्या, $h=$ वर्तुलखंड की ऊँचाई)।

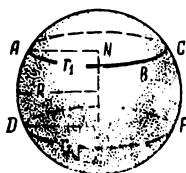
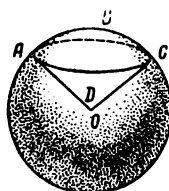
चित्र 194

वर्तुलखंड का **आयतन** निम्न सूत्र से व्यक्त होता है :

$$V=\pi h^2\left(R-\frac{1}{3}h\right), \text{ या}$$

$$V=\frac{1}{6}\pi h\left(h^2+3r^2\right),$$

जहाँ $r=$वर्तुलखंड के आधार की त्रिज्या।

वर्तुल का दो समांतर कर्तक समतलों (चित्र 195 में ACB और DFE) से घिरा हुआ भाग **वर्तुली परत** कहलाता है। वर्तुली परत की वक्र सतह को **कटि** कहते हैं। वृत्त ACB तथा DFE वर्तुली परत के दो **आधार** हैं, जिनके बीच की दूरी NO वर्तुली परत की **ऊँचाई (या मोटाई)** है।

चित्र 195

चित्र 196

वर्तुली परत की वक्र सतह (कटि) का क्षेत्रफल S उसकी ऊँचाई $h=NO$ और वर्तुल के वृहत वृत्त की परिधि का गुणनफल है :

$$S=2\pi Rh.$$

वर्तुली परत का **आयतन** निम्न सूत्र से ज्ञात होता है :

$$V=\frac{1}{6}\pi h^3+\frac{1}{2}\pi\left(r_1^2+r_2^2\right)h,$$

जहाँ r_1 व r_2 आधारों की त्रिज्याएं हैं।

वर्तुल का वह भाग, जो वर्तुलखंड की वक्र सतह (चित्र 196 में AC) और कोनिक सतह ($OABCD$) से घिरा होता है, **वर्तुलांश** कहलाता है (वर्तुलखंड AC और कोन $OABCD$ का आधार $ABCD$ सामूहिक है)।

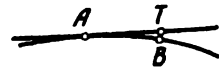
वर्तुलांश की **सतह** का क्षेत्रफल वर्तुलखंड और कोन की वक्र सतहों के क्षेत्रफलों को जोड़ने से मिलता है।

वर्तुलांश का **आयतन** ऐसे पिरामिड का आयतन है, जिसके आधार का क्षेत्रफल वर्तुलाकार सतह के वर्तुलांश द्वारा काट कर निकाले गये भाग के क्षेत्रफल S के बराबर होता है और जिसकी ऊँचाई वर्तुल की त्रिज्या के बराबर होती है :

$$V=\frac{1}{3}RS=\frac{2}{3}\pi R^2h,$$

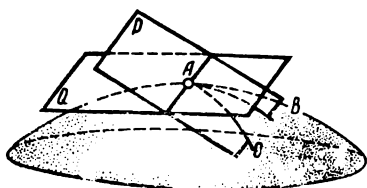
जहां h=वर्तुलांश में स्थित वर्तुलखंड की ऊँचाई है।

§ 173. वर्तुल, बेलन और कोन का स्पर्शक तल

किसी वक्र रेखा (जैसे वृत्त की परिधि) के छोटे-से चाप AB की जगह छोटे-से कर्त AT का भी उपयोग किया जा सकता है, जो चाप AB के बिंदु A पर स्पर्शक है (चित्र 197)। इससे त्रुटि नगण्य होगी। इसी तरह हम कहते हैं कि एक स्थान से दूसरे स्थान तक रास्ता बिल्कुल सीधा है; पर वास्तव में यह रास्ता वक्र होता है, वह पृथ्वी के गोले पर खींची गई वृहत परिधि का एक चाप होता है।

चित्र 197

ठीक इसी तरह से किसी वक्र (उदाहरणार्थ, वर्तुलाकार) सतह के छोटे-से भाग की जगह बिना किसी विशेष त्रुटि के स्पर्शक तल के छोटे-से भाग को काम में ला सकते हैं; यह ऐसा समतल है जिसका स्पर्श-बिंदु के गिर्द एक लघु भाग वक्र तल के लघु भाग से कोई खास भिन्न नहीं होता। यह तथ्य ही इस बात का कारण है कि लोग हजारों वर्षों तक पृथ्वी को चौरस मानते आ रहे थे।

पहले (§ 153 में) स्पर्शक रेखा की शुद्ध परिभाषा जिस प्रकार से दी गयी थी, उसी तरह से यहाँ स्पर्शक तल (समतल) की भी शुद्ध परिभाषा दी जा सकती है। वहां हम ने वक्र रेखा के दो बिंदुओं A और B पर विचार किया था, जिनमें से एक को दूसरी की ओर गतिशील माना गया था; वहाँ यह बताया गया था कि सरल रेखा AB एक सीमांत (चरम) स्थिति की ओर प्रवृत्त

होती है। अब किसी वक्र तल (जैसे वर्तुलाकार सतह) पर *तीन बिंदु* A, B, C लेते हैं (चित्र 198); इनसे एक कर्तक समतल P गुजारते हैं। दो बिंदुओं B और C को दो *भिन्न दिशाओं से* बिंदु A की ओर गतिशील करते हैं। इस प्रक्रिया में समतल P किसी चरम स्थिति Q की ओर प्रवृत्त होता है। समतल Q की स्थिति इस बात पर निर्भर नहीं करती कि बिंदु B और C कहाँ लिये गये थे और A की ओर किस प्रकार से गतिशील थे। समतल Q को बिंदु A पर स्पर्शक तल कहते हैं।*

चित्र 198

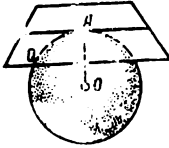
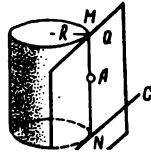
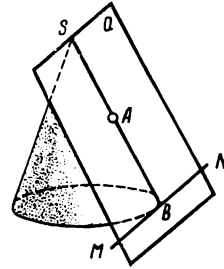
किसी सतह के तीन बिंदुओं A, B, C में से A की ओर B और C के गतिशील होने पर इनसे गुजरने वाला कर्तक समतल जिस समतल की ओर प्रवृत्त होता है, उसे उस सतह का बिंदु A पर **स्पर्शक तल** कहते हैं। *यह भी संभव है कि सतह के किसी बिंदु A पर स्पर्शक तल हो ही नहीं।* यथा, कोनिक सतह के शीर्ष पर स्पर्शक तल नहीं होता।

वर्तुलाकार सतह का स्पर्शक तल Q (चित्र 199) स्पर्श-बिंदु A से खींची गई त्रिज्या OA पर लंब होता है; *वर्तुलाकार सतह और उसके स्पर्शक तल का सिर्फ एक सामूहिक बिंदु होता है, जिस पर दोनों एक-दूसरे को स्पर्श करते हैं।*

अंतिम गुण को अक्सर वर्तुल के स्पर्शक तल की परिभाषा के रूप में भी प्रयुक्त करते हैं, पर यह परिभाषा सिर्फ वर्तुल के लिए ही काम आयेगी; अन्य सतहों, विशेषकर बेलन और कोन की सतहों के लिए स्पर्शक तल की यह परिभाषा गलत होगी। ऊपर दी गयी परिभाषा सभी प्रकार की सतहों के स्पर्शक तल के लिए सही है।

---

* यह मांग कि B और C भिन्न दिशाओं से बिंदु A की ओर गतिशील हों, बहुत महत्त्व रखती है। यदि, उदाहरण के लिए, दो यात्री एक ही याम्योत्तर पर (या दो भिन्न याम्योत्तरों पर, जो एक-दूसरे को बढ़ाने पर प्राप्त होती हैं) उत्तरी ध्रुव की ओर चल रहे हैं, तो ध्रुव A और यात्रियों B और C से गुजरने वाला समतल हर वक्त याम्योत्तर के समतल के साथ ही संपात करता रहेगा और इसलिए वह स्पर्शक तल की ओर भी नहीं प्रवृत्त होगा; वह जैसा कर्तक समतल था, वैसा ही कर्तक समतल बना रहेगा। उपरोक्त मांग को निम्न शब्दों में व्यक्त किया जा सकता है: **चाप AC तथा AB के कटान-बिंदु A पर उनकी स्पर्शक रेखाएं अवश्य ही भिन्न होनी चाहिए।**

ऋजु गोल बेलन का बिंदु A पर स्पर्शक तल Q (चित्र 200) बिंदु A से गुजरने वाली निमित्त रेखा MN और आधार की परिधि के बिंदु N (जो MN

चित्र 199 चित्र 200 चित्र 201

पर है) की स्पर्शक रेखा BC से होकर गुजरता है। ऋजु गोल बेलन की सतह का स्पर्शक तल उसके अक्ष के सभी बिंदुओं से दूरी R पर स्थित होता है, जहाँ R बेलन की त्रिज्या है।

ऋजु गोल कोन की सतह का बिंदु A पर स्पर्शक तल Q (चित्र 201) बिंदु A से गुजरने वाली निमित्त रेखा SB और आधार की परिधि की बिंदु B पर स्पर्शक रेखा MN से गुजरता है (बिंदु A शीर्ष के साथ संपात नहीं करता, और बिंदु B निमित्त SB पर है)।

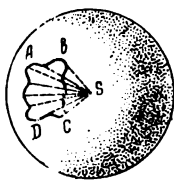
बेलन को प्रिज्म में अंतरित हुआ कहते हैं, यदि प्रिज्म का हर फलक बेलन का स्पर्शक तल होता है और बेलन तथा प्रिज्म के आधार एक ही समतल पर होते हैं। *बेलन को प्रिज्म पर परीत* हुआ कहते हैं, यदि दोनों के आधार एक ही समतल पर होते हैं और प्रिज्म का हर अस्र बेलन की निमित्त रेखा होती है।

कोन में अंतरित पिरामिड या *कोन पर परीत पिरामिड* की परिभाषाएं भी इसी प्रकार से दी जाती हैं।

§ 174 ठोस कोण

संवृत प्रवर्तक वाली कोनिक सतह (§ 168) के एक खंड से घिरे व्योम के भाग को ठोस कोण कहते हैं। जिस तरह समतल पर दो रेखाओं से बने कोण का क्षेत्र असीम विस्तृत होता है, उसी तरह ठोस कोण के भीतर का क्षेत्र असीम विस्तृत होता है (कल्पना करें एक अनंत दोने की)।

बहुफलकी कोण (§ 165) ठोस कोण के विशिष्ट रूप है (पिरामिडी सतह कोनिक सतह का विशिष्ट रूप है)।

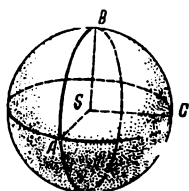
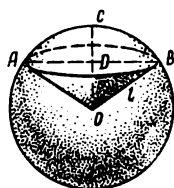
जिस प्रकार दो सरल रेखाओं के बीच का कोण वृत्त के चाप द्वारा नापा जाता है, उसी प्रकार ठोस कोण वर्तुलाकार सतह के टुकड़े से नापा जाता है। इसके लिए ठोस कोण के शीर्ष S से किसी भी त्रिज्या की एक वर्तुलाकार सतह खींचते हैं। इस सतह पर ठोस कोण बनाने वाली सतह एक भाग $ABCD$ अलग करती है (चित्र 202)। इस भाग का क्षेत्रफल त्रिज्या की लंबाई के साथ-साथ घटता-बढ़ता रहेगा, पर किसी एक त्रिज्या के लिए पूरी वर्तुलाकार सतह में इस भाग ($ABCD$) का अंश स्थिर रहता है। इसलिए ठोस कोण को $ABCD$ के क्षेत्रफल और वर्तुलाकार सतह के क्षेत्रफल के व्यतिमान के रूप में मापा जा सकता है। दो सरल रेखाओं के बीच का कोण भी इसी तरह से नापा जा सकता है—कोण के बीच स्थित चाप (जिसका केंद्र कोण के शीर्ष पर है) और उसी त्रिज्या वाले वृत्त की परिधि के व्यतिमान द्वारा (तब हम कहते : "पूर्ण चक्कर का कोण", "चौथाई चक्कर का कोण", "तिहाई चक्कर का कोण" आदि)।

चित्र 202

पर व्यवहार में ठोस कोण को नापने के लिए $ABCD$ के क्षेत्रफल और वर्तुल की त्रिज्या पर बने वर्ग के क्षेत्रफल के व्यतिमान का उपयोग होता है (इस वर्ग का क्षेत्रफल R^2 वर्तुलाकार सतह के क्षेत्रफल का समानुपाती है)। ठोस कोण की यह माप-विधि सरल रेखाओं के बीच के कोण को रेडियन (§ दे. 182) में नापने के सदृश है।

इस प्रकार, शीर्ष S वाले ठोस कोण की माप α शीर्ष S को केंद्र मानकर खींची गयी मनचाही त्रिज्या की वर्तुलाकार सतह पर प्रत ठोस कोण द्वारा काटे गये भाग का क्षेत्रफल और ली गयी त्रिज्या के वर्ग का व्यतिमान है :

$$\alpha = \frac{\text{क्षेत्रफल } ABCD}{R^2}$$

उदाहरण 1. तीन परस्पर लंब समतलों (जैसे कमरे में दो दीवारों और फर्श) से बना ठोस पिंड $\pi/2$ के बराबर होता है। सचमुच में, यदि ऐसे कोण के शीर्ष S से कोई वर्तुलाकार सतह खींची जाये, तो प्राप्त वर्तुल की सतह पर 1/8 भाग अलग हो जायेगा (चित्र 203), क्योंकि तीन पर-

चित्र 203

चित्र 204

स्पर लंब समतल वर्तुल को 8 बराबर भागों में बाँटते हैं (कल्पना करें कि ग्लोब के याम्योत्तरों से दो परस्पर लंब समतल गुजर रहे हैं और तीसरा समतल विष्वक से गुजर रहा है; इससे ग्लोब के 8 टुकड़े मिलेंगे); इसलिए एक भाग का क्षेत्रफल $4\pi R^2 : 8 = \frac{\pi R^2}{2}$ होगा; इसका त्रिज्या R^2 के साथ व्यतिमान $\frac{\pi}{2}$ के बराबर होगा।

उदाहरण 2. गोल कोन के शीर्ष पर स्थित ठोस कोण ज्ञात करें, यदि कोन की ऊँचाई आधार की त्रिज्या के बराबर है।

कोन के शीर्ष से उसकी निमित्त रेखा l के बराबर त्रिज्या वाला वर्तुल खींचते हैं (चित्र 204)। कोन की ऊँचाई OD को l में व्यक्त किया जा सकता है : $OD = \frac{l\sqrt{2}}{2}$; वर्तुलखंड ABC की ऊँचाई $CD = l - \frac{l\sqrt{2}}{2}$ है; ठोस पिंड द्वारा काटी गयी वर्तुली सतह इस वर्तुलखंड की वक्र सतह के बराबर है (§ 172) :

$$2\pi l \cdot CD = 2\pi l^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

अतः ठोस कोण की नाप है :

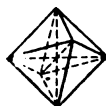
$$2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

ठोस कोण नापने की इकाई ऐसा ठोस कोण है जो उसके शीर्ष को केंद्र मान कर खींचे गये वर्तुल की सतह पर त्रिज्या के वर्ग जितना क्षेत्रफल काटता है। ऐसे ठोस पिंड को एक स्टेरेडियन कहते हैं।

§ 175. नियमित बहुफलक

नियमित बहुफलक के सभी फलक तुल्य नियमित बहुभुज होते हैं और उसके हर शीर्ष पर समान संख्या में अस्र संसृत होते हैं।

परस्पर विषमरूप नियमित बहुभुज असंख्य हैं, पर परस्पर विषमरूप नियमित बहुफलकों की संख्या बहुत सीमित है। *उत्तल नियमित बहुफलक सिर्फ पांच हो सकते हैं* (इनके अतिरिक्त चार अवतल नियमित बहुफलक भी हैं) :

1. चतुर्फलक (चित्र 205);
2. षटफलक (चित्र 206), यह और कुछ नहीं एक घन है;
3. अष्टफलक (चित्र 207);
4. द्वादशफलक (चित्र 208);
5. विंशफलक (चित्र 209).

चित्र 205

चित्र 206

चित्र 207

चित्र 208

चित्र 209

[ऊपर दिये गये नाम नियमित बहुफलकों के हैं; तदनुरूप मनचाहे बहुफलकों के नाम क्रमशः चौफलक, छफलक, अठफलक, बारहफलक, बीसफलक रखे जा सकते हैं]।

निम्न सारणी में उत्तल नियमित बहुफलकों की विशेषताएं दी गयी हैं (a एक अस्र की लंबाई है) :

	एक फलक में भुजाओं की संख्या	एक शीर्ष पर संसृत अस्रों की संख्या	फलकों की संख्या	शीर्षों की संख्या	अस्रों की संख्या	सतह (xa^2)	आयतन (xa^3)
1. चतुर्फलक	3	3	4	4	6	1.73	0.12
2. षट्फलक	4	3	6	8	12	6.00	1
3. अष्टफलक	3	4	8	6	12	3.46	0.47
4. द्वादशफलक	5	3	12	20	30	20.64	7.66
5. विंशफलक	3	5	20	12	30	8.66	2.18

हर नियमित बहुफलक में वर्तुल अंतरित किया जा सकता है; हर नियमित बहुफलक पर वर्तुल परीत किया जा सकता है।

§ 176. सममिति

सममिति एक यूनानी शब्द symmetria का हिन्दी अनुवाद है, जिसका अर्थ 'संतुलित अनुपात' और इससे उत्पन्न 'सुन्दरता' है। विस्तृत अर्थ में यह शब्द पिंड या आकृति की आंतरिक संरचना में विद्यमान किसी भी तरह की नियमितता ('सुडौलपन') को व्यक्त करता है। विभिन्न प्रकार की सममितियों का अध्ययन ज्यामिति की एक बहुत बड़ी और महत्त्वपूर्ण शाखा है, जो प्रकृति-विज्ञान और तकनीक के अनेक क्षेत्रों से गहरा संबंध रखती है; कपड़े पर बेल-बूटों की छपाई से लेकर द्रव्य की सूक्ष्म बनावट तक की समस्याओं को हल करने में इसकी सहायता ली जाती है।

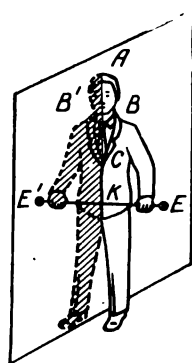
सममिति के सरलतम प्रकार निम्न तीन हैं :

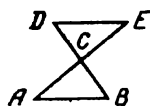
1. **दर्पणी सममिति** से हमारा परिचय दैनंदिन प्रेक्षणों से होता रहता है। जैसा कि नाम से ही स्पष्ट है, दर्पणी सममिति किसी वस्तु और उसके दर्पणी बिंब के बीच संबंध स्थापित करती है। ज्यामिति में दर्पणी सममिति की परिभाषा निम्न है : *समतल P* (दर्पण या **सममिति के समतल**) *के सापेक्ष सममित आकृति उस आकृति को कहते हैं, जिसमें हर बिंदु E के अनुरूप एक ऐसा बिंदु E' (बिंब) उपस्थित रहता है कि कर्ण EE' समतल P पर लंब होता है और समतल P द्वारा समद्विभाजित होता है।*

कहते हैं कि आकृति (या पिंड) दर्पणतः सममित है, यदि आकृति (या पिंड) को दो सममित भागों में बाँटने वाला कोई समतल अपना अस्तित्व रखता है। चित्र 210 में रेखा ABC रेखा $AB'C$ के साथ सममित है; दायाँ हाथ बायें हाथ के साथ सममित है।

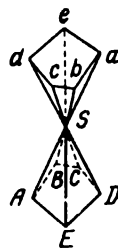
चित्र 210

इस बात पर ध्यान देना महत्त्वपूर्ण है कि परस्पर सममित पिंड एक-दूसरे के साथ संपात नहीं करते, वे एक-दूसरे का स्थान नहीं ले सकते। बायें हाथ का दस्ताना दायें हाथ के काम नहीं आता।

सममित आकृतियां बिल्कुल समान-सी लगती हैं, पर उनमें बहुत अंतर होता है। यह आप दर्पण के पास किसी किताब के खुले पृष्ठ को रखकर देख ले सकते हैं; दर्पण में दिखने वाले पृष्ठ को पढ़ना सरल काम नहीं होगा।

समामित वस्तुओं को सर्वांग अर्थ में बराबर नहीं कह सकते। उन्हें **दर्पणतः समतुल्य** कह सकते हैं। दर्पणतः समतुल्य सामान्यतया ऐसे पिंडों (आकृतियों) को कहते हैं, जिन्हें एक-दूसरे के सापेक्ष इधर-उधर खिसका कर एक दर्पणतः सममित पिंड (आकृति) बनाया जा सके।

2. केंद्रपरक सममिति. आकृति (या पिंड) को केंद्र O के सापेक्ष सममित तब कहते हैं, जब इस आकृति (पिंड) में हर बिंदु E के सापेक्ष इसी आकृति (पिंड) में एक ऐसा बिंदु A भी होता है कि कर्त EA बिंदु C से गुजरता है और बिंदु C पर समद्विभाजित होता है (चित्र 211)। बिंदु C को **सममिति-केंद्र** कहते हैं। आकृति $ABCDE$ दो त्रिभुजों ABC तथा EDC (चित्र 211) से बनी हुई है, जिनमें सानुरूप भुजाएं बराबर हैं और एक दूसरे को बढ़ाने पर प्राप्त होती हैं (DE और AB को छोड़ कर) अतः आकृति $ABCDE$ केंद्रपरक सममित है और इसमें एक सममिति-केंद्र C है। किन्हीं भी दो सानुरूप बिंदुओं के बीच दो तुल्य कर्त पड़े होते हैं (जैसे A और E के बीच AC और CE)। केंद्रपरक सममिति रखने वाले पिंड के दोनों अर्धों में सानुरूप कोण भी तुल्य होते हैं। दर्पणी सममिति वाले पिंडों की तरह ही केंद्रपरक सममिति वाले पिंड को भी एक अर्ध की जगह दूसरे अर्ध को नहीं रखा जा सकता। यही नहीं, केंद्रपरक सममिति वाले पिंड के एक अर्ध को सममिति-केंद्र से गुजरने वाले किसी भी अक्ष के गिर्द 180° का घूर्णन देने पर वह दूसरे अर्ध के साथ दर्पणी सममिति रखने लगता है (घूर्णनाक्ष पर लंब समतल के सापेक्ष)। इसीलिए केंद्रपरक सममिति वाले पिंड के दोनों अर्ध परस्पर दर्पणी समतुल्य होते हैं।

चित्र 211

उदाहरण. यदि पिरामिड $SABCDE$ (चित्र 212) के अस्त्र $SA, SB, SC, ...$ में से प्रत्येक को स्वयं के बराबर दूरी तक बढ़ाया जाये, तो दो पिरामिड $SABCDE$ और $Sabcde$ मिलकर केंद्र S के सापेक्ष एक केंद्रपरक सममित पिंड बनायेंगे।

यदि चित्र 212 का पिरामिड $SABCDE$ खोखला है और उसकी पेंदी नहीं है (पिरामिडी दोने की तरह है), तो उसे भीतर से उलट कर (कमीज की तरह) उसमें पिरामिड $Sabcde$ रख लिया जा सकता है; बिना उलटे सामान्यतया यह संभव नहीं है, क्योंकि सामान्य स्थिति में $SABCDE$ और $Sabcde$

चित्र 212

तुल्य नहीं हैं, वे दर्पणतः समतुल्य है। विशेष स्थितियों में (उदाहरणार्थ, जब पिरामिड $SABCDE$ नियमित होता है), दोनों भाग तुल्य भी हो सकते हैं।

3. **घूर्णन की सममिति.** पिंड (या आकृति) में घूर्णन की सममिति होती है, यदि उसे किसी सरल रेखा AB (**सममिति के अक्ष**) के गिर्द $\frac{360}{n}$ (n कोई पूर्ण संख्या) का घूर्णन देने पर वह अपनी आरंभिक स्थिति के साथ संपात कर जाता है। $n=2, 3, 4$. आदि होने पर क्रमशः दूसरी, तीसरी, चौथी आदि कोटि का सममिति-अक्ष प्राप्त होता है।

उदाहरण. वृत्त को केंद्रीय कोण $120°$ वाले तीन बराबर वृत्तांशों में काट लेते हैं (चित्र 213)। इन वृतांशों को बिना दूसरी तरफ उलटे एक पर एक रख कर उनमें कोई आकृति a काट लेते हैं। वृत्तांशों को पुनः पहले की तरह वृत्त के रूप में जोड़ कर एक आकृति (तीन छेदों वाला एक वृत्त) प्राप्त करते हैं, जिसमें घूर्णन की सममिति होती है; सममिति-अक्ष तीसरी कोटि का होता है और वह चित्र पर लंब की दिशा में होता है। आकृति को $120°$ का घूर्णन देने पर वह पूर्णतया आरंभिक स्थिति के साथ संपात कर जाता है।

चित्र 213

अधिक संकीर्ण अर्थ में सममिति-अक्ष दूसरी कोटि के सममिति-अक्ष को कहते हैं; इस स्थिति में अक्षीय सममिति प्राप्त होती है, जिसे निम्न तौर पर परिभाषित किया जा सकता है: आकृति (या पिंड) में अक्षीय सममिति होती है, यदि उसके हर बिंदु E के अनुरूप उसी आकृति में एक ऐसा बिंदु F है कि कर्त EF अक्ष पर लंब होता है, उसे काटता है और कटान-बिंदु पर समद्विभाजित होता है। ऊपर विचाराधीन त्रिभुजों के जोड़े (चित्र 211) में केंद्रपरक सममिति के अतिरिक्त अक्षीय सममिति भी है; उसका सममिति-अक्ष बिंदु C से चित्र की लंब दिशा में गुजरता है।

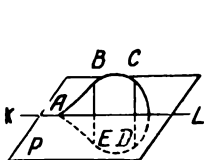
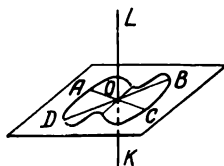
उपरोक्त प्रकार की सममितियों के उदाहरण।

वर्तुल में केंद्रपरक, दर्पणी और अक्षीय सममितियां होती हैं। इसमें सममिति-केंद्र वर्तुल का केंद्र होता है, सममिति-तल किसी भी वृहत्त वृत्त का समतल होता है, सममिति-अक्ष कोई भी व्यास होता है। अक्ष की कोटि कोई भी पूर्ण संख्या हो सकती है।

ऋजु गोल कोन में अक्षीय सममिति (किसी भी कोटि की) होती है; सममिति-अक्ष कोन का अक्ष है।

नियमित पंचभुज प्रिज्म में समसमिति-तल होता है, जो आधारों के समानांतर उनसे तुल्य दूरियों पर गुजरता है; उसका समसमिति-अक्ष 5-वीं कोटि का होता है। समसमिति-तल का काम प्रिज्म के पार्श्व फलकों से बने किसी दुफलक कोण को समद्विभाजित करने वाला समतल भी कर सकता है।

§ 177. समतली आकृतियों की सममिति

1. दर्पणी-अक्षीय सममिति. यदि समतली आकृति $ABCDE$ (चित्र 214) समतल P के सापेक्ष सममित है (जो तभी संभव है, जब समतल P और

चित्र 214 चित्र 215

$ABCDE$ परस्पर लंब होंगे), तो इन दोनों तलों की कटान-रेखा KL आकृति $ABCDE$ के लिए दूसरी कोटि का समसमिति-अक्ष है।

इसके विलोम, यदि आकृति $ABCDE$ का सममिति-अक्ष इस पर स्थित सरल रेखा KL है, तो यह आकृति KL से अपने लंब खींचे गये समतल P के सापेक्ष सममित होगी। इसीलिए अक्ष KL को समतली आकृति $ABCDE$ की दर्पणी रेखा भी कहते हैं।

दो दर्पणतः सममित समतली आकृतियों को हमेशा ही एक-दूसरे पर संपात कराया जा सकता है, पर इसके लिए उनमें से किसी एक (या दोनों) को उनके सामूहिक समतल पर से हटाना पड़ेगा।

2. केंद्रपरक सममिति. यदि समतली आकृति $ABCD$ (चित्र 215) के तल पर लंब सरल रेखा KL आकृति का दूसरी कोटि वाला अक्ष है, तो KL और आकृति के तल का कटान-बिंदु O आकृति $ABCD$ का सममिति-केंद्र है।

विलोमतः, यदि समतली आकृति $ABCD$ का सममिति केंद्र O है (इसे प्रत्त आकृति पर ही होना चाहिए), तो बिंदु O से आकृति पर लंब रेखा आकृति का दूसरी कोटि वाला सममिति-अक्ष है।

इस प्रकार, दो केंद्रपरक सममित समतली आकृतियों को उनके तल से हटाये बगैर उन्हें एक-दूसरे पर रखा (संपात कराया) जा सकता है। इसके

लिए इनमें से किसी एक को सममिति-केंद्र के गिर्द 180° पर घूर्णन देना काफी है।

दर्पणी और केंद्रपरक, दोनों ही सममितियों में आकृति अनिवार्य रूप से दूसरी कोटि का सममिति-अक्ष रखती है, पर दर्पणी सममिति में यह अक्ष आकृति के ही समतल पर स्थित रहता है और केंद्रपरक सममिति में—आकृति के समतल पर लंब होता है।

इसीलिए तलमिति में सिर्फ प्रथम स्थिति को अक्षीय सममिति कहते हैं।

§ 178. पिंडों की समरूपता

व्योम पिंडों और आकृतियों की **समरूपता** समतली आकृतियों की समरूपता (§ 152) की तरह ही परिभाषित हो सकती है। दो पिंड **समरूप** होते हैं, यदि एक की सभी रैखिक मापों को समान अनुपात में बढ़ाने (या घटाने) से दूसरा पिंड प्राप्त हो जाता है। कोई मशीन और उसका छोटा प्रतिमान समरूप पिंड हैं।

दो पिंड (या आकृतियाँ) **दर्पणतः समरूप** होते हैं, यदि उनमें से एक पिंड दूसरे के दर्पणी बिंब के साथ समरूप होता है। यथा, फोटोचित्र और उसका निगेटिव दर्पणतः समरूप होते हैं। भिन्न साइज के, पर एक ही कटिंग के दो जूते—एक बायें पैर का और दूसरा दायें पैर का—लिये जायें, तो वे भी दर्पणतः समरूप होंगे।

समरूप तथा दर्पणतः समरूप आकृतियों में सभी सानुरूप कोण (रैखिक और दुफलकी) परस्पर बराबर होते है। समरूप पिंडों में सानुरूप बहुफलकी तथा ठोस कोण भी परस्पर बराबर होते हैं, दर्पणतः समरूप पिंडों में वे दर्पणतः समतुल्य होते हैं।

यदि दो चौफलकों (अर्थात् दो तिकोण पिरामिडों) *के सानुरूप अस्र समानुपाती हैं* (अर्थात् सानुरूप फलक समरूप हैं), *तो वे या तो समरूप हैं या दर्पणतः समरूप हैं।* अतः, उदाहरण के लिए, यदि प्रथम चौफलक के अस्र दूसरे से दुगुना अधिक हैं, तो उसकी ऊँचाई और उस पर परीत वर्तुल की त्रिज्या भी दूसरे चौफलक की ऊँचाई और उस पर परीत वर्तुल की त्रिज्या से दुगना अधिक होगी।

अधिक संख्या में फलकों वाले बहुफलकों के लिए यह प्रमेय सही नहीं है। उदाहरण के लिए मान लें कि 12 परस्पर बराबर छड़ों के सिरों को इस प्रकार

में जोड़ा गया है कि वे एक घन के अस्र बन जाते हैं। यदि उन्हें चूलों के सहारे जोड़ा गया है, तो छड़ों को बिना लमड़ाये ही उनमें प्राप्त आकृति को घन से समांतर छफलक P में परिणत किया जा सकता है। P का समरूप समांतर छफलक P_1 किसी घन के साथ न तो समरूप होगा, न दर्पणतः समरूप होगा, यद्यपि उसके अस्र घन के अस्रों के साथ समानुपाती होंगे। छः छड़ों से बने चौफलक के साथ यह बात नहीं होगी, क्योंकि उसका रूप ज्यों का त्यों बना रहेगा, चाहे उसके सभी जोड़ चूलों से क्यों न बने हों।

इस प्रकार, सभी अस्रों का समानुपाती होना पिंडों की समरूपता या दर्पणी समरूपता के लिए व्यापकतः पर्याप्त शर्त नहीं है।

दो प्रिज्म या दो पिरामिड समरूप या दर्पणतः समरूप होते हैं, यदि एक का आधार तथा कोई एक पार्श्विक फलक दूसरे के सानुरूप आधार तथा पार्श्विक फलक के साथ समरूप हैं और इसके अतिरिक्त यदि दोनों प्रिज्मों (पिरामिडों) में इन फलकों से बने दुफलकी कोण परस्पर बराबर हैं।

दो नियमित प्रिज्म या पिरामिड (जिनमें फलकों की संख्याएं समान हैं) तभी समरूप होते हैं, जब उनके आधारों की त्रिज्याओं का व्यतिमान उनकी ऊँचाइयों के व्यतिमान के बराबर होता है। दो गोल बेलन या कोन तब समरूप होते हैं, जब दोनों में आधार की त्रिज्या और ऊँचाई के व्यतिमान परस्पर बराबर होते हैं।

समरूप पिंडों में सभी सानुरूप समतली तथा वक्र सतहों के क्षेत्रफल सानुरूप कर्तों के वर्गों के साथ समानुपाती होते हैं, अर्थात् क्षेत्रफलों का व्यतिमान समरूपता-व्यतिमान के वर्ग के बराबर होता है (समरूपता-व्यतिमान सानुरूप कर्तों का व्यतिमान है, जो समरूपता का अनुपात व्यक्त करता है)।

समरूप पिंडों का आयतन और साथ ही उनके सानुरूप टुकड़ों के आयतन सानुरूप कर्तों के घनों के साथ समानुपाती होते हैं (अर्थात् आयतनों का व्यतिमान कर्तों के घनों के व्यतिमान के बराबर होता है)।

अंतिम दो गुणों की सहायता से अनेक जटिल कलन सरल हो जाते हैं।

उदाहरण 1. 5 m व्यास वाले अर्ध वर्तुलाकार गुँबद रंगने में 6.5 kg तेल खर्च होता है। 8 m व्यास वाले गुंबद को रंगने में कितना तेल खर्च होगा?

दो अर्ध वर्तुल परस्पर समरूप पिंड होते हैं। उनकी सतहें (और इसीलिए उनको रंगने के लिए तेल की आवश्यक मात्राएं) व्यासों के वर्गों के साथ समानुपाती होंगी। तेल की इष्ट मात्रा को x से द्योतित करने पर :

$$\frac{x}{6.5} = \left(\frac{8}{5}\right)^2, \quad x = 6.5\left(\frac{8}{5}\right)^2 \approx 16.6 \text{ kg}.$$

उदाहरण 2. 11 cm ऊँचाई और 8 cm व्यास वाले बेलनाकार डिब्बे में कोई सामग्री 0.5 kg की मात्रा में अँटती है। उसी सामग्री की 1 kg मात्रा के लिए उसी आकार के डिब्बे की मापें क्या होंगी ?

इष्ट ऊँचाई को h और इष्ट व्यास को d से द्योतित करने पर :

$$\left(\frac{h}{11}\right)^3=\frac{1}{0.5}=2, \text{ जिससे}$$

$$h=11\sqrt[3]{2}\approx \mathbf{14\ cm.}$$

ठीक इसी प्रकार से : $d=8\sqrt[3]{2}\approx \mathbf{10\ cm.}$

§ 179. पिंडों के आयतन और उनकी सतहें

द्योतन. V=आयतन, S=आधार का क्षेत्रफल, S_{pa}=पार्श्विक सतह का क्षेत्रफल, P=पूर्ण सतह, h=ऊँचाई; a, b, c—ऋजु छफलक की मापें; A=नियमित पिरामिड और नियमित उच्छेदित पिरामिड का दूरक, l=कोन की निमित्त रेखा, p=आधार की परिधि या परिमिति, r=आधार की त्रिज्या, d=आधार का व्यास, R=वर्तुल की त्रिज्या, D=वर्तुल का व्यास।

प्रिज्म, ऋजु और तिर्यक; **समांतर छफलक** :

$$V=Sh.$$

ऋजु प्रिज्म :

$$S_{pa}=ph.$$

ऋजकोणिक समांतर छफलक :

$$V=abc,\ P=2\ (ab+bc+ac).$$

घन :

$$V=a^3,\ P=6a^2.$$

पिरामिड, नियमित और अनियमित :

$$V=\tfrac{1}{3}Sh.$$

पिरामिड, नियमित :

$$S_{pa}=\tfrac{1}{2}pA.$$

उच्छेदित पिरामिड, नियमित और अनियमित :

$$V=\tfrac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h.$$

उच्छेदित पिरामिड, नियमित :

$$S_{pa}=\frac{1}{2}(p_1+p_2)A.$$

बेलन, गोल (ऋजु या तिर्यक) :

$$V=Sh=\pi r^2h=\frac{1}{4}\pi d^2h.$$

बेलन, गोल, ऋजु :

$$S_{pa}=2\pi rh=\pi dh.$$

कोन, गोल (ऋजु या तिर्यक) :

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{12}\pi d^2h.$$

कोन, गोल ऋजु :

$$S_{pa}=\frac{1}{2}pl=\pi rl=\frac{1}{2}\pi dl.$$

कोन, गोल, उच्छेदित (ऋजु, तिर्यक) :

$$V=\frac{1}{3}\pi h(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)=\frac{1}{12}\pi h(d_1^2+d_1d_2+d_2^2).$$

कोन, ऋजु गोल, उच्छेदित :

$$S_{pa}=\pi(r_1+r_2)l=\frac{1}{2}\pi(d_1+d_2)l.$$

वर्तुल :

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{6}\pi D^3;\ P=4\pi R^2=\pi D^2.$$

अर्ध वर्तुल :

$$V=\frac{2}{3}\pi R^3=\frac{1}{12}\pi D^3,\ S=\pi R^2=\frac{1}{4}\pi D^2,$$
$$S_{pa}=2\pi R^2=\frac{1}{2}\pi D^2,\ P=3\pi R^2=\frac{3}{4}\pi D^2.$$

वर्तुलखंड :

$$V=\pi h^2(R-\frac{1}{3}h)=\frac{\pi h}{6}(h^2+3r^2),$$
$$S_{pa}=2\pi Rh=\pi(r^2+h^2),\ P=\pi(2r^2+h^2).$$

वर्तुल-परत :

$$V=\frac{1}{6}\pi h^3+\frac{1}{2}\pi(r_1^2+r_2^2)h,\ S_{pa}=2\pi Rh.$$

वर्तुलांश :

$V=\frac{2}{3}\pi R^2h'$ (h' वर्तुलांश में निहित वर्तुलखंड की ऊँचाई है)

खोखला वर्तुल :

$$V=\frac{4}{3}\pi(R_1^3-R_2^3)=\frac{\pi}{6}(D_1^3-D_2^3);$$
$$P=4\pi(R_1^2+R_2^2)=\pi(D_1^2+D_2^2).$$

(R_1 व R_2 आंतरिक व बाह्य वर्तुलाकार सतहों की त्रिज्याएँ हैं)।

V. त्रिकोणमिति

§ 180. त्रिकोणमिति की विषय-वस्तु

जैसा कि नाम से स्पष्ट है, त्रिकोणमिति त्रिभुज की मापों का अध्ययन करती है, जिसका मुख्य उद्देश्य है त्रिभुज से संबंधित ज्ञात राशियों के आधार पर त्रिभुज से संबंधित अज्ञात राशियों का मान कलित करना, अर्थात्, जैसा कि अक्सर कहते हैं, *त्रिभुज हल करना*। यथा, त्रिकोणमिति में त्रिभुज की प्रत्त भुजाओं की सहायता से उसके कोण ज्ञात करते हैं या प्रत्त क्षेत्रफल और दो कोणों की सहायता से उसकी भुजाएं ज्ञात करते हैं, आदि। चूंकि ज्यामिति में कलन से संबंधित किसी भी प्रश्न को त्रिभुज का प्रश्न बनाया जा सकता है, इसलिए पूरी तलमिति, व्योममिति और साथ ही प्रकृतिविज्ञान और तकनीक के सभी क्षेत्रों में इसका उपयोग होता है।

वर्तुली त्रिभुजों (§ 171) का हल *वर्तुली त्रिकोणमिति* में अध्ययन किया जाता है; इसके विपरीत, साधारण त्रिभुजों का हल *समतली या ऋजुरैखिक त्रिकोणमिति* के अध्ययन-क्षेत्र में आता है।

किसी मनचाहे त्रिभुज के कोणों को उसकी भुजाओं के साथ बीजगणितीय सूत्रों के सहारे सीधे संबंधित नहीं किया जा सकता। इसीलिए त्रिकोणमिति कोणों के अतिरिक्त तथाकथित त्रिकोणमितिक राशियों पर भी विचार करती है (इनके नाम और इनकी परिभाषाएं दे. § 212 में)। इन राशियों को त्रिभुज की भुजाओं के साथ बीजगणितीय सूत्रों के सहारे संबंधित किया जा सकता है। दूसरी ओर से, ये राशियाँ प्रत्त कोणों की सहायता से कलित हो सकती हैं और यदि ये ज्ञात हैं, तो इनकी सहायता से कोण कलित हो सकते हैं। यह सच है कि इन कलनों में श्रम और समय बहुत ज्यादा लगता है, पर इन्हें एक ही बार पूरा करके सारणियों में अंकित कर लिया गया है; बार-बार इन कलनों को दोहराने की जरूरत नहीं।

हर त्रिकोणमितिक राशि का मान कोण के साथ-साथ बदलता रहता है; अन्य शब्दों में, त्रिकोणमितिक राशि कोण का फलन है (§ 209)। इसीलिए 'त्रिकोणमितिक फलन' नाम दिया गया है।

विभिन्न त्रिकोणमिति फलनों के बीच भी महत्त्वपूर्ण संबंध स्थापित किये गये हैं, जिनके उपयोग से कलन सरल हो जाता है ।

त्रिकोणमिति के जिस अनुच्छेद में इन संबंधों का अध्ययन होता है, उसे '**कोणमिति**' कहते हैं ।

§ 181. त्रिकोणमिति के विकास का एक ऐतिहासिक सर्वेक्षण

त्रिभुजों का हल ढूढ़ने की आवश्यकता सबसे पहले ज्योतिर्विज्ञान में पड़ी थी और लंबी अवधि तक त्रिकोणमिति का विकास तथा अध्ययन ज्योतिर्विज्ञान के ही एक अनुच्छेद के रूप में होता रहा ।

जहां तक हमें ज्ञात है, त्रिभुजों (वर्तुली) के हल की विधि पहले-पहल लिखित रूप में यूनानी ज्योतिर्विज्ञानी हिपार्कस (Hipparchus) ने ईसा पूर्व दूसरी शती में प्रस्तुत की थी; उनकी कृति हमारे दिनों तक सुरक्षित नहीं रही । यूनानी त्रिकोणमिति की उच्चतम उपलब्धि का श्रेय ज्योतिर्विज्ञानी प्तोलेमी (Ptolemy, दूसरी शती ई० पू०) को दिया जाता है; कोपेरनिकस (Copernicus) से पहले विश्व का केंद्र पृथ्वी को मानने का जो विचार प्रचलित था, उसके प्रणेता प्तोलेमी ही थे ।

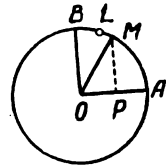
यूनानी ज्योतिर्विज्ञानी ज्या, कोज्या, स्पर्शज्या आदि नहीं जानते थे । इन राशियों की सारणी की जगह वे कोण-निरूपक चापों के सहारे परिधि के चाप-कर्ण बताने वाली सारणियों का इस्तेमाल करते थे । चाप डिग्रियों और मिनटों में नापे जाते थे. चापकर्ण भी डिग्रियों में नापे जाते थे (एक डिग्री त्रिज्या का साठवां अंश था) । डिग्री मिनटों और मिनट सेकेंडों में विभक्त थे । साठ-साठ भागों में विभक्त करने की प्रथा को यूनानियों ने बेबीलोनवासियों से ग्रहण किया था (दे. § 22) ।

प्तोलेमी की सारणी में $\frac{1}{2}^\circ$ का अंतराल रखने वाले सभी चापों के चापकर्ण* एक सेकेंड तक की शुद्धता से दिये गये थे । अंतर्वेशन की सहायता से इसी शुद्धता के साथ किसी भी चाप का चापकर्ण ज्ञात किया जा सकता था (अंतर्वेशन को सरल करने के लिए प्तोलेमी ने $1'$ तक के सुधार भी दिये थे) ।

---

* यदि विचाराधीन चाप के अर्ध पर बना केंद्रीय कोण लिया जाये, तो चापकर्ण इस कोण की ज्या-रेखा का दुगुना होगा । इसीलिए प्तोलेमी की सारणी ज्या की $\frac{1}{4}^\circ$ अंतराल वाली पांच-अंकी सारणी के समतुल्य थी ।

सारणी के लिए मान कलन करने में उन्होंने अंतर्गत चतुर्भुज के कर्णों में संबंधित प्रमेय (§ 158) का सहारा लिया था, जिसे उन्होंने स्वयं स्थापित किया था।

त्रिकोणमिति का महत्वपूर्ण विकास मध्ययुगीन भारतीय ज्योतिर्विज्ञानियों ने किया। यूनानियों की तरह भारतीयों ने भी चाप को डिग्री में नापने की बेबीलोनी प्रथा को अपनाया, पर भारतीय विद्वान चापों का चापकर्ण नहीं, बल्कि चापों की ज्या-रेखा तथा कोज्या-रेखा को नापते थे (चित्र 216 में चाप AM की ज्या-रेखा PM है और कोज्या-रेखा OP है)। इसके अतिरिक्त वे रेखा PA (शरज्या) का भी उपयोग करते थे, जिसे बाद में योरपीय विद्वानों ने sinus versus (अंग्रेजी में versed sine) का नाम दिया।

चित्र 216

कर्ण MP, OP, PA नापने की इकाई चापीय मिनट था। यथा, चाप $AB=90°$ की ज्या-रेखा वृत्त की त्रिज्या OB थी; त्रिज्या के बराबर लंबाई वाले चाप AL में (लगभग) $57°18'=3438'$ मिनट होता था। इसीलिए $90°$ के चाप की ज्या-रेखा $3438'$ के बराबर थी।

भारतीय विद्वानों द्वारा बनायी गयी ज्या के मानों की सारणी प्तोलेमी की सारणी जितनी शुद्ध नहीं थी; उसमें मान $3°45'$ (अर्थात् चतुर्थांश के चाप के $\frac{1}{24}$ अंश) के अंतरालों पर दिये गये थे (यह 4-5-वीं शती की बात है)।

इसके बाद त्रिकोणमिति का विकास 9-14-वीं शतियों में अरबी भाषा-भाषी विद्वानों की कृतियों में हुआ। दसवीं शती में बगदाद के विद्वान—बुजान के मोम्मद—ने (जो अबू-अल-वाफ नाम से प्रसिद्ध थे) ज्या और कोज्या की रेखाओं के साथ-साथ स्पर्शज्या, कोटि स्पर्शज्या, व्युत्क्रम ज्या और व्युत्क्रम कोज्या की रेखाओं को शामिल किया। उन्होंने इनकी वही परिभाषाएं दीं, जो हमारी पाठ्य-पुस्तकों में दी जाती हैं। अबू-अल-वाफ ने इन रेखाओं के महत्त्वपूर्ण आपसी संबंध भी स्थापित किये (जो § 193 के सूत्रों के अनुरूप हैं)।

महान मुसलमान विद्वान, तूस के नसीर एद्दीन (1201-1274) की कृतियों में त्रिकोणमिति एक स्वतंत्र विषय के रूप में प्रकट हुई। नसीर एद्दीन ने समतली और वर्तुली त्रिभुजों के हल की सभी स्थितियों पर एक-एक कर विचार किया था; उन्होंने हल की कई नयी विधियां भी दी थीं।

12-वीं शती में अरबी भाषा से ज्योतिर्विज्ञान पर कई कृतियां लातीनी में अनूदित हुईं; इन्हीं के माध्यम से योरपवासियों का त्रिकोणमिति के साथ प्रथम

परिचय हुआ ।* पर योरपवासी अरबी ज्ञान-विज्ञान से पूरी तरह से परिचित नहीं हो पाये। विशेषकर नसीर एट्टीन की कृति से वे अनभिज्ञ रहे। 15-वीं शती के मेधावी जर्मन ज्योतिर्विज्ञानी योहान म्यूलर ने (Johann Müller, 1436-1476), जो रेगियोमोंटानुस (Regiomontanus) नाम से अधिक प्रसिद्ध थे, नसीर एट्टीन के प्रमेयों की फिर से खोज की।

रेगियोमोंटानुस ने ज्या के मानों की विस्तृत सारणी तैयार की (1 मिनट के अंतराल पर सात सार्थक अंकों की शुद्धता से)। उन्होंने ही पहले-पहल त्रिज्या के षष्ठभू विभाजन का विचार त्याग कर दूसरी प्रणाली अपनायी: उन्होंने ज्या-रेखा नापने के लिए त्रिज्या का एक करोड़वाँ भाग इकाई के रूप में चुना। इस प्रकार, ज्या को पूर्ण संख्याओं (न कि षष्टभू अंशों) में व्यक्त किया गया। अब दशमलव भिन्नों के प्रयोग तक सिर्फ एक कदम रह गया था, पर इसमें करीब 100 वर्ष और लगने थे (दे. § 46)।

रेगियोमोंटानुस की सारणी के बाद और भी विस्तृत सारणियाँ बनायी गयीं। कोपेरनिकस के मित्र रेटिकुस (Rhaeticus, 1514-1576) ने अपने कई सहयोगियों की सहायता से 30 वर्ष तक इन सारणियों के लिए अथक परिश्रम किया। सारणी का प्रकाशन 1596 में उनके शिष्य ओटो (Otho) द्वारा संभव हो सका। कोण प्रत्येक 10″ के अंतराल पर दिये गये थे, त्रिज्या 1 000 000 000 000 000 भागों में बाँटी गयी थी, इसलिए ज्या के मान में 15 विश्वस्त अंक थे।

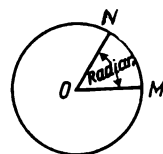
त्रिकोणमिति में वार्णिक द्योतन (बीजगणित में वे 16-वी शती के अंत में प्रयुक्त होने लगे थे) सिर्फ 18-वीं शती के मध्य में अपनाया गया, जिसका

* उसी समय से लातीनी शब्द 'सीनुस' (sinus, अंग्रेजी sine) एक पारिभाषिक शब्द के रूप में प्रयुक्त हो रहा है, जिसका अर्थ 'खीसा' (पौकेट) है। यह अरबी शब्द 'जेब' का अक्षरशः अनुवाद था। अरबी पारिभाषिक शब्द 'जेब' कहाँ से आया, यह अज्ञात है। कुछ लोग मानते हैं कि इसकी उत्पत्ति संस्कृत शब्द 'ज्या' या 'जीवा' से हुई है, जिसका आरंभिक अर्थ 'धनुष की डोरी' (ज्यामिति में— 'चापकर्ण') है, पर भारतीय विद्वान इस स्थिति में 'अर्ध ज्या' (=अर्ध चापकर्ण) का प्रयोग करते थे। [धीरे-धीरे संक्षेपण के लिए सिर्फ 'ज्या' का इस अर्थ में प्रयोग होने लगा था, चापकर्ण के लिए 'जीवा' शब्द रह गया था।]

'कोसिनुस' नाम 17-वीं शती के आरम्भ में आया, जो complimenti sinus (पूरक कोण की ज्या) का संक्षिप्त रूप था: यह इंगित करता था कि $\cos A = \sin(90^\circ - A)$ है। 'टैंजेंट' और 'सेकांट' (लातीनी से, 'स्पर्शक' और 'कर्तक') नाम 1583 में जर्मन विद्वान फिंक (Finck) प्रयोग में लाये।

श्रय ऐलर (Euler, 1707-1783) को जाता है। इस महान गणितज्ञ ने त्रिकोणमिति को उसका आधुनिक रूप प्रदान किया। राशि sin x, cos x आदि को वे फलन (§ 209) के रूप में देखते थे; संख्या x को तदनुरूप कोण की रेडियन में माप के बराबर मानते थे। ऐलर संख्या x को हर संभव मान प्रदान किया करते थे : धनात्मक, ऋणात्मक और यहां तक कि मिश्र भी। उन्होंने प्रतीप त्रिकोणमितिक फलन (§ 203) भी परिभाषित करके अपनाये।

§ 182. कोण की रेडियनी माप

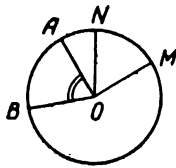
त्रिकोणमिति में कोण नापने की इकाई के रूप में डिग्री (§ 144) के साथ-साथ रेडियन का भी प्रयोग होता है। **इकाई रेडियन** *एक तीछ कोण (MON, चित्र 217) है, जिस पर वृत्त के केंद्र से चाप MN दिखता है; चाप MN की लंबाई त्रिज्या OM के बराबर हैं ($\overset{\frown}{MN}=OM$)।* इस कोण का मान वृत्त की त्रिज्या और परिधि पर चाप MN की स्थिति पर निर्भर नहीं करता। चूंकि अर्ध वृत्त केंद्र से $180°$ के कोण पर दिखता है और अर्ध वृत्त की लंबाई $\pi\cdot$त्रिज्या है, इसलिए कोण $180°$ की तुलना में एक रेडियन का कोण π गुणा कम होता है, अर्थात् एक रेडियन $\frac{180°}{\pi}$ डिग्रियों के बराबर होता है :

चित्र 217

$$1 \text{ रेडियन} = \frac{180°}{\pi} \approx 57°.2958 \approx 57°17'45''.$$

विलोमतः, एक डिग्री $\frac{\pi}{180°}$ रेडियन के बराबर है :

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ रेडियन} \approx 0.017453 \text{ रेडियन},$$

$$1' = \frac{\pi}{180\cdot 60} \text{ रेडियन} \approx 0.000291 \text{ रेडियन},$$

$$1'' = \frac{\pi}{180\cdot 60\cdot 60} \text{ रेडियन} \approx 0.000005 \text{ रेडियन}।$$

किसी भी कोण (AOB, चित्र 218) की **रेडियनी माप** इस कोण और एक रेडियन ($\angle MON$, चित्र 217, 218) के व्यतिमान को कहते हैं; पर व्यतिमान $\angle AOB : \angle MON$ तदनुरूप चापों के व्यतिमान $\overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{MN}$, अर्थात् 'चाप AB बटा त्रिज्या' के बराबर है।

चित्र 218

इस प्रकार, किसी भी कोण AOB की रेडियनी माप केंद्र O से कोण की भुजाओं के बीच खींचे गये मनचाही त्रिज्या के चाप और इस त्रिज्या के व्यतिमान को कहते हैं।

रेडियनी माप अपनाने से कई सूत्रों का रूप सरल हो जाता है।*

चंद अक्सर प्रयुक्त कोणों की रेडियनी और डिग्रीपरक मापों की तुलनात्मक सारणी को कंठस्थ कर लेना लाभदायक रहेगा :

डिग्री में कोण	360°	180°	90°	60°	45°	30°
रेडियन में कोण	2π	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$

§ 183. डिग्री से रेडियन और रेडियन से डिग्री में परिवर्तन

विधियां § 182 के निष्कर्षों पर आधारित हैं।

(1) यदि किसी कोण की माप डिग्रीपरक माप में है, तो डिग्रियों की

---

* कई पाठ्यपुस्तकों में इस बात पर अधिक जोर दिया जाता है कि रेडियनी माप में कोण किन्हीं *अमूर्त संख्याओं* द्वारा नापा जाता है। इससे रेडियनी तथा डिग्री परक नापों के बीच एक खाई बन जाती है और यह गलत है। दोनों ही प्रणालियों में कोण को *कोण से (इकाई कोण से)* नापा जाता है। एक इकाई का नाम डिग्री रखा गया है और दूसरी का रेडियन, पर इससे वस्तु स्थिति पर कोई असर नहीं पड़ता।

उपरोक्त कथन (कि, रेडियनी माप कोई अमूर्त संख्या है) का एक ही तर्कसंगत अर्थ हो सकता है : कोण की रेडियनी माप दो लंबाइयों की *तुलना* है, जो लंबाई की इकाई पर निर्भर नहीं करती। पर कोण की डिग्रीपरक माप भी दो लंबाइयों की तुलना है (कोण के बीच का चाप *बटा* उसी त्रिज्या वाली पूर्ण परिधि का 360 वां भाग) और यह भी लंबाई की इकाई के चयन पर निर्भर नहीं करती; यह तुलना (व्यतिमान) चाप और त्रिज्या की तुलना (व्यतिमान) से किसी भी अर्थ में बुरी या घटिया नहीं कही जा सकती है।

मख्या म $\frac{\pi}{180} \approx 0.017453$ से गुणा करते हैं, मिनटों की संख्या में $\frac{\pi}{180 \cdot 60} \approx 0.000291$ से गुणा करते हैं; सेकंडों की संख्या में $\frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} \approx 0.000005$ मे गुणा करते हैं और तीनों गुणनफलों को आपस में जोड़ लेते हैं।

उदाहरण 1. 12° 30′ के कोण की रेडियनी माप चौथे दशमलव अंक की शुद्धता से ज्ञात करें।

हल. 12 में $\frac{\pi}{180}$ मे गुणा करते हैं। चूंकि 12 से गुणा करने पर परम त्रुटि करीब दस गुनी अधिक बढ़ जायेगी, इसलिए $\frac{\pi}{180}$ के मान में पाँचवें दशमलव अंक को भी ध्यान में रखना चाहिए (तुलना करें § 55 से) :

$$12 \cdot 0.01745 = 0.2094.$$

अब 30 में $\frac{\pi}{180 \cdot 60}$ से गुणा करते हैं; यहां गुणक के छठे दशमलव अंक के प्रभाव को भी ध्यान में रखना पड़ेगा :

$$30 \cdot 0.000291 \approx 0.0087.$$

अत: $12^\circ 37' = 0.2094 + 0.0087 = 0.2181.$

कलन सरल करने के लिए सारणी 8 (पृष्ठ 52) का उपयोग किया जा सकता है; इसमें चौथे दशमलव अंक तक की शुद्धता से मान दिये गये हैं। प्रथम स्तंभ ("डिग्री") में स्थित संख्या 12 के सामने संख्या 0.2094 प्राप्त करते हैं और अंतिम से दूसरे स्तंभ ("मिनट") में स्थित संख्या 30 के सामने अंकित 0.0087 प्राप्त करते हैं।

आलेख :

$$\begin{aligned} 12^\circ &= 0.2094 \\ 30' &= 0.0087 \\ \hline &\quad 0.2181 \end{aligned}$$

उदाहरण 2. कोण 217° 40′ की रेडियनी माप ज्ञात करें।

उसी सारणी की सहायता से :

$$\begin{aligned} 200^\circ &= 3.4907 \\ 17^\circ &= 0.2967 \\ 40' &= 0.0116 \\ \hline & \quad 3.7990 \end{aligned}$$

(2) किसी कोण की रेडियनी माप के सहारे उसकी डिग्रीपरक माप ज्ञात करने के लिए रेडियनों की संख्या में $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ.296$, अर्थात् $57^\circ 17' 45''$ से गुणा करते हैं (यदि कोण 2 रेडियन से अधिक नहीं है और $0.5'$ तक की शुद्धता से परिणाम मिलने चाहिए, तो गुणक को $57^\circ 30'$ के सन्निकृत किया जा सकता है, क्योंकि हर 0.004 डिग्री में करीब चौथाई मिनट की त्रुटि रहेगी) ।

उदाहरण 3. कोण 1.360 रेडियन की डिग्रीपरक माप $1'$ तक की शुद्धता से ज्ञात करें ।

हल. $1.360 \cdot 57^\circ.30 = 77^\circ.93 = 77^\circ 56'$.

कलन सरल करने के लिए सारणी 9 (पृष्ठ 53) का उपयोग कर सकते हैं । सारणी से :

1	रेडियन	=	$57^\circ 18'$
0.3	,,	=	$17^\circ 11'$
0.060	,,	=	$3^\circ 26'$
			$77^\circ 55'$*

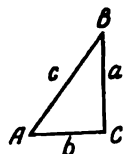
उदाहरण 4. 6.485 रेडियन कोण की डिग्रीपरक माप ज्ञात करें ।

सारणी की सहायता से :

6	रेडियन	=	$343^\circ 46'$
0.4	,,	=	$22^\circ 55'$
0.08	,,	=	$4^\circ 35'$
0.005	,,	=	$0^\circ 17'$
			$371^\circ 33'$ (चरम त्रुटि $= 2'$)

* $1'$ के अंतर का कारण है योज्य पदों की त्रुटियों का संयोजन; दे. § 53.

§ 184. तीछ कोण के त्रिकोणमितिक फलन

किसी भी त्रिभुज के प्रश्न को अंततोगत्वा समकोण त्रिभुज के प्रश्न के रूप में देखा जाता है। समकोण त्रिभुज ABC में उसकी किन्हीं दो भुजाओं का व्यतिमान पूर्णतया उसके किसी एक तीछ (न्यून) कोण (जैसे $\angle A$, चित्र 219) के मान पर निर्भर करता है। समकोण त्रिभुज की भुजाओं में से दो-दो के व्यतिमान ही उसके तीछ कोण के त्रिकोणमितिक फलन कहलाते हैं। कोण A से संबंधित इन फलनों के नाम और द्योतन निम्न हैं [लंब विचाराधीन कोण A के सामने की भुजा a है, आधार कोण A के साथ की भुजा b है, कर्ण समकोण के सामने की भुजा c है] :

चित्र 219

(1) ज्या (अर्धज्या) : $\sin A = \frac{a}{c}$ (लंब और कर्ण का व्यतिमान)

(2) कोज्या (कोटिज्या) : $\cos A = \frac{b}{c}$ (आधार और कर्ण का व्यतिमान)

(3) स्पज (स्पर्शज्या) : $\tan A = \frac{a}{b}$ (लंब और आधार का व्यतिमान)

(4) कोस्पज (कोटि स्पर्शज्या) : $\cot A = \frac{b}{a}$ (आधार और लंब का व्यतिमान)

(5) व्युक (व्युत्क्रम कोटिज्या) : $\sec A = \frac{c}{b}$ (कर्ण और आधार का व्यतिमान)

(6) व्युज (व्युत्क्रम ज्या) : $\operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}$ (कर्ण और लंब का व्यतिमान)

[टिप्पणी 1. कोटि का अर्थ है– '90° के दो समान भागों में से एक'; यहां पर : 'पूरक कोण की'।

2. रूसी विज्ञान साहित्य में स्प तथा कोस्प को क्रमशः tg (टैंजेंट) तथा ctg (कोटैंजेंट) से द्योतित करने की प्रथा है।

3. व्युक और व्युज के लातीनी नामों के अनुवाद क्रमशः 'कर्तक' और 'कोटिकर्तक' होंगे।]

कोण A के पूरक कोण B के लिए इन व्यतिमानों के नाम निम्न प्रकार से बदल जाते हैं :

$$\sin B = \frac{b}{c}, \cos B = \frac{a}{c}, \tan B = \frac{b}{a};$$

$$\cot B = \frac{a}{b}, \sec B = \frac{c}{a}, \operatorname{cosec} B = \frac{a}{b}.$$

कुछ कोणों के लिए उनकी त्रिकोणमितिक राशियों के शुद्ध व्यंजन लिखे जा सकते। निम्न सारणी में चंद महत्त्वपूर्ण स्थितियां दी गयी हैं :*

A	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	$\cot A$	$\sec A$	$\operatorname{cosec} A$
$0°$	0	1	0	∞	1	∞
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
$90°$	1	0	∞	0	∞	1

* $0°$ और $90°$ के कोण सही अर्थ में समकोण त्रिभुज के तीछ्ण कोण नहीं हो सकते। पर त्रिकोणमितिक फलनों की अवधारणा को और व्यापक करने पर (दे० नीचे) इन कोणों के लिए भी त्रिकोणमितिक फलनों के मानों पर विचार किया जाता है। दूसरी ओर से, त्रिभुज का एक तीछ्ण कोण यथासंभव $90°$ के निकट होता जा सकता है; इस स्थिति में दूसरा तीछ्ण कोण शून्य के निकट होता जायेगा। तब त्रिकोणमितिक फलनों के तदनुरूप मान सारणी में दिये गये मानों के निकट होते जायेंगे।

चिह्न ∞, जो इस सारणी में प्रयुक्त हुआ है, यह इंगित करता है कि जब कोण का मान सारणी में ∞ के लिए दिये गये मान के निकट पहुँचने लगता है, तो प्रत्त राशि का मान असीम बढ़ने लगता है। जब कहते हैं कि राशि "अनंत हो जाती है", तो इसका तात्पर्य यही है (तुलना करें § 38, § 219 से)।

इस सारणी का सैद्धांतिक महत्त्व ही ज्यादा है; इसका व्यावहारिक महत्त्व बहुत कम है, क्योंकि इसमें ऐसे मूल दिये गये हैं, जिनका शुद्ध मान निकालना संभव नहीं है। अधिकांश कोणों के लिए त्रिकोणमितिक फलनों के शुद्ध सांख्यिक मान मूलों की सहायता से भी नहीं लिखे जा सकते। पर उनके सन्निकट मान किसी भी कोटि की शुद्धता से ज्ञात किये जा सकते हैं (दे. § 205)। इनके कलन के लिए बहुत अधिक श्रम की आवश्यकता पड़ती है, इसीलिए उन्हें हमेशा के लिए एक ही बार कलित कर लिया गया है और कलनफल सारणी-बद्ध कर दिये गये हैं। ज्या-कोज्या की सारणी देखें § 6 में (पृष्ठ 40), स्प-कोस्प की सारणी देखें § 7 में (पृष्ठ 44)।

§ 185. कोण द्वारा त्रिकोणमितिक फलन ज्ञात करना*

(1) **ज्या और कोज्या.** § 6 की सारणी (पृष्ठ 40) में ज्या के मान 0° से 90° तक के कोणों के मान हर 1′ के अंतराल पर चार अंकों की शुद्धता से दिये गये हैं। चूंकि किसी कोण की कोज्या उस कोण के पूरक कोण की ज्या के बराबर होती है। (दे. § 184), इसलिए इसी सारणी द्वारा हर 1′ के अंतराल पर 90° से 0° तक के सभी कोणों की कोज्या भी ज्ञात हो सकती है।

ज्या का मान ढूंढ़ते वक्त डिग्री की संख्या बायें स्तंभ — "कोण" — में देखते हैं और मिनट की सन्निकृत संख्या (0′, 10′, 20′, 30′, 40′, 50′, 60′) ऊपर से देखते हैं (यह याद दिलाने के लिए ही सारणी के ऊपर "ज्या" लिखा गया है)। *कोज्या का मान* ढूंढ़ते वक्त डिग्री की संख्या दायें स्तंभ — "कोण" — में देखते हैं और मिनट की सन्निकृत संख्या *नीचे से ऊपर* की ओर देखते हैं (*यह याद* दिलाने के लिए सारणी के नीचे "कोज्या" लिखा जाता है)। सानुरूप पंक्ति और स्तंभ के कटाव पर इष्ट फल होता है। मुख्य सारणी में अनुपस्थित मिनट की संख्या (1 से 9) के लिए अंतर्वेशन की विधि से प्राप्त सुधार का उपयोग करते हैं। जिस पंक्ति में मुख्य फल मिला है, उसी पंक्ति में सारणी के अनुच्छेद "संशोधन" में यह मिल जायेगा। यदि ज्या का मान ढूंढ़ा जा रहा है, तो संशोधन को मुख्य फल में जोड़ देते हैं। यदि कोज्या ज्ञात किया जा रहा है तो संशोधन को मुख्य फल में से घटा लेते हैं (क्योंकि कोण का मान बढ़ने पर ज्या का मान बढ़ता है और कोज्या का मान घटता है)।

---

* यदि कोण रेडियनी माप में व्यक्त है, तो पहले उसे डिग्रीपरक माप में परिवर्तित कर लेते हैं (दे. § 183)।

उदाहरण 1. sin 53°40′ का मान ज्ञात करें।

बायें स्तंभ में 53° लेते हैं और *ऊपरी* पंक्ति में 40′ लेते हैं। कटान-स्थल पर 0.8056 मिलता है। संशोधन की आवश्यकता नहीं है :

$$\sin 53°40' = 0.8056.$$

उदाहरण 2. cos 63°10′ ज्ञात करें।

दायें स्तंभ में 63° लेते हैं और *निचली* पंक्ति में 10′। कटान पर 0.4514 मिलता है। सुधार की जरूरत नहीं है :

$$\cos 63°10' = 0.4514.$$

उदाहरण 3. sin 62°24′ ज्ञात करें।

बायें स्तंभ में 62° लेते हैं और ऊपरी पंक्ति में 20′। कटान पर मुख्य फल 0.8857 है। इसी पंक्ति में "संशोधन" के अंतर्गत (स्तंभ 4′ में) संख्या 5 दी गयी है; इसका अर्थ है 0.0005 (अर्थात् 5 दशमलव बिंदु के बाद का चौथा अंक है)। मुख्य फल में इसे जोड़ने पर 0.8862 प्राप्त होता है।

आलेख :

$$\begin{array}{r} \sin 62°20' = 0.8857 \\ +4' = \quad +5 \\ \hline \sin 62°24' = 0.8862 \end{array}$$

उदाहरण 4. cos 42°16′ ज्ञात करें।

42° *दायें* स्तंभ में देखते हैं और 16′ *निचली* पंक्ति में। कटान पर मुख्य फल 0.7412 है। इसी पंक्ति में "संशोधन" के अंतर्गत स्तंभ 6′ में संख्या 12 है। मुख्य फल में से इसे घटाने पर 0.7400 मिलेगा।

आलेख :

$$\begin{array}{r} \cos 42°10' = 0.7412 \\ +6 = \quad -12 \\ \hline \cos 42°16' = 0.7400. \end{array}$$

(2) **स्पज और कोस्पज.** § 7 की सारणी (पृष्ठ 44) में हर 1′ के अंतराल पर 0° से 90° तक के सभी कोणों के लिए स्पज के मान दिये हैं। 0° से 76° के अंतराल में सारणी ज्या-सारणी की तरह ही है। 76° से 90° के अंतराल के लिए (जिसमें स्पज में परिवर्तन बहुत ही अनियमित प्रकार से होता है)। "संशोधन" नहीं दिया गया है, मुख्य सारणी को ही अधिक विस्तार से दिया गया है।

चूंकि कोण का स्पज पूरक कोण के कोस्पज के बराबर होता है (§ 184), इसलिए इसी सारणी में कोस्पज के मान भी हर 1′ के अंतराल पर 90° से 0°

तक के सभी कोणों के लिए ज्ञात किये जा सकते हैं। स्पज का मान ढूँढ़ने की विधि वैसी ही है, जैसी ज्या-सारणी में ज्या का मान ढूढ़ने की विधि है; कोस्पज कोज्या की तरह ज्ञात किया जाता है।

उदाहरण 1. tan $82^\circ 18'$ ज्ञात करें।

दायें स्तंभ में कोण $62^\circ 10'$ ढूंढ़ते हैं, और *ऊपरी* पंक्ति में $8'$। कटान पर मुख्य फल मिलता है :

$$\tan 82^\circ 18' \; 7.396.$$

उदाहरण 2. cot $12^\circ 35'$ का मान ज्ञात करें।

दायें स्तंभ में कोण $12^\circ 30'$ है और *निचली* पंक्ति में $5'$ है। कटान पर :

$$\cot 12^\circ 35' = 480.$$

उदाहरण 3. cot $58^\circ 36'$ ज्ञात करें।

दायें स्तंभ में 58° हैं और निचली पंक्ति में $30'$ हैं। कटान पर 0.6128 मिलता है। इसी पंक्ति के "संशोधन" के अंतर्गत (नीचे से स्तंभ $6'$ में) संख्या 24 है। इसे 0.6128 में से घटाने पर 0.6104 मिलेगा।

आलेख :

$$\begin{aligned} \cot 58^\circ 30' &= 0.6128 \\ +6' &= \;\; -24 \\ \hline \cot 58^\circ 36' &= 0.6104. \end{aligned}$$

उदाहरण 4. tan $48^\circ 43'$ ज्ञात करें।

आलेख :

$$\begin{aligned} \tan 48^\circ 40' &= 1.1369 \\ +3' &= \;\; +20 \\ \hline \tan 48^\circ 43' &= 1.1389. \end{aligned}$$

§ 186. त्रिकोणमितिक फलन द्वारा उसका कोण ज्ञात करना

प्रत्त ज्या तथा कोज्या का कोण ज्या-सारणी (§ 6, पृष्ठ 40) से ज्ञात करते हैं और स्पज तथा कोस्पज का कोण स्पज-सारणी (§ 7, पृष्ठ 44) से ज्ञात करते हैं। किसी स्तंभ में प्रत्त मान ढूढ़ते हैं (जैसे ऊपर से $0'$ वाले स्तंभ में); उस स्तंभ की किसी पंक्ति में या तो प्रत्त मान मिल जायेगा, या इसके निकट की कोई संख्या मिलेगी। प्रथम स्थिति में ज्या का कोण बायें स्तंभ में (उसी पंक्ति में) मिलेगा और कोज्या का कोण डिग्री में दायें स्तंभ में मिलेगा; मिनटों की संख्या ज्या के लिए ऊपरी पंक्ति में देखते हैं और कोज्या के लिए निचली

पंक्ति में (तुलना करें § 185 से)। दूसरी स्थिति में देखते हैं कि कहीं आस-पास और निकट की संख्या तो नहीं है। इनमें से निकटतम मान का तदनुरूप कोण (डिग्री और मिनट में; ज्या के लिए बायें स्तंभ और ऊपरी पंक्ति में और कोज्या के लिए दायें स्तंभ और निचली पंक्ति में) ढूंढ़ लेते हैं और इसमें आवश्यक सुधार (संशोधन) करते हैं। इसमें यह याद रखना चाहिए कि ज्या तथा स्पज के लिए सुधार धनात्मक होते हैं और कोज्या तथा कोस्पज के लिए—ऋणात्मक।*

उदाहरण 1. तीछ (न्यून) कोण α ज्ञात करें, यदि $\cos \alpha = 0.7173$ है।

ज्या-सारणी (§ 6) में ऊपर $0'$ अंकित स्तंभ में प्रत्त मान की सन्निकट संख्या 0.7193 देखते हैं। इससे कुछ दूर 0.7173 भी है, जो प्रत्त मान है। डिग्री दायें स्तंभ में देखते हैं और मिनट निचली पंक्ति में, जिससे $\alpha = 44°10'$ मिलता है।

उदाहरण 2. तीछ कोण α ज्ञात करें, यदि $\cos \alpha = 0.2643$ है।

ज्या-सारणी (§ 6) में निकटतम मान 0.2644 है। यह प्रत्त मान से 0.0001 का अंतर रखता है, पर सारणी के अनुच्छेद "संशोधन" में अल्पतम संख्या 3 (= 0.0003) है (यह $1'$ के अनुकूल सुधार है)। इसलिए सुधार की उपेक्षा करते हैं। दायें स्तंभ से डिग्री और बायें स्तंभ से मिनट लिख लेते हैं: $\alpha = 74°40'$.

उदाहरण 3. तीछ कोण α ज्ञात करें, यदि $\cos \alpha = 0.7458$ है।

इसका निकटतम सारणीगत मान 0.7451 है, जो $41°50'$ कोण के अनुरूप है। प्रत्त मान इससे दशमलव के चौथे अंक में 7 इकाई से इतर है। इसी पंक्ति में "संशोधन" के अंतर्गत संख्या 6 और 8 हैं; ये संशोधन क्रमशः $3'$ और $4'$ के अनुकूल हैं। किसी एक को प्रयुक्त करते हैं; कोण $41°50'$ में से $3'$ घटाने पर $41°47'$ मिलता है (यह इष्ट कोण से नगण्य ज्यादा है), $41°50'$ में से $4'$ घटाने पर $41°46'$ मिलता है (यह इष्ट कोण से नगण्य कम है)।

आलेख:

$$\begin{array}{r} 0.7451 = \cos 41°50' \\ \underline{+7 \qquad\quad -3'} \\ 0.7458 = \cos 41°47' \end{array}$$

उदाहरण 4. तीछ कोण ज्ञात करें, यदि $\tan \alpha = 4.827$ है।

---

* इसके बाद यदि जरूरत हो, तो कोण को रेडियनी माप में व्यक्त कर लेते हैं (दे. § 183)।

स्पर्श-सारणी (§ 7) में निकटतम कम मान 4.822 है और निकटतम अधिक मान 4.826 है। चूंकि दूसरा मान प्रत्त मान के ज्यादा निकट है, इसलिए उसे ही लेते हैं। बायें स्तंभ में डिग्री $78^\circ 10'$ है और ऊपरी पंक्ति में $8'$ है। अतः $\alpha = 78^\circ 18'$ है।

§ 187. ऋजकोणिक त्रिभुजों के हल

1. दो भुजाओं द्वारा. यदि ऋजकोणिक (समकोण) त्रिभुज की दो भुजाएं प्रत्त हैं, तो तीसरी भुजा पीथागोरस के प्रमेय (§ 149) से ज्ञात हो जाती है। तीक्ष्ण (न्यून) कोणों का मान § 184 के प्रथम तीन सूत्रों में से किसी की सहायता से निर्धारित कर सकते हैं (यह इस बात पर निर्भर करता है कि कौन-सी भुजाएं प्रत्त हैं)। उदाहरणतया, यदि संलंब a तथा b प्रत्त हैं, तो तीक्ष्ण कोण A को सूत्र

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

से ज्ञात कर सकते हैं। तीक्ष्ण कोण के लिए $B = 90^\circ - A$ सूत्र का इस्तेमाल करते हैं।

स्थिति I. संलंब $a = 0.528$ m और कर्ण $c = 0.697$ m दिया गया है।

(1) संलंब b का निर्धारण :

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{0.697^2 - 0.528^2} \approx 0.455 \text{ m}.$$

(2) कोण A का निर्धारण :

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{0.528}{0.697} \approx 0{\cdot}757.$$

ज्या-सारणी से ज्ञात करते हैं : $A \approx 49^\circ 10'$ (चरम त्रुटि $5'$ है)। एक मिनट तक की शुद्धता से A का मान ज्ञात करना निरर्थक है, क्योंकि यदि a तथा c के प्रत्त मानों को सन्निकृत मान के रूप में देखा जाये, तो भागफल $\frac{a}{c} \approx 0{\cdot}757$ में तीसरे अंक का भी भरोसा नहीं किया जा सकता (§ 57)।

(3) कोण B का निर्धारण :

$$B = 90^\circ - A \approx 90^\circ - 49^\circ 10' = 40^\circ 50'.$$

स्थिति II. संलंब $a = 8.3$ cm, $b = 12.4$ cm प्रत्त हैं।

(1) कर्ण c का निर्धारण :

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{8.3^2+12.4^2}\approx 14.9 \text{ cm}.$$

(2) कोण A का निर्धारण :

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{8.3}{12.4}\approx 0.67;\ A\approx 34^\circ.$$

(3) कोण B का निर्धारण :

$$B=90^\circ-A\approx 90^\circ-34^\circ=56^\circ.$$

2. एक भुजा और एक तीक्ष्ण कोण द्वारा. यदि तीछ (न्यून) कोण A प्रत्त है, तो B को सूत्र $B=90^\circ-A$ से ज्ञात कर सकते हैं। भुजाएं § 184 के सूत्रों से ज्ञात हो सकती हैं, जिन्हें निम्न रूप में लिखते हैं :

$$a=c\sin A,\ b=c\cos A,\ a=b\tan A,$$
$$b=c\sin B,\ a=c\cos B,\ b=a\tan B.$$

सूत्र ऐसे चुनते हैं, जिनमें प्रत्त या बाद में ज्ञात हुई भुजा उपस्थित हो।

स्थिति III. कर्ण $c=79.79$ m और तीछ कोण $A=66^\circ 36'$ प्रत्त हैं।

(1) कोण B का निर्धारण :

$$B=90^\circ-A=90^\circ-66^\circ 36'=23^\circ 24'.$$

(2) संलंब a का निर्धारण :

$$a=c\sin A=79.79\cdot\sin 66^\circ 36'=79.79\cdot 0.9178\approx 73.23\text{m}.$$

(3) संलंब b का निर्धारण :

$$b=c\cos A=79.79\cdot 0.3971\approx 31.68 \text{ m}.$$

स्थिति IV, संलंब $a=12.3$ m और तीछ कोण $A=63^\circ 00'$ प्रत्त हैं।

(1) कोण B का निर्धारण :

$$B=90^\circ-63^\circ 00'=27^\circ 00'.$$

(2) संलंब b का निर्धारण :

$$b=a \text{ tg } B=12.3 \text{ tg } 27^\circ 00'=12.3\cdot 0.509\approx 6.26 \text{ m}.$$

(3) कर्ण c का निर्धारण :

$$c=\frac{a}{\sin A}=\frac{12.3}{\sin 63^\circ 00'}=\frac{12.3}{0.891}\approx 13.8 \text{ m}.$$

§ 188. त्रिकोणमितिक फलन के लगरथों की सारणी

समकोण त्रिभुज हल करने में हमेशा गुणा-भाग भी करना पड़ता है। बहुत अधिक शुद्धता से परिणाम ज्ञात करने में काफी समय लगता है (उदाहरणतया, जब चार-अंकी संख्याओं के साथ संक्रिया करनी पड़ती है)। काम उबाने वाला भी है, जिससे अक्सर गलतियां होने लगती हैं। लगरथों की सहायता से संक्रिया करने पर श्रम और समय की बचत होती है। लगरथी कलन में त्रिकोणमितिक मानों की सारणी के बदले उनके लगरथों की सारणी का उपयोग होता है; इससे समय की बहुत बचत होती है (यथा, कोण की ज्या को ज्या-सारणी में ढूंढ़ने के बाद लगरथी-सारणी में उसका लगरथ ढूंढ़ने की बजाय सीधे उस कोण की ज्या का लगरथ ज्ञात कर लेते हैं)।

§ 5(पृ. 32) की सारणी में ज्या, कोज्या, स्पज, कोस्पज के लगरथों के मान हर $10'$ के अंतराल पर चौथे दशमलव अंक की शुद्धता से दिये गये हैं। यदि कोण $45°$ से अधिक नहीं है, तो आवश्यक फलन का नाम ऊपर से लेते हैं और कोण का मान बायें से। यदि कोण $45°$ से अधिक है, तो आवश्यक फलन का नाम नीचे से देखते हैं और कोण का मान दायें से।

इसी सारणी की सहायता से त्रिकोणमितिक फलनों के लगरथ हर $1'$ के अंतराल पर भी कलित किये जा सकते हैं। कलन की विधि (दे. §§ 189, 190) निम्न तथ्य पर आधारित है: $10'$ के अंतराल में कोण का परिवर्तन lg sin, lg cos, lg tan और lg cot में परिवर्तन का समानुपाती माना जा सकता है। इस मान्यता के कारण उत्पन्न त्रुटि सामान्यतः चौथे दशमलव अंक को प्रभावित नहीं करती है। अपवाद हैं सिर्फ lg sin और lg tan – $0°$ के निकटवर्ती ($0°$ से $4°$ तक के) कोणों के लिए और lg cos तथा lg cot के मान $90°$ के निकटवर्ती ($86°$ से $90°$ तक के) कोणों के लिए। इन कोणों के लिए त्रुटि प्रभावशाली हो उठती है।

एक उदाहरण द्वारा यह समझाते हैं। कोण को $12°20'$ से $12°30'$ तक बढ़ाने पर lg sin का मान $\bar{1}.3296$ से $\bar{1}.3356$ तक बढ़ जाता है (अर्थात् वृद्धि 0.0057 है)। कोण में पहले से दुगुनी वृद्धि होने पर, अर्थात् कोण को $12°20'$ से $12°40'$ तक बढ़ाने पर* lg sin का मान $\bar{1}.3296$ से

* हम लोगों ने कोण की वृद्धि को $10'$ के अंतराल में सीमित नहीं रखा है, ताकि अधिक ब्योरेवार सारणी का प्रयोग न करना पड़े। $10'$ के अंतराल में तो समानुपातिकता और भी स्पष्ट होगी।

$\bar{1}.3410$ तक बढ़ता है (अर्थात् lg sin में वृद्धि 0.0114 है) । यह वृद्धि पिछली से दुगुनी है ।

कोण में $10'$ की वृद्धि के लिए lg sin के तदनुरूप परिवर्तन कलन करने की आवश्यकता नहीं होती । वे सारणी में प्रदत्त हैं—वर्ण d से अंकित* स्तंभों में । यथा, स्तंभ lg sin में $12°20'$ के सामने $\bar{1}.3296$ अंकित है और $12°30'$ के समान $\bar{1}.3353$ अंकित है । अंतर $\bar{1}.3353 - \bar{1}.3296 = 0.0057$ बायें स्तंभ d में $\bar{1}.3296$ तथा $\bar{1}.3353$ के बीच लिखा गया है (संक्षेपण के लिए सिर्फ 57 के रूप में) ।

ये ही अंतर (लेकिन ऋण चिह्न के साथ) lg cos में परिवर्तन व्यक्त करते हैं, जो कोण में $10'$ के परिवर्तन के अनुकूल होता है । इस प्रकार, वही अंकन 57 कोण में $77°30'$ से $77°40'$ तक की वृद्धि के लिए lg cos का ह्रास व्यक्त करता है ।

lg tan और lg cot के लिए अंतर शीर्षक **d.c.** वाले बिचले स्तंभ में दिये गये हैं ।** ये एक ही साथ अगल-बगल के दो स्तंभों के काम आते हैं । यथा, lg tan $12°30'$ lg tan $12°20'$ तथा lg tan $77°40'$ − lg tan $77°30'$ दोनों ही एक (सामूहिक) अंतर 0.0061 के बराबर हैं, जो स्तंभ d.c. में तदनुरूप पंक्तियों के बीच अंकित है । संख्या 0.0061 इसके साथ-साथ lg cot का ह्रास भी है, जो कोण में $12°20'$ से $12°30'$ तक और $77°30'$ से $77°40'$ तक की वृद्धि के अनुरूप है ।

स्तंभ d तथा d.c. में अंकित संख्याओं को "**सारणीगत अंतर**" कहते हैं ।

§ 189. कोण द्वारा त्रिकोणमितिक फलन का लगरथ ज्ञात करना†

मिनटों की शून्यात संख्या ($0'$, $10'$, $30'$, $40'$, $50'$) वाले कोणों के लिए इष्ट मान (0.0001 तक की शुद्धता से) सीधे सारणी से प्राप्त कर लेते हैं, जिसका वर्णन पिछले अनुच्छेद में किया गया है । अन्य कोणों के लिए समानुपातन का कलन (अंतर्वेशन) किया जाता है ।

---

* d लातीनी शब्द differentia (=अन्तर) का प्रथम वर्ण है ।

** d c. से तात्पर्य है differentia communis—सामूहिक अन्तर ।

† यदि कोण रेडियनी माप में प्रदत्त हैं, तो उसे डिग्रीपरक माप में परिवर्तित कर लेते हैं (§ 183) ।

इसमें यह याद रखना चाहिए कि sin तथा tan के लिए कोण और लगरथ के संशोधनों के चिह्न समान होते हैं, cos तथा cot के लिए विपरीत होते हैं।

उदाहरण 1. $\lg \cos 24^\circ 13'$ ज्ञात करें।

प्रत्त कोण 45° से कम है, अतः उस स्तंभ का उपयोग करते हैं, जिसके ऊपर lg cos लिखा हुआ है। इस स्तंभ में $\lg \cos 24^\circ 10' = \bar{1}.9602$ मिलता है।* सारणीगत अंतर (बायें स्तंभ d की संख्या) $(= \lg \cos 24^\circ 10' - \lg \cos 24^\circ 20') = 0.0006$ है। $3'$ के लिए संशोधन x ज्ञात करते हैं। अनुपात

$$x : 0.0006 = 3' : 10'$$

से $$x = 0.0006 \cdot 0.3 \approx 0.0002.$$

यह संशोधन $\bar{1}.9602$ में से घटा कर प्राप्त करते हैं:

$$\lg \cos 24^\circ 13' \approx \bar{1}.9600.$$

आलेख :

$$\lg \cos 24^\circ 10' = \bar{1}.9602 \ (d=6)$$
$$+3' = \quad -2$$
$$\lg \cos 24^\circ 13' = \bar{1}.9600$$

टिप्पणी संशोधन ज्ञात करने के लिए लिखित रूप में कलन करने की आवश्यकता नहीं है। मिनट की संख्या को सारणीगत अंतर से मन ही मन गुणा करके गुणनफल को सन्निकृत कर लेना और अंत के शून्यों को हटा लेना काफी रहता है। हमारे उदाहरण में 3 और 6 के गुणनफल को 20 तक सन्निकृत करके संशोधन 2 प्राप्त कर लेते हैं।

उदाहरण 2. $\lg \tan 57^\circ 48'$ ज्ञात करें।

प्रत्त कोण 45° से अधिक है, इसलिए नीचे से $\lg \tan \alpha$ शीर्षक वाले स्तंभ का उपयोग करते हैं, जिससे $\lg \tan 57^\circ 50' = 0.2014$ प्राप्त होता है। d.c $(= \lg \tan 57^\circ 50' - \lg \tan 57^\circ 40') = 28$ (अर्थात् 0.0028) है। $2'$ की कमी रह जाती है, जिसके लिए संशोधन ज्ञात करते हैं। 28 में 2 से गुणा करते हैं (देखें पिछले उदाहरण की टिप्पणी) और सन्निकृत फल 60 प्राप्त करते हैं। शून्य हटा देने पर संशोधन 6 मिलता है; इसे 0.2014 में से घटा लेते हैं। अब $\lg \tan 57^\circ 48' = 0.2008$ मिलता है।

---

* यह याद रखना चाहिए कि § 5 की सारणी में सारे लंछक 10 इकाई अधिक हैं, अर्थात् $\bar{1}$ की जगह 9 अंकित है, $\bar{2}$ की जगह 8 अंकित है, आदि।

आलेख :

$$\begin{array}{l} \lg \tan 57^\circ 50' = 0.2014 \quad (d.c. = 28) \\ \qquad\qquad -2' = \quad -6 \\ \hline \lg \tan 57^\circ 48' = 0.2008 \end{array}$$

टिप्पणी सारणी में lg tan 57° 40′ = 0.1986 भी लिया जा सकता है; 8′ के लिए संशोधन 22(8.28 ≈ 220) ज्ञात करके उसे 0.1986 में जोड़ देने से भी वही परिणाम मिलेगा। लेकिन 28 में 8 से मन ही मन गुणा करना कठिन है (बनिस्बत कि 28 में 2 से गुणा करना) और इसमें गलती होने की भी संभावना रहती है।

उदाहरण 3. lg cot 65° 17′ ज्ञात करें।

$$\begin{array}{l} \lg \cot 65^\circ 20' = \bar{1}.6620 \quad (d.c. = 34) \\ \qquad\qquad -3' \quad +10 \\ \hline \lg \cot 65^\circ 17' = \bar{1}.6630 \end{array}$$

उदाहरण 4. lg sin 40°34′ ज्ञात करें।

$$\begin{array}{l} \lg \sin 40^\circ 30' = \bar{1}.8125 \quad (d = 15) \\ \qquad\qquad +4' \quad +6 \\ \hline \lg \sin 40^\circ 34' = \bar{1}.8131 \end{array}$$

§ 190. त्रिकोणमितिक फलन के लगरथ से कोण ज्ञात करना

§ 5 की सारणी के तदनुरूप स्तंभों में (हर फलन के मान दो स्तंभों में दिये गये हैं) या तो आवश्यक संख्या पाते हैं या उसके निकट की कोई संख्या पाते हैं; अंतिम स्थिति में सारणीगत अंतर भी लिख लेते हैं। यदि प्रश्न त्रिकोणमितिक फलन का नाम स्तंभ के ऊपर लिखा हुआ है (जिस स्तंभ में आवश्यक संख्या है), तो डिग्री और मिनट के दहले बायीं ओर देखते हैं; यदि फलन का नाम नीचे है, तो दायीं ओर देखते हैं। अंत में आवश्यकतानुसार अनुपात-कलन की सहायता से कोण के मान में संशोधन करते हैं (sin और tan के लिए संशोधनों के चिह्न वैसे ही होते हैं, जैसे उनके लगरथों के लिए; cos और cot के लिए विपरीत होते हैं।

उदाहरण 1 तीक्ष्ण कोण α ज्ञात करें, यदि lg tan α = 0.2541 है। प्रश्न मान का निकटतम मान 0.2533 (सारणीगत अंतर d c. = 29) उस

स्तंभ में है, जिसमें **lg tan** *नीचे* लिखा गया है। इसीलिए *दायें* देखते हैं: $60^\circ 50'$। अंतिम अंक की फालतू 8 इकाइयों के लिए संशोधन x को अनुपात

$$x : 10' = 8 : 29$$

से प्राप्त करते हैं: $x = \frac{10' \cdot 8}{29} \approx 3'$; इस संशोधन को जोड़ने पर $\alpha = 60^\circ 53'$ प्राप्त होता है।

आलेख:

$$\lg \tan \alpha = 0.2541$$

$$\begin{array}{rl} 0.2533 = \lg \tan 60^\circ 50' & (d = 29) \\ +8 \quad\quad\quad\quad\quad +3 & \\ \hline 0.2541 = \lg \tan 60^\circ 53' & \\ \alpha = 60^\circ 53' & \end{array}$$

टिप्पणी. संशोधन मन ही मन निम्न विधि से ज्ञात हो सकता है। प्रत्त मान और सारणीगत मान के अंतर (0.0008) को पूर्ण संख्या 8 मान लेते हैं, अर्थात् बायीं ओर स्थित दशमलव-बिंदु और शून्यों पर ध्यान नहीं देते हैं। उसे दसगुना (80) करके उसमें सारणीगत अंतर 29 से भाग देते हैं। पूर्ण इकाइयों तक सन्निकृत भागफल—हमारे उदाहरण में 3—ही मिनटों में व्यक्त आवश्यक संशोधन है।

उदाहरण 2. तीछ्ण कोण α ज्ञात करें, यदि $\lg \cos \alpha = \bar{1}.4361$ है।

निकटतम सारणीगत मान $\bar{1}.4359$ है; सारणीगत अंतर $d = 44$ है। नाम lg cos *नीचे* लिखा हुआ है। इसीलिए *दायें* स्थित कोण $74^\circ 10'$ लेते हैं। प्रत्त और सारणीगत मानों के बीच के अंतर का दसगुना मान 20 है। भागफल $\frac{20}{44}$ (जो आधे से कम है) शून्य के बराबर सन्निकृत करते हैं।

अत: $\alpha = 74^\circ 10'$ है।

उदाहरण 3. तीछ्ण कोण α ज्ञात करें, यदि $\lg \cot \alpha = \bar{1}.6780$ है।

निकटतम सारणीगत मान $\bar{1}.6785$ है; सारणीगत अंतर 32 हैं। नाम lg cot *नीचे* लिखा हुआ है, इसलिए दायें स्थित कोण $64^\circ 30'$ लेते हैं। प्रत्त मान सारणीगत मान से 5 कम है। दसगुनी संख्या 50 में 32 से भाग देते हैं; सन्निकृत भागफल 2 के बराबर है। $2'$ जोड़ने पर $\alpha = 64^\circ 32'$ मिलता है।

आलेख:

$$\lg \cot \alpha = \bar{1}.6780$$

$$\begin{array}{rl} \bar{1}.6785 = \lg \cot 64^\circ 30' & (d = 32) \\ -5 \quad\quad\quad\quad\quad +2' & \\ \hline \bar{1}.6780 = \lg \cot 64^\circ 32' & \end{array}$$

उदाहरण 4. तीक्ष्ण कोण α ज्ञात करें, यदि $\lg \sin\alpha = \bar{1}.7414$ है।

$$\lg \sin\alpha = \bar{1}.7414$$

$$\begin{array}{r} \bar{1}.7419 = \lg\sin 33^\circ 30' \ (d=19) \\ -5 \qquad\qquad -3' \\ \hline \bar{1}.7414 = \lg\sin 33^\circ 27' \\ \alpha = 33^\circ 27'. \end{array}$$

§ 191. लगरथन द्वारा ऋजुकोणिक त्रिभुज का हल

स्थिति I. प्रत्त हैं : कर्ण $c = 9.994$, संलंब $b = 5.752$; ज्ञात करें : a, B, A ।

(1) B का निर्धारण :

$$\sin B = \frac{b}{c},$$

$$\begin{array}{r} \lg b = 0.7598 \\ -\lg c = 1.0003 \\ \hline \lg\sin B = \bar{1}.7601;\ B = 35^\circ 8'. \end{array}$$

(2) A का निर्धारण :

$$A = 90^\circ - B = 54^\circ 52'.$$

(3) a का निर्धारण :

$$a = b\tan A;$$

$$\begin{array}{r} \lg b = 0.7598 \\ \lg\tan A = 0.1526 \\ \hline \lg a = 0.9124;\ a = 8.173. \end{array}$$

स्थिति II. संलंब $a = 0.920$ और $b = 0.849$ प्रत्त हैं। कर्ण और तीक्ष्ण कोण ज्ञात करें।

(1) कोण B का निर्धारण :

$$\tan B = \frac{b}{a}.$$

$$\begin{array}{r} \lg b = \bar{1}.9289 \\ -\lg a = 0.0362 \\ \hline \lg\tan B = \bar{1}.9651;\ B = 42^\circ 42'. \end{array}$$

(2) कोण A का निर्धारण :

$$A = 90^\circ - B = 47^\circ 18'.$$

(3) कर्ण c का निर्धारण :

$$c = \frac{b}{\sin B},$$

$$\lg b = \bar{1}.9289$$

$$-\lg \sin B = 0.1687$$

$$\lg c = 0.0976; \; c = 1.252.$$

स्थिति III. प्रत्त : कर्ण $c = 798.1$, तीछ्ण कोण A $49^\circ 18'$ । a, b, B ज्ञात करें ।

(1) B का निर्धारण :

$$B = 90^\circ - 49^\circ 18' = 40^\circ 42'.$$

(2) a का निर्धारण :

$$a = c \sin A;$$

$$\lg c = 2.9021$$

$$\lg \sin A = \bar{1}.8797$$

$$\lg a = 2.7818; \; a = 605.1.$$

(3) b का निर्धारण :

$$b = c \sin B;$$

$$\lg c = 2.9021$$

$$\lg \sin B = \bar{1}.8143$$

$$\lg b = 2.7164; \; b = 520.5.$$

स्थिति IV. प्रत्त : संलंब $a = 324.6$, तीछ्ण कोण $B = 49^\circ 28'$ । ज्ञातव्य : b, c, A.

(1) A का निर्धारण :

$$A = 90^\circ - B = 90^\circ - 49^\circ 28' = 40^\circ 32'.$$

(2) b का निर्धारण :

$$b = a \tan B,$$

$$\lg a = 2.5113$$

$$\lg \tan b = 0.0680$$

$$\lg b = 2.5793; \; b = 379.6.$$

(3) c का निर्धारण :

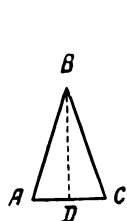
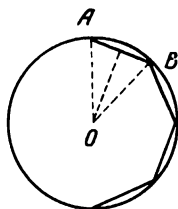
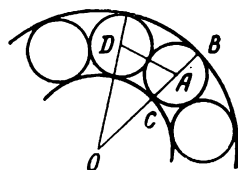
$$c = \frac{a}{\sin A};$$

$$\begin{aligned} \lg a &= 2.5113 \\ -\lg \sin A &= 0.1872 \\ \hline \lg c &= 2.6985; \; c = 499.5. \end{aligned}$$

§ 192. ऋजकोणिक त्रिभुजों के हल का व्यावहारिक उपयोग

प्रश्न हल करने की उपरोक्त विधियों का प्रयोग करने के लिए सारणियों को अच्छी तरह से समझ लेना चाहिए और उनके सहारे सही-सही आवश्यक फल ज्ञात करना सीख लेना चाहिए। पर अपने आप में यह पर्याप्त नहीं है; दो और कठिनाइयां रह जाती हैं। पहली कठिनाई शुद्ध ज्यामितिक प्रकृति की है। *किसी भी प्रत्त ज्यामितिक आकृति में ऋजकोणिक त्रिभुजों को सरलता से देखने और पहचानने की, उसे अलग करने की विधि आनी चाहिए।* कुछ आम उदाहरण नीचे दिये जा रहे हैं।

उदाहरण 1. समद्विबाहु त्रिभुज ABC (चित्र 220) में आधार AC और पार्श्व की भुजा AB ज्ञात हैं। शीर्षस्थ कोण B ज्ञात करें।

ऊँचाई BD खींचते हैं, जो आधार AC और कोण B को समद्विभाजित करती है। AC ज्ञात होने के कारण $AD = \frac{AC}{2}$ भी ज्ञात है। ऋजकोणिक त्रिभुज ABD में संलंब AD और कर्ण AB के सहारे $\angle ABD$ ज्ञात करते हैं (§ 187 और § 190 में स्थिति I)। उसे दुगुना करने पर शीर्ष कोण B ज्ञात हो जाता है।

चित्र 220 चित्र 221 चित्र 222

उदाहरण 2. वृत्त की त्रिज्या R दी गयी है, उसमें अंतर्गत नियमित नौभुज की भुजा AB ज्ञात करें।

चापकर्ण AB के सिरों से त्रिज्या OA तथा OB खींचते हैं (चित्र 221), जिससे समद्विबाहु त्रिभुज OAB मिलता है। इस त्रिभुज में पार्श्विक भुजा $OA = R$ ज्ञात है। इसके अतिरिक्त, शीर्षस्थ कोण $\angle AOB = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$ है। त्रिभुज AOB को दो ऋजकोणिक त्रिभुजों में बाँटते हैं और पिछले प्रश्न की तरह इस प्रश्न को § 187 और § 190 की स्थिति III का रूप देते हैं।

दूसरी, सबसे अधिक महत्त्वपूर्ण, कठिनाई है प्रत्त समस्या को गणित की भाषा में व्यक्त करना।

उदाहरण 3. बाल-बेयरिंग के आंतरिक और बाह्य छल्लों के बीच 16 mm व्यास वाली 20 गोलियां अँट जायें, इसके लिए छल्लों का व्यास कितना होना चाहिए ?

(समस्या को सरल करने के लिए यह मान लेते हैं कि गोलियां सटा-सटा कर रखी जायेंगी।)

इस उदाहरण में मुख्य समस्या है इसका गणितीय सार निर्धारित करना। चित्र 222 बनाकर देखते हैं कि गोली का व्यास $BC = 16$ mm होने के कारण त्रिज्या $AB = AC = 8$ mm है। इसके अतिरिक्त, दो पड़ोसी गोलियों के केन्द्रों तक खींची गयी त्रिज्याओं OA और OD के बीच का कोण $\frac{360^\circ}{20} = 18^\circ$ है। दो पड़ोसी गोलियों के केंद्रों को मिलाने वाले कर्त AD की लंबाई 16 mm (एक गोली का व्यास) होनी चाहिए : $AD = 16$ mm। अब हमें एक समद्विबाहु त्रिभुज AOD मिलता है, जिसमें आधार $AD = 16$ mm और शीर्ष-कोण $\angle AOD = 18^\circ$ ज्ञात है। इसे दो ऋजकोणिक त्रिभुजों में बाँट कर § 191 की स्थिति IV की तरह हल करते हैं। $OD = OA = 51.1$mm प्राप्त होता है, जिससे बाह्य त्रिज्या :

$$OB = OA + AB = 51.1 + 8 = 59.1 \text{ mm}$$

और आंतरिक त्रिज्या :

$$OC = OA - AC = 43.1 \text{ mm}$$

ज्ञात होती हैं।

§ 193. समान कोण वाले त्रिकोणमितिक फलनों के पारस्परिक संबंध

किसी तीछ्र कोण के लिए त्रिकोणमितिक फलनों में से किसी एक का मान ज्ञात होने पर नीचे दिये गये सूत्रों की सहायता से उसी कोण के लिए बाकी के

मान भी ज्ञात किये जा सकते हैं। लेकिन इन सूत्रों का वास्तविक महत्त्व यह है कि इनकी सहायता से अनेक सामान्य सूत्रों को सरल रूप देकर कलन प्रक्रिया को छोटा किया जा सकता है।

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \qquad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1;$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \qquad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1; \qquad \cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1;$$

$$\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha; \qquad \operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \cot^2 \alpha;$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{\cot^2 \alpha}{1 + \cot^2 \alpha};$$

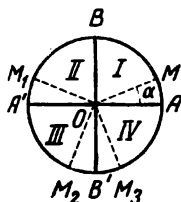
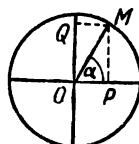
$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}.$$

ये सूत्र किसी भी कोण वाले त्रिकोणमितिक फलनों के लिए सत्य हैं (दे. अगला अनुच्छेद)।

§ 194. मनचाहे कोण के त्रिकोणमितिक फलन

सिर्फ तीछ्ण कोण के त्रिकोणमितिक फलनों की सहायता से भी पूरी त्रिकोणमिति रची जा सकती है। लेकिन ऐसा करने पर तिरोकोणिक (या कुंदकोणिक) त्रिभुजों के हल तथा त्रिकोणमिति का उपयोग करने वाली अन्य समस्याओं में एक ही तरह के प्रश्न के लिए अनेकानेक अलग-अलग स्थितियों पर विचार करना होगा। हर प्रकार के प्रत्त कोण के लिए उसके मान के अनुसार हल की अलग विधि अपनानी पड़ेगी। इसके विपरीत, यदि ज्या, कोज्या, आदि, अवधारणाओं को इतना व्यापक बनाया जाए कि वे 0° से 180° तक के कोणों के लिए ही नहीं, इससे अधिक मान वाले कोणों के लिए भी, सिर्फ धनात्मक ही नहीं, ऋणात्मक कोणों के लिए भी उपयोगी हो सकें, तो विविध प्रश्नों का हल एकरूप हो जायेगा (ऋण, धन कोण देखें § 144 में)।

कोणों को मापने के लिए वृत्त $ABA'B'$ (चित्र 223) खींचते हैं, जिसमें दो परस्पर लंब व्यास AA' ("प्रथम" व्यास) और BB' ("द्वितीय" व्यास) हैं। चाप बिंदु A से नापेंगे। घड़ी की सुई घूमने की दिशा को ऋण दिशा मानेंगे और इसकी विपरीत दिशा को धन दिशा मानेंगे।

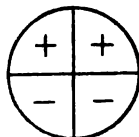
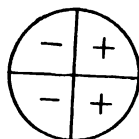
केंद्र O के गिर्द घूर्णन कर सकने वाली **घूर्णी त्रिज्या** OM स्थिर त्रिज्या OA के साथ कोण α बनाती है। यह कोण प्रथम चतुर्थांश में हो सकता है ($\angle MOA$), या द्वितीय में ($\angle M_1OA$), या तृतीय में ($\angle M_2OA$), या चतुर्थ में ($\angle M_3OA$)।

चित्र 223 चित्र 224

OA तथा OB दिशाओं को धनात्मक और OA' तथा OB' दिशाओं को ऋणात्मक मानकर त्रिकोणमितिक फलनों को निम्न प्रकार से परिभाषित करते हैं :

कोण α की **ज्या-रेखा** (चित्र 224) द्वितीय व्यास पर घूर्णी त्रिज्या का प्रक्षेप (तदनुरूप चिह्न के साथ) OQ है।

कोज्या-रेखा—घूर्णी त्रिज्या का प्रथम व्यास पर प्रक्षेप है।

कोण α की ज्या (चित्र 224) ज्या-रेखा* OQ और वृत्त की त्रिज्या R का व्यतिमान है;

कोण α की कोज्या—कोज्या-रेखा* OP और त्रिज्या R का अनुपात है। [यदि त्रिज्या R को इकाई मान लिया जाये, तो कर्त OQ और OP क्रमश: $\sin \alpha$ और $\cos \alpha$ होंगे।]

चित्र 225 चित्र 226

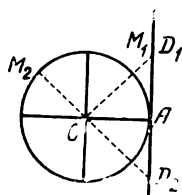
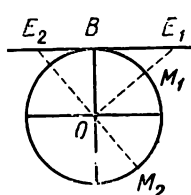
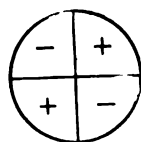
चित्र 225 में दिखाया गया है कि किस चतुर्थांश में ज्या का चिह्न कैसा होगा। चित्र 226 में कोज्या के चिह्न दिखाये गये हैं।

---

* तदनुरूप चिह्न के साथ।

स्पज-रेखा (AD_1, AD_2 आदि) प्रथम व्यास के सिरे A में खींची गयी स्पर्शक रेखा का स्पर्श-बिंदु से उस बिंदु तक का कर्त है, जिस बिंदु पर घूर्णी त्रिज्या (OM_1, OM_2 आदि) का बढ़ा हुआ भाग स्पर्शक रेखा को काटता है (चित्र 227)।

कोस्पज-रेखा (BE_1, BE_2 आदि) द्वितीय व्यास के सिरे B से खींची गयी स्पर्शक रेखा का स्पर्श-बिंदु से उस बिंदु तक का कर्त है, जिस बिंदु पर घूर्णी त्रिज्या (OM_1, OM_2 आदि) का बढ़ा हुआ भाग स्पर्शक रेखा को काटता है (चित्र 228)।

कोण की स्पज स्पज-रेखा* और त्रिज्या का व्यतिमान है।

चित्र 227 चित्र 228 चित्र 229

कोण की कोस्पज कोस्पज-रेखा† और त्रिज्या का व्यतिमान है।

भिन्न चतुर्थांशों में स्पज और कोस्पज के चिह्न चित्र 229 में दिखाये गये हैं।

व्युक और व्युज को क्रमशः कोज्या और ज्या के व्युत्क्रम मान के रूप में ही परिभाषित करना सरल रहेगा।

पृष्ठ 401 की सारणी में कोण α के लिए हर त्रिकोणमितिक फलन को बाकी त्रिकोणमितिक फलनों में व्यक्त किया गया है (α कोई भी कोण हो सकता है)। जिन व्यंजनों के पहले दुहरे चिह्न ($\pm$) लगे हैं, उनके चिह्न का चयन उस चतुर्थांश पर निर्भर करता है, जिसमें कोण α लेते हैं (दे. चित्र 225, 226, 229)।

त्रिकोणमितिक फलनों के ग्राफ § 213 में देखें।

* तदनुरूप चिह्न के साथ।

† स्पज-रेखा की धनात्मक दिशा नीचे से ऊपर मानी जाती है और कोस्पज-रेखा की बायें से दायें।

किसी एक त्रिकोणमितिक फलन को बाकी में व्यक्त करना

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$	$\sec x$	$\operatorname{cosec} x$
$\sin x$		$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}{\sec x}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec} x}$
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$		$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\frac{\cot x}{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}$	$\frac{1}{\sec x}$	$\frac{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x-1}}{\operatorname{cosec} x}$
$\tan x$	$\frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$		$\frac{1}{\cot x}$	$\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x-1}}$
$\cot x$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$		$\frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$	$\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x-1}$
$\sec x$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\frac{1}{\cos x}$	$\pm\sqrt{1+\tan^2 x}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}{\cot x}$		$\frac{\operatorname{cosec} x}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x-1}}$
$\operatorname{cosec} x$	$\frac{1}{\sin x}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan x}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$	$\frac{\sec x}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$	

§ 195. अवकरण-सूत्र

[90° से अधिक मान वाले कोण के त्रिकोणमितिक फलन को तीछ कोण α के त्रिकोणमितिक फलन में व्यक्त करने वाले सूत्र को अवकरण-सूत्र कहते हैं। ये सूत्र किसी भी कोण को तीछ कोण में अवकृत करते हैं; इस प्रक्रिया में फलन का नाम, चिह्न बदल भी सकता है और नहीं भी। यह अवकरण-सूत्र का आरंभिक (ऐतिहासिक और व्यावहारिक) अर्थ है। अधिक व्यापक अर्थ में α कोई भी कोण हो सकता है।]

अवकरण-सूत्र निम्न सूत्रों को कहते हैं, जिनकी सहायता से (1) 90° से अधिक मान वाले कोण के त्रिकोणमितिक फलन का सांख्यिक मान ज्ञात किया जा सकता है और (2) जटिल सूत्रों को सरल रूप दिया जा सकता है।

ये सूत्र किसी भी कोण के लिए सत्य हैं, पर ज्यादातर इनका उपयोग $\alpha =$ तीछ कोण के लिए ही होता है।

ग्रुप I :

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha,\quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha,$$

ये सूत्र जरूरत पड़ने पर ऋणात्मक कोणों से छुटकारा दिला सकते हैं।

ग्रुप II :

$$\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\\ \tan\\ \cot\end{matrix}\right\}(360^\circ k+\alpha) = \left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\\ \tan\\ \cot\end{matrix}\right\}\alpha$$

(यहां k कोई धनात्मक पूर्ण संख्या है)।

ये सूत्र 360° से बड़े कोणों से छुटकारा दिला सकते हैं।

ग्रुप III :

$$\left.\begin{matrix}\sin\\ \cos\\ \tan\\ \cot\end{matrix}\right\}(180^\circ \pm\alpha) = \left.\begin{matrix}\mp\sin\\ -\cos\\ \pm\tan\\ \pm\cot\end{matrix}\right\}\alpha.$$

फलनों के नाम नहीं बदलते हैं; दायें पक्ष में वह चिह्न रखते हैं, जो तीछ कोण α के लिए बायें पक्ष का चिह्न होगा।

उदाहरण के लिए, $\sin(180° - \alpha) = +\sin\alpha$ होगा, क्योंकि α के तीछ्ण कोण होने पर $180° - \alpha$ दूसरे चतुर्थांश में होगा, जिसमें ज्या धनात्मक होती है; $\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$ होगा, क्योंकि α के तीछ्ण कोण होने पर $180° + \alpha$ तीसरे चतुर्थांश में होगा, जहां ज्या ऋणात्मक होती है।

ग्रुप IV :

$$\left.\begin{array}{l}\sin\\ \cos\\ \tan\\ \cot\end{array}\right\}(90° + \alpha) = \left.\begin{array}{l}+\cos\\ \mp\sin\\ \mp\cot\\ \mp\tan\end{array}\right\}\alpha;$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin\\ \cos\\ \tan\\ \cot\end{array}\right\}(270° \pm \alpha) = \left.\begin{array}{l}-\cos\\ \pm\sin\\ \mp\cot\\ \mp\tan\end{array}\right\}\alpha.$$

फलन का नाम बदल जाता है: हर फलन की जगह उसका "पूरक" फलन लेते हैं*। चिह्नों का नियम पिछले ग्रुप की तरह ही है। उदाहरणार्थ, $\cos(270° - \alpha) = -\sin\alpha$ होगा, क्योंकि तीछ्ण कोण α के लिए $270° - \alpha$ तीसरे चतुर्थांश में होता है, जिसमें कोज्या ऋणात्मक है; $\cos(270° + \alpha) = +\sin\alpha$ है, क्योंकि चौथे चतुर्थांश में कोज्या धनात्मक है।

उपरोक्त सभी सूत्र निम्न नियम से प्राप्त हो सकते हैं :

सम संख्या n के लिए कोण $90°n + \alpha$ का कोई त्रिकोणमितिक फलन कोण α के उसी फलन के बराबर होता है (परम मान के अनुसार); विषम संख्या n के लिए कोण $90°n + \alpha$ का कोई त्रिकोणमितिक फलन कोण α के पूरक फलन के बराबर होता है (परम मान के अनुसार)। तीछ्ण कोण α के लिए कोण $90°n + \alpha$ के त्रिकोणमितिक फलन का चिह्न धनात्मक होने पर दोनों फलनों के चिह्न समान होते हैं; ऋणात्मक होने पर चिह्न असमान होते हैं।

ऊपर दिये गये सूत्रों के परिणाम पृष्ठ 404 की सारणी में दिये गये हैं, जिसमें व्युक और व्युज भी शामिल कर लिये गये हैं।

---

* [ज्या और कोज्या परस्पर 'पूरक' फलन कहलाते हैं, क्योंकि $\sin A = \cos(90° - A)$ है $(A + B = 90°)$। इसी प्रकार, स्पज और कोस्पज भी परस्पर पूरक फलन हैं; व्युक और व्युज भी परस्पर पूरक हैं।]

फलन	कोण								
	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$270^\circ - \alpha$	$270^\circ + \alpha$	$360^\circ k - \alpha$	$360^\circ k + \alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\sin\alpha$
cos	$+\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\cos\alpha$
tan	$-\tan\alpha$	$+\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$+\tan\alpha$	$+\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$+\tan\alpha$
cot	$-\cot\alpha$	$+\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$+\cot\alpha$	$+\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$+\cot\alpha$
sec	$+\sec\alpha$	$+\operatorname{cosec}\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$+\operatorname{cosec}\alpha$	$+\sec\alpha$	$+\sec\alpha$
cosec	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$+\sec\alpha$	$+\sec\alpha$	$+\operatorname{cosec}\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$+\operatorname{cosec}\alpha$

§ 196. योगान्तर सूत्र

कोणों के योग और अंतर के त्रिकोणमितिक फलन निम्न सूत्रों से व्यक्त होते हैं :

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta};$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}.$$

§ 197. दुगुने, तिगुने और आधे कोणों के लिए सूत्र

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$$
$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha};\quad \cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha};$$
$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;\quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$
$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha};\quad \cot 3\alpha=\frac{\cot^3\alpha-3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha-1};$$
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$
$$\cot\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

करणी (मूल-चिह्न) के पहले चिह्न (धन या ऋण) का चयन उस चतुर्थांश पर निर्भर करता है, जिसमें कोण $\frac{\alpha}{2}$ होता है (§ 194-195)।

फलन	कोण								
	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$	$180^\circ+\alpha$	$270^\circ-\alpha$	$270^\circ+\alpha$	$360^\circ k-\alpha$	$360^\circ k+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\sin\alpha$
cos	$+\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\cos\alpha$
tan	$-\tan\alpha$	$+\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$+\tan\alpha$	$+\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$+\tan\alpha$
cot	$-\cot\alpha$	$+\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$+\cot\alpha$	$+\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$+\cot\alpha$
sec	$+\sec\alpha$	$+\mathrm{cosec}\,\alpha$	$-\mathrm{cosec}\,\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\mathrm{cosec}\,\alpha$	$+\mathrm{cosec}\,\alpha$	$+\sec\alpha$	$+\sec\alpha$
cosec	$-\mathrm{cosec}\,\alpha$	$+\sec\alpha$	$+\sec\alpha$	$+\mathrm{cosec}\,\alpha$	$-\mathrm{cosec}\,\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\mathrm{cosec}\,\alpha$	$+\mathrm{cosec}\,\alpha$

§ 196. योगान्तर सूत्र

कोणों के योग और अंतर के त्रिकोणमितिक फलन निम्न सूत्रों से व्यक्त होते हैं :

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta};$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}.$$

§ 197. दुगुने, तिगुने और आधे कोणों के लिए सूत्र

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$$
$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha};\quad \cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha};$$
$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;\quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$
$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha};\quad \cot 3\alpha=\frac{\cot^3\alpha-3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha-1};$$
$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$
$$\cot\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

करणी (मूल-चिह्न) के पहले चिह्न (धन या ऋण) का चयन उस चतुर्थांश पर निर्भर करता है, जिसमें कोण $\frac{\alpha}{2}$ होता है (§ 194-195)।

§ 198. त्रिकोणमितिक व्यंजनों को लगरथन-योग्य रूप देने के लिए सूत्र

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha),$$
$$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha),$$

$$\tan\alpha\pm\tan\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\quad \cot\alpha\pm\cot\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\tan\alpha+\cot\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta};\ \tan\alpha-\cot\beta=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta},$$

$$\tan\alpha+\cot\alpha=2\operatorname{cosec}2\alpha;\quad \tan\alpha-\cot\alpha=-2\cot 2\alpha,$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2};\quad 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

$$1+\sin\alpha=2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$1-\sin\alpha=2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$1\pm\tan\alpha=\frac{\sin(45^\circ\pm\alpha)}{\cos 45^\circ\cos\alpha}=\frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ\pm\alpha)}{\cos\alpha},$$

$$1\pm\tan\alpha\tan\beta=\frac{\cos(\alpha\mp\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \cot\alpha\cot\beta\pm1=\frac{\cos(\alpha\mp\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$1-\tan^2\alpha=\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha},\quad 1-\cot^2\alpha=-\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha},$$

$$\tan^2\alpha-\tan^2\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta},$$

$$\cot^2\alpha-\cot^2\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta},$$

$$\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha,\quad \cot^2\alpha-\cos^2\alpha=\cot^2\alpha\cos^2\alpha$$

§ 199. त्रिभुज के कोणों से युक्त व्यंजनों को लगरथन-योग्य रूप देना

यदि A, B, C किसी त्रिभुज के कोण हैं या, अधिक व्यापक रूप में, $A+B+C=180^\circ$ है, तो निम्न सूत्रों की सहायता से कुछ ऐसे व्यंजनों को भी लगरथन-योग्य रूप दिया जा सकता है, जिनका आरंभिक रूप में लगरथ निकालना संभव नहीं होता। ये सूत्र कुंदकोणिक (या तिरोत्रिभुज) के हल में लाभकर होते हैं :

$$\sin A+\sin B=2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$\sin A-\sin B=2\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$\cos A-\cos B=2\sin\frac{B-A}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$\tan A+\tan B=\frac{\sin C}{\cos A\cos B},$$

$$\cot A+\cot B=\frac{\sin C}{\sin A\sin B},$$

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C,$$

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

§ 200. चंद महत्त्वपूर्ण संबंध

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)].$$

इन सूत्रों का उपयोग गुणा से बचने के लिए कर सकते हैं (बिना लगरथन के कलन में; उच्च गणित में अक्सर त्रिकोणमितिक फलनों के समेकन में इनका उपयोग होता है)।

$$\sin \alpha = \frac{2 \tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}},$$

ये सूत्र त्रिकोणमितिक समीकरण हल करने में उपयोगी होते हैं (उच्च गणित में – त्रिकोणमितिक फलनों के समेकन में)।

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2 \sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \frac{\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{2 \sin\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \ldots;$$

$$\sin n\alpha = n \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - C_n^3 \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + C_n^5 \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \ldots$$

अंतिम दो सूत्रों में C_n^k दुपदी संद हैं (दे. § 137)। योज्य पदों के चिह्न बारी-बारी से बदलते रहते हैं। इन सूत्रों में दायां पक्ष स्वयं उस योज्य पर समाप्त हो जाता है, जिसमें कोज्या का घात-सूचक शून्य या एक होता है।

उदाहरण :

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha . \sin^2 \alpha;$$
$$\sin 3\alpha = 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha;$$
$$\cos 4\alpha = \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha;$$
$$\sin 4\alpha = 4 \cos^3 \alpha \sin \alpha - 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha.$$

§ 201. त्रिभुज के अंगों का आपसी संबंध*

द्योतन : a, b, c भुजाएं हैं; A, B, C त्रिभुज के कोण हैं; $p=\frac{a+b+c}{2}$ (अर्ध परिमिति) है; h = ऊँचाई; S = क्षेत्रफल; R = परीत वृत्त की त्रिज्या; r = अंतरित वृत्त की त्रिज्या; r_a ऐसे वृत्त की त्रिज्या है, जो भुजा a को स्पर्श करता है और भुजा b तथा c के बढ़े हुए भाग को स्पर्श करता है (**बहिरंतरित** वृत्त की त्रिज्या); h_a भुजा a पर खींची गयी ऊंचाई है; β_A कोण A की अर्धक रेखा है ।

(1) **कोज्या-प्रमेय** :

$$a^2=b^4+c^2-2bc\cos A$$

$$\text{या } \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc} \quad \text{(तुलना करें § 149 से)}$$

(2) **अर्ध कोण के सूत्र** ((1) से प्राप्त होते हैं)

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}}; \quad \cos\frac{A}{2}\sqrt{\frac{p\,(p-a)}{bc}};$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{p}}=\frac{r}{p-a},$$

जिससे

$$\tan\frac{A}{2}\,\tan\frac{B}{2}=\frac{p-c}{p}; \quad \frac{\tan\frac{A}{2}}{\tan\frac{B}{2}}=\frac{p-b}{p-a}.$$

(3) **ज्या-प्रमेय** :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

इसकी सहायता से निम्न दो सूत्र निकलते हैं ।

---

* यहाँ सभी सूत्रों के सिर्फ एक-एक रूप दिये गये हैं; अन्य दो (सदृश) रूप उनमें तदनुरूप वर्णों के परिवर्तन से प्राप्त हो सकते हैं। उदाहरणार्थ,

सूत्र $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ से हम दो अन्य सूत्र $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ तथा $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ प्राप्त करते हैं ।

(4) **स्पज-प्रमेय** (रेगियोमांटुस का सूत्र):

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}=\frac{\cot\frac{C}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}.$$

(5) **मोलवेंडे (Mollweide) का सूत्र :**

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}};\quad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

(6) **क्षेत्रफल के सूत्र :**

$$S=\frac{bc\sin A}{2};\quad S=\frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B};$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};\quad S=\frac{h^2\sin B}{2\sin A\sin C};$$

$$S=r^2\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2};\quad S=p^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2};$$

$$S=p(p-a)\tan\frac{A}{2},\quad S=\frac{h^2_a\sin A}{2\sin B\sin C};\quad S=\sqrt{rr_a r_b r_c}.$$

(7) **परीत, अंतरित, बहिरंतरित वृत्तों की त्रिज्याएं :**

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{4S}=\frac{p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{bc}{2h_a};$$

$$4R=r_a+r_b+r_c-r;$$

$$r=\frac{S}{p}=(p-a)\tan\frac{A}{2}=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2};$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c};$$

$$r_a = \frac{S}{p-a} = p \tan \frac{A}{2}.$$

(8) अर्धक :

$$\beta_A = \frac{h_a}{\cos \frac{B-C}{2}}.$$

§ 202. तिरोत्रिभुजों के हल

स्थिति I. भुजा a, b, c प्रत्त हैं, कोण A, B, C ज्ञात करें।

(a) कोज्या-प्रमेय और § 6 की सारणी के सहारे एक कोण ज्ञात कर लेते हैं :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}.$$

दूसरा कोण (उदाहरणार्थ, B) ज्या-प्रमेय से ज्ञात हो सकता है :

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

तीसरा कोण निम्न सूत्र से ज्ञात होता है :

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

अधिक ($10'$ तक की भी) शुद्धता से मान ज्ञात करने के लिए (विशेषकर प्रथम परिणाम का) कलन काफी उबाने वाला है।

लगरथी सारणी के उपयोग से कोण A, B, C (इनमें से दो का कलन करना काफी रहेगा) अर्ध कोणों के किसी सूत्र से ज्ञात हो सकते हैं (§ 201, संदर्भ 2)।

कलन-क्रम

प्रत: $a = 74,\ b = 130,\ c = 186.$

$2p = a + b + c = 390,\ p = 195,\ \lg p = 2.2900.$

$p - a = 121$	$\lg(p-a) = 2.0828$
$p - b = 65$	$\lg(p-b) = 1.8129$
$p - c = 9$	$\lg(p-c) = 0.9542.$

(1) A का कलन :

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}},$$

$$\lg(p-b)=1.8129,$$
$$\lg(p-c)=0.9542,$$
$$\text{kr.}\ \lg p=\bar{3}.7100,\ *$$
$$\text{kr.}\ \lg(p-a)=\bar{3}.9172,$$
$$\bar{2}.3943$$

$$\lg\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\cdot\bar{2}.3943=\bar{1}.1791$$

$$\frac{A}{2}=8^\circ 57';\quad A=17^\circ 54'.$$

(2) B का कलन :

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{p\,(p-b)}}.$$

ऊपर की तरह कलन करने पर $B=32^\circ 40'$ मिलता है।

(3) C का कलन (जाँच के लिए) :

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}}.$$

फल : $C=129^\circ 26'$.

जाँच : $A=17^\circ 54'$
$B=32^\circ 40'$
$C=129^\circ 26'$
$A+B+C=180^\circ$.

स्थिति 2. दो भुजाएं a, b और उनके वीच का कोण C प्रत्त हैं। भुजा c तथा कोण A, B ज्ञात करें।

(a) § 6 की सारणी का उपयोग करते हुए कोज्या-प्रमेय की सहायता से तीसरी भुजा c ज्ञात करते हैं :

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C;$$

---

* kr. lg p का अर्थ है संख्या lg p का कृत्रिम रूप (§ 130)।

इसके बाद ज्या-प्रमेय से कोण A ज्ञात करते हैं :

$$\sin A = \frac{a \sin C}{c}.$$

यहां कोण A तीछ्ण कोण होगा, यदि $\frac{b}{a} > \cos C$ होगा; कोण A कुंद कोण होगा, यदि $\frac{b}{a} < \cos C$ होगा।

तीसरा कोण सूत्र $C = 180^\circ - (A+B)$ से ज्ञात कर सकते हैं, या (जाँच के लिए) कोण A की तरह ज्या-प्रमेय द्वारा। भुजा c का मान अधिक शुद्धता से ज्ञात करने के लिए काफी देर तक कलन करना पड़ता है।

(b) लगरथी सारणी के उपयोग से भुजा c को ज्या-प्रमेय की सहायता से ज्ञात किया जाता है (कोण A तथा B ज्ञात कर लेने के बाद)।

कोण A, B रेगियोमोंटानुस के सूत्र

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\cot \frac{C}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$$

से ज्ञात करते हैं। इसमें a, b, C के प्रत्त मान रख कर $\frac{A-B}{2}$ ज्ञात करते हैं; $\frac{A+B}{2}\left(= 90^\circ - \frac{C}{2}\right)$ पहले से पता है; इन व्यंजनों की सहायता से A और B ज्ञात करना कठिन नहीं होता।

कलन-क्रम

प्रत्त: $a = 289$, $b = 601$, $C = 100^\circ 20'$.

(1) $\frac{B-A}{2}$ का कलन :

$$\tan \frac{B-A}{2} = \frac{b-a}{b+a} \cot \frac{C}{2};$$

$$\lg (b-a) = 2.4942,$$

$$\lg \cot \frac{C}{2} = \bar{1}.9212,$$

$$\text{kr. } \lg (b+a) = \bar{3}.0506,$$

$$\lg \text{tg} \frac{B-A}{2} = \bar{1}.4660;$$

$$\frac{B-A}{2}=16^\circ 18'.$$

(2) B और A का कलन :

$$\frac{B+A}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}=39^\circ 50';$$

$$\frac{B-A}{2}=16^\circ 18';$$

इन दो समीकरणों को जोड़ने पर $B=56^\circ 8'$ मिलता है। घटाने से $A=23^\circ 32'$ मिलेगा।

(3) भुजा c का कलन :

$$c=\frac{a \sin C}{\sin A};$$

$$\lg a=2.4609,$$
$$\lg \sin C=\overline{1}.9929,$$
$$\text{kr. } \lg \sin A=0.3987.$$
$$\lg c=2.8525; \quad c=712.0.$$

स्थिति III. कोई दो कोण (जैसे A, B) और एक भुजा c प्रत्त हैं। तीसरा कोण (C) और भुजा a, b ज्ञात करें।

लगरथों की सहायता से या बिना उनकी सहायता के कलन का क्रम निम्न है : पहले सूत्र $180^\circ-(A+B)$ से कोण C ज्ञात करते हैं, फिर ज्या-प्रमेय की सहायता से भुजा a, b ज्ञात करते हैं। लगरथों की सहायता से कलन का आलेख निम्न होगा :

प्रत्त : $A=55^\circ 20'$, $B=44^\circ 41'$, $c=795$.

(1) कोण C का कलन :

$$C=180^\circ-(A+B)=79^\circ 59'.$$

(2) भुजा a का कलन :

$$a=\frac{c \sin A}{\sin C};$$

$$\lg c=2.9004,$$
$$\lg \sin A=\overline{1}.9151,$$
$$\text{kr. } \lg \sin C=0.0067.$$
$$\lg a=2.8222; \quad a=664.0$$

(3) भुजा b का कलन :

सूत्र $b = \frac{c \sin B}{\sin C}$ से ऊपर की तरह कलन करने पर $b = 567.7$ प्राप्त होगा।

स्थिति IV. दो भुजाएं a, b और इनमें से किसी के सामने का कोण B प्रत्त हैं।

लगरथ की सहायता से और इसके बिना कलन का क्रम निम्न है : पहले ज्या-प्रमेय की सहायता से दूसरी भुजा के सामने का कोण A ज्ञात करते हैं :

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b} .$$

कलन-प्रक्रिया में निम्न संभावनाओं से वास्ता पड़ सकता है :

(a) $a > b$, $a \sin B > b$

—प्रश्न हलातीत है।

(b) $a > b$, $a \sin B = b$

—एक संभव हल है $\angle A = 90^\circ$।

(c) $a > b$, $a \sin B < b < a$

—प्रश्न के दो हल हो सकते हैं : कलित ज्या का कोण तीछ भी ले सकते हैं और कुंद भी।

(d) $a \leqslant b$

—प्रश्न का सिर्फ एक हल है : कोण A तीछ कोण होगा।

कोण A निर्धारित कर लेने के बाद कोण C को सूत्र $C = 180^\circ - (A + B)$ से ज्ञात करते हैं। यदि A के दो मान संभव हैं, तो C के लिए भी दो मान प्राप्त होंगे। अंत में, तीसरी भुजा c को ज्या-प्रमेय की सहायता से ज्ञात करते हैं :

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B} .$$

यदि C के दो मान निकाले गये हैं, तो c के भी दो मान होंगे। इस प्रकार, प्रश्न की शर्तों को दो भिन्न त्रिभुज संतुष्ट करते हैं।

कलन का आलेख :

प्रत्त : $a = 360.0$, $b = 309.0$, $B = 21^\circ 14'$.

यहा $a > b$ और $a \sin B < b$ है, अतः तीसरी संभावना IV (c) से वास्ता पड़ रहा है।

(1) कोण A का कलन :

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b};$$

$$\lg a = 2.5563,$$
$$\lg \sin B = \bar{1}.5589,$$
$$\text{kr. } \lg b = \bar{3}.5100,$$
$$\lg \sin A = \bar{1}.6252;$$

प्रथम हल $A_1 = 24°57'$; दूसरा हल $A_2 = 180° - 24°57' = 155°3'$ है। (यदि $a \sin B > b$ होता, तो $\lg \sin A$ का लंछक धनात्मक होता और प्रश्न का कोई हल नहीं होता।)

(2) कोण C का कलन :

$C = 180° - (A+B)$ से प्रथम हल $C_1 = 133°49'$ और दूसरा हल $C_2 = 3°43'$ है।

(3) भुजा c का कलन :

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B};$$

प्रथम हल	द्वितीय हल
$\lg b = 2.4900,$	$\lg b = 2.4900,$
$\lg \sin C_1 = \bar{1}.8583,$	$\lg \sin C_2 = \bar{2}.8117,$
$\text{kr. } \lg \sin B_1 = 0.4411,$	$\text{kr. } \lg \sin B_2 = 0.4411,$
$\lg c_1 = 2.7894;\ c_1 = 655.7$	$\lg c_2 = 1.7428;\ c_2 = 55.31.$

§ 203. प्रतीप त्रिकोणमितिक फलन (वृत्तीय फलन)

संबंध $x = \sin y$ के कारण सारणी से x प्रत्त होने पर y ज्ञात कर सकते हैं और y प्रत्त होने पर x भी ज्ञात कर सकते हैं (x का परम मान 1 से अधिक नहीं होना चाहिए)। इसलिए हम कह सकते हैं कि ज्या ही कोण का फलन नहीं है, कोण भी ज्या का फलन है। इस अंतिम उक्ति को $y = \arcsin x$ से व्यक्त करते हैं। उदाहरणार्थ, $\frac{1}{2} = \sin 30°$ को गणितीय वाक्य $30° = \arcsin \frac{1}{2}$ के रूप में भी लिख सकते हैं। दूसरे वाक्य में कोण को डिग्रीपरक माप की जगह सामान्यतया रेडियनी माप में व्यक्त करते हैं : $\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$। यह $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$ का ही

दूसरा रूप है, फिर भी शुरू-शुरू में छात्रों को इससे काफी कठिनाई होती है। लेकिन जब $2^3 = 8$ की जगह $2 = \sqrt[3]{8}$ लिखते हैं, तो इसमें छात्र को कोई कठिनाई नजर नहीं आती। शायद इसलिए कि घन निकालने की क्रिया एक है और घनमूल की दूसरी; यहाँ छात्रगण दो *विभिन्न सक्रियाएं* देखते हैं और उनके आदी हो जाते हैं [यद्यपि ये भी परस्पर प्रतीप संक्रियाएं मात्र हैं]। कोण से ज्या और ज्या से कोण एक ही सारणी द्वारा ज्ञात करते हैं, जिसमें ज्या और ज्या-चाप (arcsin) अलग-अलग निर्दिष्ट नहीं होते। इसीलिए ज्या-चाप *एक अलग संक्रिया* है, इसका भान छात्रों को नहीं हो पाता। वैसे यदि देखा जाए, तो सरल गणित के क्षेत्र में इस अवधारणा को अपनाने की जरूरत भी नहीं है। उच्च गणित में ज्या-चाप एक नियत संक्रिया (समेकन) के अवश्यंभावी परिणाम के रूप में प्राप्त हुआ करता है; ज्या-चाप की अवधारणा और इसके द्योतन का जन्म इसी सिलसिले में हुआ है।

परिभाषा. arcsin x *ऐसा कोण है, जिसकी ज्या का मान* x *है* [arcsin x = एक्स मान वाली ज्या का चाप (कोण)]। arccos x, arctan x, arccot x, arcsec x और arccosec x की परिभाषाएं इसी प्रकार से दी जाती हैं। फलन arcsin x, arccos x आदि फलन $\sin x$, $\cos x$ के प्रतीप फलन (दे. § 210) हैं, इसलिए इन्हें **प्रतीप त्रिकोणमितिक फलन** (अन्य शब्दों में, **चापीय फलन**) कहते हैं। सभी प्रतीप त्रिकोणमितिक फलन अनेकार्थी होते हैं, क्योंकि इन सब पर निम्न कथन लागू होता है; x के किसी एक नियत मान के लिए फलन के असंख्य मान होते हैं (क्योंकि असंख्य कोणों, जैसे α, $180° - \alpha$, $360° + \alpha$ आदि की ज्या एक ही होती है)।

arcsin x का **मुख्य मान** उसका वह मान है, जो $-\frac{\pi}{2}$ (या $-90°$) और $+\frac{\pi}{2}$ (या $+90°$) के बीच होता है। यथा, arcsin $\frac{\sqrt{2}}{2}$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{4}$ है; arcsin $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{4}$ है।

arccos x का मुख्य मान उसका वह मान है, जो 0 से π $(+180°)$ के बीच होता है। यथा, arccos $\frac{\sqrt{2}}{2}$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{4}$ है; arccos $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ का मुख्य मान $+\frac{3}{4}\pi$ है।

27 01458

arccot x और arcsec x के मुख्य मान (arccos x के मानों की तरह ही) 0 और π के बीच होते हैं। arctan x और arccosec x के मुख्य मान (arcsin x के मानों की तरह) $-\frac{\pi}{2}$ और $+\frac{\pi}{2}$ के बीच होते हैं।

उदाहरण. $\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$,

$\operatorname{arccot}\sqrt{3}=+\frac{\pi}{6}$, $\operatorname{arcsec}(-2)=+\frac{2}{3}\pi$ मुख्य मान हैं।

यदि Arcsin x, Arccos x आदि से तदनुरूप प्रतीप त्रिकोणमितिक फलन के मनचाहे मान द्योतित किये जायें और मुख्य मानों के लिए arcsin x, arccos x आदि द्योतन रहने दिये जायें, तो प्रतीप त्रिकोणमितिक फलन के मानों का उसके मुख्य मान के साथ संबंध निम्न सूत्रों से व्यक्त होगा :

$$\text{Arcsin } x=k\pi+(-1)^k \arcsin x \tag{1}$$

$$\text{Arccos } x=2k\pi\pm\arccos x. \tag{2}$$

$$\text{Arctan } x=k\pi+\arctan x, \tag{3}$$

$$\text{Arccot } x=k\pi+\operatorname{arccot} x, \tag{4}$$

जहां k कोई पूर्ण संख्या है (धन, ऋण या शून्य)।

प्रतीप त्रिकोणमितिक फलनों के ग्राफ § 215 में देखें।

उदाहरण 1. $\text{Arcsin}\,\frac{1}{2}=k\pi+(-1)^k\arcsin\frac{1}{2}=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}$.

$k=0$ होने पर फल : $0\cdot\pi+(-1)^0\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$ (या 30° – मुख्य मान),

$k=1$ होने पर फल : $1\cdot\pi+(-1)\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi$ (या 150°);

$k=2$ होने पर फल : $2\cdot\pi+(-1)^2\frac{\pi}{6}=2\pi+\frac{\pi}{6}=2\frac{1}{6}\pi$

(या 390°);

$k=-1$ होने पर फल : $-\pi+(-1)^{-1}\frac{\pi}{6}=-\pi-\frac{\pi}{6}=-1\frac{1}{6}\pi$

(या -210°);

$k=-2$ होने पर फल : $-2\pi+(-1)^{-2}\frac{\pi}{6}=-2\pi+\frac{\pi}{6}=$

$$=-1\frac{5}{6}\pi \text{ (या } -330^\circ)$$

इत्यादि ।

उदाहरण 2. $\text{Arccos}\,\frac{1}{2}=2k\pi\pm\arccos\frac{1}{2}=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

जब $k=0$, तो फल $\frac{\pi}{3}$ (या 60°) और $-\frac{\pi}{3}$ (या -60°) मिलता है;

जब $k=1$, तो फल $2\pi+\frac{\pi}{3}=2\frac{1}{3}\pi$ (या 420°) और $2\pi-\frac{\pi}{3}=1\frac{2}{3}\pi$ (या 300°) मिलता है; इत्यादि ।

§ 204. प्रतीप त्रिकोणमितिक फलनों के प्रमुख संबंध*

$$\sin \text{Arcsin}\, a=a, \quad \text{Arcsin}(\sin\alpha)=k\pi+(-1)^k\alpha,$$
$$\cos \text{Arccos}\, a=a, \quad \text{Arccos}(\cos\alpha)=2k\pi\pm\alpha,$$
$$\tan \text{Arctan}\, a=a, \quad \text{Arctan}(\tan\alpha)=k\pi+\alpha,$$
$$\cot \text{Arccot}\, a=a, \quad \text{Arccot}(\cot\alpha)=k\pi+\alpha,$$

$$\left.\begin{aligned}\arcsin a&=\arccos\sqrt{1-a^2}=\arctan\frac{a}{\sqrt{1-a^2}},\\ \arccos a&=\arcsin\sqrt{1-a^2}=\text{arccot}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}},\\ \arctan a&=\text{arccot}\frac{1}{a}=\arcsin\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\end{aligned}\right\}a>0 \text{ होने पर}$$

$$\arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2},$$

---

* इस अनुच्छेद के सूत्रों में निहित मूल धनात्मक संख्याएं हैं ।

$$\operatorname{arctan} a+\operatorname{arccot} a=\frac{\pi}{2};\ \operatorname{arcsec} a+\operatorname{arccosec} a=\frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{Arcsin} a+\operatorname{Arcsin} b=\operatorname{Arcsin}(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}),$$

$$\operatorname{Arcsin} a-\operatorname{Arcsin} b=\operatorname{Arcsin}(a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2}),$$

$$\operatorname{Arccos} a+\operatorname{Arccos} b=\operatorname{Arccos}(ab-\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}),$$

$$\operatorname{Arccos} a-\operatorname{Arccos} b=\operatorname{Arccos}(ab+\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}),$$

$$\operatorname{Arctan} a+\operatorname{Arctan} b=\operatorname{Arctan}\frac{a+b}{1-ab},$$

$$\operatorname{Arctan} a-\operatorname{Arctan} b=\operatorname{Arctan}\frac{a-b}{1+ab}.$$

$$\arcsin a+\arcsin b=\begin{cases}\arcsin(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2})\ (a^2+b^2<1\ \text{होने पर};\ a^2+b^2>1\ \text{होने पर भी, लेकिन}\ ab<0),\\ \pm[\pi-\arcsin(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}]\ (a^2+b^2>1\ \text{तथा}\ ab>0\ \text{होने पर}).\end{cases}$$

$$\arcsin a-\arcsin b=\begin{cases}\arcsin(a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2})\ (a^2+b^2\leqslant 1,\ \text{लेकिन}\ ab>0\ \text{होने पर}),\\ \pm[\pi-\arcsin(a\sqrt{1-b^2}-b\sqrt{1-a^2})]\ (a^2+b^2>1,\ \text{लेकिन}\ ab<0\ \text{होने पर})\end{cases}$$

अंतिम दोनों सूत्रों में बड़े कोष्ठक के पहले धन चिह्न तब लेते हैं, जब a धनात्मक होता है; a के ऋणात्मक होने पर बड़े कोष्ठक के पहले ऋण चिह्न रखते हैं।

§ 205. त्रिकोणमितिक फलनों की सारणी बनाने की विधि

परिधि का कोई चाप ($\overset{\frown}{MAM_1}$, चित्र 230) अपने चापकर्ण MPM_1 से सदैव अधिक लंबा होता है, अतः $\dfrac{\overset{\frown}{MAM_1}}{MPM_1}>1$ होगा। पर केंद्रस्थ कोण

(केंद्रीय कोण) MOM_1 जितना ही छोटा होगा, व्यतिमान $\frac{\overset{\frown}{MAM_1}}{MPM_1}$ इकाई से उतना ही **निकट** होगा, अर्थात् चाप को उसके चाप-कर्ण के बराबर मानने से त्रुटि भी उतनी ही कम होगी। यथा, केंद्रस्थ कोण 10° होने पर चाप MM_1 की लंबाई $0.174533\ r$ के बराबर होती है (r परिधि की त्रिज्या है) और उसके चापकर्ण की लंबाई $0.174312\ r$ के बराबर होती है, अतः

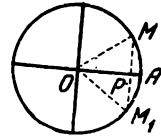
चित्र 230

$$\frac{1.174533\ r}{0.174312\ r} \approx 1.001$$

मिलता है, जिसका अर्थ है कि चाप को उसके चापकर्ण के बराबर मानने से त्रुटि $0.0002\ r$ होगी, जो केवल एक बटा दस प्रतिशत के बराबर होगी।

2° कोण होने पर सापेक्षिक त्रुटि लगभग 10 गुनी कम होगी : चाप $0.034907\ r$ के बराबर होगा और उसका चापकर्ण $0.034904\ r$ के बराबर होगा। इनका व्यतिमान $\frac{0.034907\ r}{0.034904\ r} \approx 1.0001$ है। यहां चाप को उसके चापकर्ण के बराबर मानने से त्रुटि सिर्फ एक बटा सौ प्रतिशत के करीब होगी।

दूसरी ओर से, चाप $\overset{\frown}{MAM_1}$ और उसके चापकर्ण MPM_1 का व्यतिमान रेडियनी माप में कोण MOA (कोण MOM_1 के आधे) और उसकी ज्या के व्यतिमान के बिल्कुल ठीक-ठीक बराबर होता है : $\overset{\frown}{MAM_1} : MPM_1 = 2\ \overset{\frown}{MA} : 2\ MP = \overset{\frown}{MA} : MP = \frac{\overset{\frown}{MA}}{R} : \frac{MP}{R}$; लेकिन $\frac{\overset{\frown}{MA}}{R}$ कोण MOA की रेडियनी माप है (§ 182) और $\frac{MP}{R}$ इसी कोण की ज्या है।

इसका मतलब यह हुआ कि $\sin \alpha$ को कोण α के (रेडियन माप में) मान के बराबर मानने पर त्रुटि बहुत कम होगी, बशर्ते कि कोण α बहुत छोटा है। पर्याप्त छोटा कोण लेकर इसकी ज्या का मान आवश्यक शुद्धता के साथ ज्ञात किया जा सकता है। इसके बाद त्रिकोणमितिक फलनों की पूरी सारणी तैयार कर ली जा सकती है।

मान लें कि हमने $\sin 30'$ का मान ज्ञात किया है। तब सूत्र $\cos 30' = \sqrt{1 - \sin^2 30'}$ की सहायता से इस कोण की कोज्या ज्ञात कर ले सकते हैं। इसके बाद पृ. 401 के सूत्रों से $\tan 30'$ $\cot 30'$ आदि भी ज्ञात हो सकते हैं। अब सूत्र $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ और $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2\alpha$ की मदद से $\sin (2 \times 30') = \sin 1°$ और $\cos 1°$ का मान कलित कर सकते हैं। फिर कोणों के योग वाले सूत्रों (§ 196) की सहायता से $\sin (1° + 30')$ और $\cos (1° + 30')$ के मान ज्ञात करते हैं। $1°30'$ और $30'$ कोणों की ज्या और कोज्या ज्ञात रहने पर $\sin 2°$, $\cos 2°$ भी ज्ञात हो जायेंगे, इत्यादि।

इस तरह से त्रिकोणमितिक फलनों की सारणी बनायी जा सकती है (लेकिन इस विधि का उपयोग करने से पहले पर्याप्त शुद्धता से संख्या π का मान ज्ञात होना चाहिए, अन्यथा कोण की रेडियनी माप नहीं मिलेगी)। कहने की आवश्यकता नहीं कि कलन की प्रक्रिया बहुत जटिल होगी। 18वीं शती तक सारणी बनाने वाले लोग (§ 181) इसी जटिल विधि को व्यवहार में लाते थे। वर्तमान समय में अधिक द्रुत विधियां हैं; ये उच्च गणित पर आधारित हैं।

§ 206. त्रिकोणमितिक समीकरण

त्रिकोणमितिक फलन के प्रतीक के अधीन स्थित अज्ञात राशि से युक्त समीकरण को **त्रिकोणमितिक समीकरण*** कहते हैं।

उदाहरण 1. $\sin y = \frac{1}{2}$ एक त्रिकोणमितिक फलन है। इसके मूल हैं : $y = 30°$, $y = 180° - 30° = 150°$, $y = 2 \cdot 180° + 30° = 390°$, $y = 3 \cdot 180° - 30° = 510°$ आदि के साथ-साथ $y = -180° - 30° = -210°$, $y = -2 \cdot 180° + 30° = -330°$ आदि भी।

हल को व्यापक रूप में (अर्थात् सभी मूलों को एक व्यंजन द्वारा) निम्न

---

* कुछ गणितज्ञ मानते हैं कि समीकरण में अज्ञात राशि को *सिर्फ* त्रिकोणमितिक फलन के प्रतीक के अधीन ही होना चाहिए; केवल तभी समीकरण को त्रिकोणमितिक समीकरण कह सकते हैं। यह एक संकीर्ण दृष्टिकोण है, इसका अनुसरण करने पर उदाहरण 3 में प्राप्त समीकरण को हम त्रिकोणमितिक नहीं कह सकेंगे। नाम "त्रिकोणमितिक फलन" से चाहे जो भी अर्थ लगाया जाये, ऐसे समीकरणों पर विचार करना भी कई तरह से लाभदायक होगा, जिनमें अज्ञात राशि सिर्फ त्रिकोणमितिक फलन के प्रतीक के अधीन ही नहीं है, अन्य स्थानों पर (संबन्धों में) भी है।

प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं (तुलना करें § 203 के सूत्र (1) से) :

$$y=k\cdot 180^\circ+(-1)^k\cdot 30^\circ,$$

जहां k स्वच्छंद पूर्ण संख्या (धन, ऋण या शून्य) है।

एक हल, जैसे $y=30^\circ$, पर विचार करते हैं। इसे $y=1800'$ भी लिख सकते हैं, या $y=108000''$ लिख सकते हैं; $y=\frac{\pi}{6}\approx 0.5236$ rad भी लिख सकते हैं। इस प्रकार, समीकरण $\sin y=\frac{1}{2}$ में अज्ञात राशि y कोण की मात्रा है, उसकी सांख्यिक माप नहीं है। सांख्यिक माप कोण नापने की इकाई के चयन पर निर्भर करती है (जो डिग्री, मिनट, रेडियन आदि हो सकती है)।

अज्ञात राशि को कोण की सांख्यिक माप भी मान सकते हैं, पर इसके लिए यह निर्दिष्ट करना आवश्यक है कि कोण किस इकाई में नापा जा रहा है (दे. उदाहरण 2)।

उदाहरण 2. चापकर्ण AK (चित्र 231) परिधि की त्रिज्या $R=OA$ के तुल्य है। केंद्रस्थ कोण AOK में कितनी डिग्री होगी।

यहां इष्ट राशि एक *संख्या* है। यदि इसे x द्वारा द्योतित किया जाये, तो कोण AOK की मात्रा x° होगी ($\angle AOK=x^\circ$)। कोण AOK की समद्विभाजक रेखा OD खींचें, जिससे $\angle AOD=\left(\frac{x}{2}\right)^\circ$ होगा। चूंकि $AK=2AD$ $=2\ OA\sin\angle AOD=2R\sin\left(\frac{x}{2}\right)^\circ$; लेकिन शर्त्त के अनुसार $AK=R$, इसलिए समीकरण प्राप्त होता है :

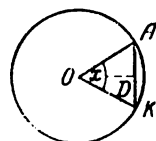
$$2R\sin\left(\frac{x}{2}\right)^\circ=R,$$

$$\text{या } \sin\left(\frac{x}{2}\right)^\circ=\frac{1}{2}.$$

इस समीकरण का एक हल है $x=60$.

स्कूलों में अक्सर ऐसे प्रश्न हल किये जाते हैं, जिनके लिए समीकरण गढ़ने की दोनों ही विधियां काम आ सकती हैं; प्रथम विधि का उपयोग अधिक होता है। पर व्यवहार में प्रायः ऐसी समस्याएं खड़ी होती हैं, जिनमें प्रथम विधि उपयुक्त नहीं होती। (दे. उदाहरण 3)।

चित्र 231

उदाहरण 3. परिधि का चाप AK (चित्र 231)

अपने चापकर्ण से $\frac{\pi}{3} \approx 1.0472$ गुना अधिक है। केंद्रस्थ कोण AOK ज्ञात करें।

यहां दूसरी विधि का उपयोग करते हैं। x द्वारा इष्ट कोण की डिग्रीपरक माप व्यक्त करते हैं (अर्थात् x कोई *संख्या* है)।

उदाहरण 2 की तरह ही $AK = 2R \sin\left(\frac{x}{2}\right)^\circ$ प्राप्त करते हैं। चाप $\overset{\frown}{AK}$ की डिग्रीपरक माप भी x ही है, अर्थात् चाप $\overset{\frown}{AK}$ की लंबाई परिधि $2\pi R$ का $\frac{x}{360}$ अंश है। अत:

$$\overset{\frown}{AK} = \frac{x}{360} \cdot 2\pi R = \frac{\pi R x}{180}.$$

शर्त्त के अनुसार $\frac{\overset{\frown}{AK}}{AK} = \frac{\pi}{3}$ है। अत: समीकरण मिलता है :

$$\frac{\pi R x}{180} : 2R \sin\left(\frac{x}{2}\right)^\circ = \frac{\pi}{3},$$

अर्थात्

$$x : \sin\left(\frac{x}{2}\right)^\circ = 120 \qquad (1)$$

इस समीकरण का (एकमात्र) हल $x = 60$ है, अर्थात् कोण AOK का मान 60° के बराबर है।

यदि अज्ञात x को हम कोण AOK की मिनट में माप मानते, तो निम्न समीकरण मिलता :

$$x : \sin\left(\frac{x}{2}\right)' = 7200 \qquad (2)$$

(इसका मूल $x = 3600$ है, अर्थात् $\angle AOK = 3600'$ है)।

इस प्रकार, कोण मापने की अन्य इकाई अपनाकर हम सारत: नया समीकरण प्राप्त करते हैं। इसका मतलब है कि विचाराधीन प्रश्न के लिए ऐसा समीकरण गढ़ना संभव ही नहीं है, जिसमें वर्ण x कोण की सांख्यिक माप नहीं, उसकी मात्रा को द्योतित करे।

टिप्पणी. यदि x द्वारा कोण AOK की रेडियनी माप द्योतित की जाये, तो निम्न समीकरण मिलेगा :

$$x : \sin \frac{x}{2} = \frac{2}{3}\pi \qquad (3)$$

(इसका मूल $x = \frac{\pi}{3}$ है) ।

इस समीकरण के बाह्य रूप को देख कर सोचा जा सकता है कि x द्वारा कोण AOK की मात्रा ज्ञात की जा रही है, उसकी सांख्यिक माप नहीं । पर वास्तव में यहां वर्ण x कोण AOK की रेडियनी माप है, क्योंकि समीकरण (3) समीकरण $(x : \sin \frac{x}{2})$ rad$= \frac{2}{3}\pi$ का संक्षिप्त रूप भर है । इसी तरह से हम समीकरण (1) को भी निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$$x : \sin \frac{x}{2} = 120.$$

§ 207. त्रिकोणमितिक समीकरण हल करने की युक्तियाँ

त्रिकोणमितिक समीकरण हल करने के लिए अज्ञात राशि का कोई एक त्रिकोणमितिक फलन ज्ञात करने की कोशिश करते हैं; फिर सारणियों की सहायता से अज्ञात राशि का मान (सामान्यतया सन्निकृत रूप में) प्राप्त करते हैं । हल को व्यापक रूप में § 203 के सूत्रों से व्यक्त करते हैं ।

एक ही समीकरण को कई विधियों से हल किया जा सकता है । इसमें § 198 और विशेषकर §§ 196, 197 के सूत्र काम आ सकते हैं ।

त्रिकोणमितिक समीकरण का कोई रूपांतरण करते समय इस बात का खयाल रखना चाहिए कि रूपांतरित और आरंभिक समीकरण समतुल्य रहें ।

वैसे, कभी-कभी ऐसे रूपांतरण भी लाभप्रद होते हैं जिन्हें समतुल्यता की पहले से कोई गारंटी नहीं दी जा सकती । अतिरिक्त मूल प्राप्त होने पर (जैसे, समीकरण के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर; दे. उदाहरण 5 तथा 6) सभी प्राप्त उत्तरों की जांच अवश्य ही कर लेनी चाहिए । यदि किन्हीं मूलों के लुप्त होने की सम्भावना है, तो यह निर्धारित करना चाहिए कि कौन से मूल लुप्त हो सकते हैं और सचमुच में लुप्त हुए हैं या नहीं ।

मूल-लोप का खतरा अक्सर आसानी से टाला जा सकता है । एक उदाहरण

मे इसे स्पष्ट करते हैं। मान लें कि समीकरण $\tan x = 2 \sin x$ प्रत्त है। इसे $\frac{\sin x}{\cos x} = 2 \sin x$ के रूप में लिखते हैं। यदि दोनों पक्षों में $\sin x$ से भाग दें, तो समीकरण $\frac{1}{\cos x} = 2$ प्राप्त होगा, जो प्रत्त के समतुल्य नहीं है : समीकरण $\sin x = 0$ के मूल लुप्त हो जाते हैं। इसलिए निम्न युक्ति अपनाई जा सकती है। $2 \sin x$ को बायें लाते हैं और $\sin x$ को कोष्ठक से बाहर कर देते हैं। इससे प्रत का समतुल्य समीकरण $\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 2\right) = 0$ मिलता है। यह सिर्फ दो स्थितियों में सन्तुष्ट होता है : (1) जब $\sin x = 0$ होता है, (2) जब $\frac{1}{\cos x} = 2$, अर्थात् $\cos x = \frac{1}{2}$ होता है। प्रथम स्थिति में $x = kx$ है और दूसरी स्थिति में $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ है। हमें सभी मूल प्राप्त हो जाते हैं।

टिप्पणी. किसी एक संगुणक को शून्य के बराबर करते समय यह देख लेना चाहिए कि कहीं दूसरा संगुणक *अनंत में तो नहीं परिणत हो रहा है।* हमारे उदाहरण में $\sin x = 0$ होने पर $\cos x = \pm 1$ होता है, अतः $\frac{1}{\cos x} - 2$ का मान -1 या -3 होता है। $\cos x = \frac{1}{2}$ होने पर $\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ होता है।

यदि दूसरा संगुणक अनंत में परिणत होता है, तो फल सामान्यतया गलत प्राप्त होता है। उदाहरण के लिए मान लें कि समीकरण $\sin x = 0$ दिया गया है। इसे समतुल्य रूप $\cos x \cdot \tan x = 0$ में लिख सकते हैं; पर $\cos x = 0$ नहीं मान सकते; $\cos x = 0$ होने पर समीकरण $\sin x = 0$ संतुष्ट नहीं होता, यह स्पष्ट है। गलती का स्रोत यह है कि $\cos x = 0$ होने पर $\tan x$ अनंत में परिणत हो जाता है $\left(\tan x = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}\right)$।

त्रिकोणमितिक समीकरण हल करने की सरलतम विधि (कोई जरूरी नहीं कि यह लघुतम भी हो) यह है कि समीकरण में उपस्थित सभी त्रिकोणमितिक फलनों को किसी एक राशि के एक त्रिकोणमितिक फलन द्वारा व्यक्त करते हैं, उदाहरणतया $\sin x$ या $\tan x$, या $\tan \frac{x}{2}$ द्वारा व्यक्त करते हैं (पृष्ठ 401

की सारणी और § 21 में प्रत्त sin α, cos α, tan α के सूत्रों की सहायता से)।

उदाहरण 1. $3+2\cos\alpha=4\sin^2\alpha$.

यहां $\sin^2\alpha$ को $\cos\alpha$ में व्यक्त करना सुविधाजनक होगा। सूत्र है $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$। इससे समतुल्य समीकरण $3+2\cos\alpha=4(1-\cos^2\alpha)$ या $4\cos^2\alpha+2\cos\alpha-1=0$ मिलता है, जो $\cos\alpha$ के सापेक्ष वर्ग-समीकरण है; इससे $\cos\alpha$ के दो मान मिलते हैं :

$$(\cos\alpha)_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}=0.3090,$$

$$(\cos\alpha)_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}=-0.8090,$$

जिससे $\alpha=360^\circ k\pm72^\circ00'$ और $\alpha=360^\circ k\pm144^\circ00'$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 2. $\frac{3}{\cos^2 x}=8\tan x-2$.

यहां $\cos^2 x$ को $\tan x$ में व्यक्त करना सुविधाजनक है। सूत्र $\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$ है। निम्न समतुल्य समीकरण प्राप्त होता है :

$$3\tan^2 x-8\tan x+5=0,$$

जिससे $(\tan x)_1=1$, $(\tan x)_2=\frac{5}{3}$ है। समीकरण के हल हैं : $x=180^\circ k+45^\circ$ और $x=180' k+59^\circ02'$ (प्रथम सूत्र शुद्ध है, दूसरा सन्निकृत है)।

उदाहरण 3. $\sin^2 x-5\sin x\cos x-6\cos^2 x=0$

समीकरण के दोनों पक्षों को $\cos^2 x$ से भाग देकर निम्न समीकरण प्राप्त करना सरल है :

$$\tan^2 x-5\tan x-6=0.$$

यहां $\cos x$ से भाग देने पर मूल लुप्त नहीं होते; प्रत्त समीकरण में $\cos x=0$ रखने पर $\sin x=0$ प्राप्त होता है, पर समीकरण $\cos x=0$ और $\sin x=0$ **असंगत** हैं (साथ-साथ नहीं रह सकते, एक बार में कोई एक समीकरण ही सत्य हो सकता है)।

समीकरण $\tan^2 x-5\tan x-6=0$ से $(\tan x)_1=6$ और $(\tan x)_2=-1$ प्राप्त होते हैं। मूल $x=80^\circ32'+180^\circ k$ और $x=-45^\circ+180^\circ k$ होंगे।

उदाहरण 4. $2\sin^2 x + 14\sin x\cos x + 50\cos^2 x = 26.$

यहां $\cos x$ को $\sin x$ में (या उलटा) व्यक्त करना युक्तिसंगत नहीं है, क्योंकि इससे दूसरे पद में अव्यतिमान का समावेश हो जायेगा। इसे दूर तो किया जा सकता है (इस पद को अकेले कर लेने के बाद समीकरण का वर्ग करके), लेकिन इससे अतिरिक्त मूलों के उत्पन्न होने का खतरा है, इसलिए हल जटिल हो जाता है।

इस प्रश्न में $\sin x$ और $\cos x$ दोनों को $\tan x$ में व्यक्त करना ज्यादा अच्छा रहेगा। सूत्र $\sin x = \frac{\tan x}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$ और $\cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}$ हैं। इन सूत्रों में चिह्न या तो दोनों ऊपरी लेते हैं या दोनों निचले लेते हैं (क्योंकि $\sin x : \cos x$ को $\tan x$ के बराबर होना चाहिए, $-\tan x$ के बराबर नहीं)। निम्न समतुल्य समीकरण प्राप्त होता है :

$$\frac{2\tan^2 x + 14\tan x + 50}{1+\tan^2 x} = 26.$$

अंशनाम से छुटकारा पाते हैं। अतिरिक्त मूल नहीं उत्पन्न होंगे, क्योंकि $1+\tan^2 x$ शून्य के बराबर नहीं हो सकता। समरूप पदों को साथ जोड़ने-घटाने के बाद निम्न समतुल्य समीकरण* प्राप्त होता है :

$$24\tan^2 x - 14\tan x - 24 = 0.$$

इससे $(\tan x)_1 = \frac{4}{3}$, $(\tan x)_2 = -\frac{3}{4}$ प्राप्त होता है।

हल हैं : $x = 53°07' + 180°k$, $x = -36°52' + 180°k$.

उदाहरण 5. $\sin x + 7\cos x = 5.$ (1)

$\sin x$ को $\cos x$ में व्यक्त करते हैं, जिससे :

$$\pm\sqrt{1-\cos^2 x} + 7\cos x = 5 \quad (2)$$

या $$\pm\sqrt{1-\cos^2 x} = 5 - 7\cos x.$$

यदि $\cos x$ के मान ज्ञात होते, तो हमें पता होता कि वर्गमूल-चिह्न के पहले कौन सा चिह्न (धन या ऋण) रखना चाहिए। पर समीकरण (1) के

* यह समीकरण निम्न कृत्रिम विधि से और जल्दी प्राप्त हो सकता है : दायें पक्ष को 26 $(\sin^2 x+\cos^2 x)$ के रूप में लिखते हैं (क्योंकि $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ है); फिर सभी पदों को बायें लाकर $\cos^2 x$ से भाग देते हैं।

मूल अज्ञात होने के कारण दोनों चिह्न रखने पड़ते हैं। इसलिए समीकरण (2) समीकरण (1) के समतुल्य नहीं है। हमने अतिरिक्त मूल समाविष्ट कर दिये हैं। समीकरण (2) का वर्ग करके समरूप पद साथ कर लेने पर समीकरण

$$50 \cos^2 x - 70 \cos x + 24 = 0, \qquad (3)$$

प्राप्त होता है, जो (1) के समतुल्य नहीं, (2) के समतुल्य है।

इससे $(\cos x)_1 = 0.8$ और $(\cos x)_2 = 0.6$ प्राप्त होते हैं।

अतः $x = \pm 36°52' + 360° k$ और $x = \pm 53°07' + 360° k$ प्राप्त होते हैं।

प्राप्त मूलों की जांच करते हैं। (1) में $\cos x = 0.8$ रखने पर $\sin x = 5 - 7 \cos x = 5 - 5.6 = -0.6$। इसका अर्थ है कि मूल $x = +36°52' + 360° k$ फालतू हैं, क्योंकि इन कोणों की ज्याएं $+0.6$ के बराबर हैं (ये कोण प्रथम चतुर्थांश में हैं)। मूल $-36°52' + 360° k$ समीकरण (1) के ही हैं, क्योंकि इन कोणों की ज्याएं -0.6 के बराबर हैं।

अब समीकरण (1) में मान $\cos x = 0.6$ रखते हैं, जिससे $\sin x = 0.8$ मिलता है। इसका निष्कर्ष यह है कि मूल $x = +53°07' + 360° k$ समीकरण (1) के ही हैं (इन कोणों की ज्याएं सचमुच 0.8 के बराबर हैं), लेकिन मूल $x = -53°07' + 360° k$ फालतू हैं (इन कोणों की ज्याएं -0.8 के बराबर हैं)।

समीकरण (1) के हल निम्न होंगे* :

$x = -36°52' + 360° k$ और $x = 53°07' + 360° k$.

उदाहरण 6. उदाहरण 5 का समीकरण अधिक व्यापक समीकरण $a \sin x + b \cos x = c$ का एक विशिष्ट रूप है। इस तरह का व्यापक रूप रखने वाले सभी समीकरण उपरोक्त विधि से हल हो सकते हैं। पिछले उदाहरण

$$\sin x + 7 \cos x = 5 \qquad (1)$$

द्वारा ही दो और विधियां यहां नीचे दी जा रही हैं।

---

* समीकरण (1) को समतुल्य रूप $\sin x = 5 - 7 \cos x$ में लिखकर दोनों पक्षों का वर्ग करते हैं, जिससे $\sin^2 x = (5 - 7 \cos x)^2$ मिलता है; पर यह समीकरण (1) के समतुल्य नहीं है, क्योंकि $-\sin x = 5 - 7 \cos x$ से भी यही मिलता है। $\sin^2 x$ की जगह $1 - \cos^2 x$ रखकर पुनः (3) प्राप्त करते हैं; बाद में ऊपर वर्णित विधि की तरह ही हल निकालना जारी रखते हैं।

प्रथम विधि. वर्ग करते हैं (इससे फालतू मूलों का समावेश हो जाता है)* तो प्राप्त होता है :

$$\sin^2 x + 14 \sin x \cos x + 49 \cos^2 x = 25.$$

उदाहरण 4 में बतायी गयी विधियों में से किसी के द्वारा समीकरण $24 \tan^2 x - 14 \tan x - 24 = 0$ प्राप्त करते हैं। उदाहरण 4 में यही समीकरण मिला था, इसलिए पुनः $(\tan x)_1 = \frac{4}{3}$ और $(\tan x)_2 = -\frac{3}{4}$ मिलेगा। लेकिन यहां मूल $x = 53°07' + 180°\, k$ और $x = -36°52' + 180°\, k$ में से जो फालतू हैं, उनका बहिष्कार करना होगा। $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$ रखने पर या तो $\sin x = 0.8, \cos x = 0.6$ मिलता है या $\sin x = -0.8$, $\cos x = -0.6$। (1) में ये मान रखकर देख ले सकते हैं कि सिर्फ पहला जोड़ा मान ही काम आता है, अर्थात् कोण x प्रथम चतुर्थांश में है। इसका मतलब है कि मूलों की संचि $x = 53°07' + 180°\, k$ में से सिर्फ वही काम आते हैं, जो k का मान सम संख्याओं के बराबर लेने से प्राप्त होते हैं। $k = 2k'$ मान कर $x = 53°07' + 360°\, k'$ प्राप्त करते हैं। इसी तरह से पता चलता है कि मूल-संचि $x = -36°52' + 180°\, k$ में से सिर्फ वे कामलायक हैं, जो k सम संख्या लेने से प्राप्त होते हैं, अर्थात्

$$x = -36°52' + 360°\, k' \text{ है।}$$

दूसरी विधि. $\sin x$ और $\cos x$ को $\tan \frac{x}{2}$ में व्यक्त करें (दे. § 200 में सूत्र)। सरल करने के बाद समतुल्य समीकरण $12 \tan^2 \frac{x}{2} - 2 \tan \frac{x}{2} - 2 = 0$ मिलता है, जिससे

$$\left(\tan \frac{x}{2}\right)_1 = \frac{1}{2}; \quad \left(\tan \frac{x}{2}\right)_2 = -\frac{1}{3}.$$

$\frac{x}{2} \approx 26°34' + 180°\, k$ और $\frac{x}{2} \approx -18°26' + 180°\, k$ है। मूल होंगे : $x \approx = 53°08' + 360°\, k$ और $x \approx -36°52' + 360°\, k$। इस विधि से लाभ यह है कि इससे अतिरिक्त मूल नहीं समाविष्ट होते हैं।

* दे. पिछली पाद-टिप्पणी।

टिप्पणी. दूसरी विधि अधिक व्यापक है। जब त्रिकोणमितिक समीकरण को ऐसा रूप दिया जाता है, जिसमें सिर्फ एक कोण के त्रिकोणमितिक फलन होते हैं, तो इन सभी फलनों को § 200 के सूत्रों द्वारा आधे कोण की स्पज में व्यक्त कर सकते हैं। कलन इस विधि में अधिक जटिल और श्रमसाध्य हो जाते हैं, पर कृत्रिम विधियों के उपयोग से छुटाकरा मिल जाता है और अधिकांशतः फालतू मूल भी नहीं उत्पन्न होते हैं।

VI. फलन, ग्राफ

§ 208. स्थिर और परिवर्ती राशियां

प्रकृति के नियमों के अध्ययन में गणित के प्रयोग और तकनीक में उनके उपयोग के कारण गणित में परिवर्ती राशियों को तथा उनके वैपरीत्य के रूप में स्थिर राशियों को अपनाने की आवश्यकता पड़ी। **परिवर्ती राशि** ऐसी राशि को कहते हैं, *जो प्रत्त प्रश्न की परिस्थितियों में विभिन्न मान ग्रहण कर सकती है।* **स्थिर राशि** *प्रत्त प्रश्न की परिस्थितियों में अपना मान स्थिर रखती है।* एक ही राशि एक प्रश्न में स्थिर बनी रह सकती है, तो दूसरे प्रश्न में परिवर्ती राशि हो जा सकती है।

उदाहरण. पानी उबलने का तापक्रम T अधिकांश भौतिकीय प्रश्नों में एक स्थिर राशि ($T=100^{\circ}C$) होता है, पर जिन प्रश्नों में वातावरण के दाब में होने वाले परिवर्तनों को ध्यान में रखना पड़ता है, उनमें T एक परिवर्ती राशि होती है।

स्थिर और परिवर्ती राशियों में भेद करने की आवश्यकता उच्च गणित में विशेष रूप से होती है; सरल गणित में मुख्य भूमिका राशियों के ज्ञात और अज्ञात राशियों में विभाजन की होती है। उच्च गणित में भी यह विभाजन बना रहता है, पर इसकी भूमिका मुख्य नहीं होती।

परिवर्ती राशियों को ज्यादातर लातीनी वर्णमाला के अंतिम वर्णों ..., x, y, z से द्योतित करते हैं और स्थिर राशियों को आरंभिक वर्णों a, b, c, ... से द्योतित करते हैं।

§ 209. दो परिवर्ती राशियों के बीच फलनक निर्भरता

जब दो परिवर्ती राशियों x, y में से किसी एक के सभी संभव मानों में से प्रत्येक मान के अनुरूप दूसरी राशि कोई एक या कई नियत मान रखती है, तो कहते हैं कि राशियाँ x, y परस्पर **फलनक निर्भरता** (फलनात्मक निर्भरता) द्वारा संबन्धित हैं।

उदाहरण 1. पानी उबलने का तापक्रम T और वातावरण का दाब p फलनक निर्भरता द्वारा परस्पर संबंधित होते हैं, क्योंकि T के हर मान के लिए p का एक नियत मान होता है, और विलोम। यथा, $T = 100°C$ होने पर p लगभग 760 mm ऊँचे पारद-स्तंभ के दाब के बराबर (760 mm Hg) होता है, $T = 70°C$ होने पर $p = 234$ mm Hg होता है, इत्यादि। इसके विपरीत, वातावरण का दाब p और हवा की सापेक्षिक आर्द्रता x (दोनों राशियों पर परिवर्ती राशियों की तरह विचार किया जा रहा है), फलनक रूप से एक-दूसरे पर निर्भर नहीं करते : यदि ज्ञात है कि $x = 90\%$ है, तो इससे p के मान के बारे में कुछ भी निश्चित रूप से नहीं कहा जा सकता।

उदाहरण 2. समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल S उसकी परिमिति p के साथ फलनक निर्भरता द्वारा संबंधित है। सूत्र $S = (\sqrt{3} : 36)p^2$ इस निर्भरता को व्यक्त करता है।

यदि इस बात पर जोर देने की आवश्यकता होती है कि विचाराधीन प्रश्न में परिवर्ती राशि y के मान परिवर्ती राशि x के प्रत्त मानों से ज्ञात करते हैं, तो x को **स्वतंत्र परिवर्ती राशि** या **अनुतर्क** (=निष्कर्ष का *आधार*) कहते हैं और y को **निर्भर परिवर्ती राशि या फलन** कहते हैं।

उदाहरण 3. यदि हम समबाहु त्रिभुज की परिमिति p के मान के आधार पर उसके क्षेत्रफल S के मान के बारे में कोई निष्कर्ष निकालना चाहते हैं (दे. उदाहरण 2), तो p अनुतर्क (स्वतंत्र परिवर्ती) होगा और S फलन (निर्भर परिवर्ती) होगा।

स्वतंत्र परिवर्ती राशि को ज्यादातर x से द्योतित करते हैं।

यदि अनुतर्क x का हर अलग मान फलन y के सिर्फ एक-एक मान के अनुरूप होता है, तो फलन को **एकार्थक फलन** कहते हैं। यदि अनुतर्क x का हर मान फलन y के दो या अधिक मानों के अनुरूप होता है, तो फलन को **अनेकार्थक फलन** द्वयर्थी, त्रयर्थी, आदि) कहते हैं।

उदाहरण 4. पिंड ऊपर फेंका गया है; s जमीन से उसकी ऊंचाई है, t – फेंकने के क्षण से बीता हुआ समय है। राशि s राशि t का एकार्थी फलन है, क्योंकि समय के हर क्षण पर फेंके गये पिंड की जमीन से ऊँचाई सिर्फ कोई एक नियत मान ही ग्रहण करती है। राशि t राशि s का द्वयर्थी फलन है, क्योंकि पिंड किसी भी प्रत्त ऊँचाई पर दो बार पहुँचता है—एक बार ऊपर जाते वक्त और दूसरी बार नीचे गिरते वक्त।

परिवर्ती राशियों s, t को संबंधित करने वाला सूत्र $s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$ (आरंभिक वेग v_0 और पृथ्वी के गुरुत्व-बल का त्वरण g दी हुई स्थिति में स्थिर राशियां हैं) यह दिखाता है कि t के प्रत्त मान के लिए s का सिर्फ एक मान होगा, लेकिन s के प्रत्त मान के लिए t के दो मान होंगे, जो वर्ग-समीकरण

$$\frac{1}{2}gt^2-v_0t+s=0$$

द्वारा निर्धारित होते हैं।

§ 210. प्रतीप फलन

फलन को लंछित करने (उसकी मुख्य प्रकृति की पहचान करने) में इस बात का कोई महत्त्व नहीं होता कि फलन और अनुतर्क किन वर्णों से द्योतित किये जा रहे हैं। यथा, यदि $y=x^2$ और $u=v^2$ प्रदत्त हैं, तो x का y वैसा ही फलन है जैसा v का u। दूसरे शब्दों में, x^2 तथा v^2 एक ही फलन हैं, यद्यपि अनुतर्क विभिन्न वर्णों से द्योतित किये गये हैं।

पर यदि प्रत्त फलनक निर्भरता में अनुतर्क और फलन की भूमिकाओं की अदला-बदली की जाती है, तो एक नया फलन प्राप्त होता है, जिसे आरंभिक फलन के सापेक्ष **प्रतीप फलन** कहते हैं।

उदाहरण 1. मान लें कि तर्क v का फलन u प्रदत्त है :

$$u=v^2.$$

अनुतर्क और फलन की भूमिकाओं की अदला-बदली का अर्थ है v द्वारा u नहीं, बल्कि u द्वारा v ज्ञात करने के लिए सूत्र $v=\sqrt{u}$ स्थापित करना, जिसमें अनुतर्क u का फलन v हो गया है। यदि दोनों स्थितियों में अनुतर्क को किसी एक वर्ण x से द्योतित किया जाये, तो आरंभिक फलन x^2 होगा और इसका प्रतीप फलन $\sqrt{x}$ होगा।

उदाहरण 2. $\sin x$ का प्रतीप फलन $\text{Arcsin}\, x$ है। सचमुच में, यदि $y=\sin x$, तो $x=\text{Arcsin}\, y$ (§ 203)।

प्रतीप फलनों का ग्राफ देखें § 215 में, संदर्भ 8।

§ 211. फलन का सूत्र तथा सारणी द्वारा चित्रण

अनेक फलनक निर्भरताएं सरल सूत्रों द्वारा (शुद्ध-शुद्ध या सन्निकृत रूप मे) व्यक्त की जा सकती हैं। उदाहरणतया, वृत्त के क्षेत्रफल S और त्रिज्या r की

पारस्परिक निर्भरता सूत्र $S=\pi r^2$ से व्यक्त होती है; प्रक्षिप्त (फेंके गये) पिंड की ऊँचाई s और फेंकने के बाद बीते समय t की पारस्परिक निर्भरता (व्यति-निर्भरता) सूत्र $s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$ द्वारा व्यक्त होती है। अंतिम सूत्र सारतः एक सन्निकृत सूत्र है, क्योंकि इसमें न तो हवा के प्रतिरोध को ध्यान में रखा गया है, न ऊँचाई में वृद्धि से गुरुत्वाकर्षण-शक्ति में ह्रास को ही।

ऐसा भी होता है जब फलनक निर्भरता को सूत्र द्वारा व्यक्त करने में सफलता नहीं मिलती, या मिलती भी है तो वह कलन के लिए सुविधाजनक नहीं होता। इन स्थितियों में अन्य विधियों का प्रयोग होता है—ज्यादातर *सारणिक* और *ग्राफिक* (दे. § 214) विधियों का।

उदाहरण. दाब p और पानी उबलने के तापक्रम T की फलनक निर्भरता (दे. § 209 उदाहरण 1) किसी एक सूत्र द्वारा व्यक्त नहीं हो पाती है, जो आवश्यक शुद्धता-कोटि के साथ सभी व्यावहारिकतः महत्त्वपूर्ण स्थितियों को अपने में समेट सके। इस निर्भरता को सारणी द्वारा चित्रित किया जाता है, जिसका एक अंश नीचे दिया गया है।

p, mm	300	350	400	450	500	550	600	650	700
T, °C	75.8	79.6	83.0	85.8	88.5	91.2	93.5	95.7	97.6

कलन सरल करने के लिए एक परिवर्ती राशि के मान अधिकांशतः समान अंतरालों पर लिये जाते हैं; इस राशि को **सारणी का अनुतर्क** कहते हैं।

अनुतर्क के सभी संभव मान किसी भी सारणी में नहीं अंट सकते, पर व्यवहार सुलभ सारणी में तर्क के इतने मान अवश्य होने चाहिए कि अंतर्वेशन की विधि (§ 65) द्वारा फलन के अन्य मान भी आवश्यक शुद्धता के साथ प्राप्त हो सकें।

§ 212. फलन का द्योतन

मान लें कि दो परिवर्ती राशियों x, y के बारे में हमें सिर्फ इतना पता है कि राशि y राशि x का कोई फलन है। किस रूप में यह फलन प्रदत्त है—सूत्र के रूप में, सारणी या किसी अन्य रूप में – यह उपेक्ष्य है। यह भी संभव है कि फलन किसी भी रूप में ज्ञात नहीं है; सिर्फ यह तथ्य स्थापित किया गया है कि

y और x के बीच कोई फलनक निर्भरता है (§ 209)। इस तथ्य को आलेख $y=f(x)$ से व्यक्त करते हैं।

जाहिर है कि वर्ण f (लातीनी functio = कार्यान्वयन, फलन, का प्रथम वर्ण) किसी राशि या मान को द्योतित नहीं करता; यह वैसा ही प्रतीक है, जैसे lg, tan आदि आलेख $\lg x$, $\tan x$ आदि में हैं। आलेख $y=\lg x$, $y=\tan x$ आदि पूर्णतया मूर्त तथा नियत फलनक निर्भरताओं को व्यक्त करते हैं, आलेख $y=f(x)$ से अमूर्त, अनिश्चित फलनक निर्भरता व्यक्त होती है, जिसका वास्तविक रूप कुछ भी हो सकता है।

यदि इस बात पर जोर देने की आवश्यकता हो कि t पर z की फलनक निर्भरता x पर y की फलनक निर्भरता से भिन्न है, तो उन्हें अलग-अलग वर्णों से द्योतित करते हैं; यथा, $z=F(t)$, $y=f(x)$।

यह दिखाने के लिए कि t पर z की फलनक निर्भरता वैसी ही है, जैसी x पर y की, दोनों निर्भरताओं को एक ही वर्ण से द्योतित करते हैं, अर्थात् $z=f(t)$, $y=f(x)$ लिखते हैं।

यदि y का x के जरिए व्यंजन प्रदत्त है या स्थापित किया गया है, तो इस व्यंजन को $f(x)$ के साथ समता-चिह्न द्वारा जोड़ते हैं।

उदाहरण 1. यदि ज्ञात है कि $y=x^2$ है, तो $f(x)=x^2$ लिखते हैं।

(2) यदि ज्ञात है कि $y=\sin x$ है, तो $f(x)=\sin x$ लिख सकते हैं।

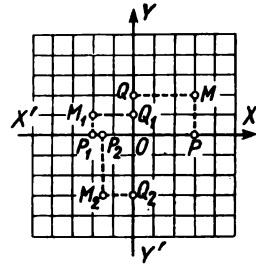
(3) यदि $f(x)=\lg x$ है, तो प्रतीक $f(y)$ का अर्थ $\lg y$ है।

(4) यदि $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ है और $F(x)=3x$ है, तो $F(x)\,f(x)=3x\sqrt{1+x^2}$, $\dfrac{F(y)}{f(x)}=\dfrac{3y}{\sqrt{1+z^2}}$ आदि लिख सकते हैं।

§ 213. दिशांक

दो परस्पर लंब सरल रेखाएं $X'X$ और $Y'Y$ (चित्र 232 में) मिलकर **ऋजकोणिक दिशांक-तंत्र** बनाती हैं। सरल रेखाएं $X'X$ तथा $Y'Y$ दिशाक्ष (दिशांक-अक्ष) कहलाती हैं। इनमें से एक— $X'X$, जिसे अक्सर क्षैतिज स्थिति में चित्रित करते हैं— **क्रमकाक्ष** (क्रमकों का अक्ष, क्रमकी अक्ष) कहलाती है और दूसरी – $Y'Y$— **क्रमिताक्ष** (क्रमितों का अक्ष) कहलाती है। प्रत्येक अक्ष पर मनचाहा पैमाना अंकित किया जाता है [दोनों अक्षों के कटान-बिंदु O-

दिशांक मूल—को शून्य का बिंदु मानते हैं, इसके एक ओर धन संख्याएं अंकित करते हैं और दूसरी ओर ऋण संख्याएं] ।

अक्षों के समतल पर मनचाहा बिंदु M लेते हैं और दिशांकों पर उसके प्रक्षेप P व Q ज्ञात करते हैं। क्रमकाक्ष पर कर्त OP और साथ ही चयित पैमाने पर उसकी माप-संख्या x, दोनों को बिंदु M का **क्रमक** कहते हैं। क्रमिताक्ष पर कर्त OQ तथा इसकी माप-संख्या y, दोनों को बिंदु M का **क्रमित** कहते हैं।

चित्र 232

राशियां $x = OP$ तथा $y = OQ$ बिंदु M के **ऋजकोणिक दिशांक** (या सिर्फ दिशांक) कहलाती हैं। इनके मान अक्षों पर धनात्मक कर्तों की पहले से चुनी गयी दिशाओं के अनुसार धनात्मक या ऋणात्मक हो सकते हैं (अक्सर धनात्मक कर्त क्रमकी अक्ष पर दायीं ओर नापे जाते हैं और क्रमिताक्ष पर ऊपर की ओर)।

चित्र 232 में (जहां दोनों अक्षों पर समान पैमाने लिए गए हैं), बिंदु M के क्रमक $x = 3$ और क्रमित $y = 2$ हैं; बिंदु M_1 के क्रमक $x_1 = -2$ और क्रमित $y_1 = 1$ हैं। संक्षेप में इसे निम्न रूप में लिखते हैं: $M(3, 2)$; $M_1(-2, 1)$। ठीक इसी तरह से $M_2(-1.5, -3)$ लिखते हैं।

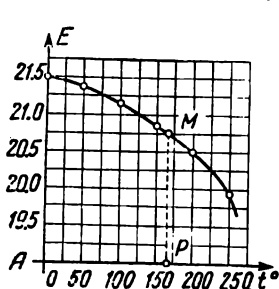
समतल के हर बिंदु के लिए संख्याओं की एक तदनुरूप जोड़ी x, y होती है। वास्तविक संख्याओं की हर जोड़ी x, y के लिए समतल का एक तदनुरूप बिंदु M होता है। ऋजकोणिक दिशांक-तंत्र को अक्सर फ्रांसीसी दार्शनिक एवं गणितज्ञ डेकार्ट (Descartes) के नाम पर कार्टेजी दिशांक-तंत्र भी कहते हैं (लातीनी में डेकार्ट Cartesius नाम से विख्यात थे)। डेकार्ट ने अनेक ज्यामितिक समस्याओं के अध्ययन में दिशांकों का विस्तृत प्रयोग किया था, फिर भी 'कार्टेजी दिशांक-तंत्र' एक गलत नाम है।*

---

* डेकार्ट ने दो अक्षों का नहीं, सिर्फ एक अक्ष का उपयोग किया था, जिस पर वह क्रमक अंकित करते थे। क्रमित को वह समतल के बिंदुओं की क्रमकाक्ष से किसी भी पूर्वनियत दिशा में दूरी के रूप में निर्धारित करते थे—कोई जरूरी नहीं कि लंब दिशा में ही। डेकार्ट के लिए क्रमक और क्रमित दोनों ही सदैव धनात्मक होते थे, चाहे उनकी दिशाएं कुछ भी होती हों। अनेक पाठ्यपुस्तकों में अक्षों पर +, — के चिह्न-भेद का श्रेय डेकार्ट को दिया जाता है, जबकि यह उनके शिष्यों ने किया था।

§ 214. फलनों का ग्राफिक निरूपण

प्रत्त फलनक निर्भरता को ग्राफ के रूप में चित्रित करने के लिए क्रमकाक्ष पर किसी एक परिवर्ती राशि (अक्सर तर्क x) के कई मान $x_1, x_2, x_3, \ldots$ अंकित करते हैं और दूसरी परिवर्ती राशि y (फलन) के तदनुरूप मानों को निरूपित करने वाले क्रमित $y_1, y_2, y_3, \ldots$ स्थापित करते हैं। इनके सहारे बिंदु $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)\ldots$ आदि अंकित करते हैं। इन बिंदुओं को मिलाते हुए खींचा गया वक्र प्रत्त फलनक निर्भरता को प्रतिबिंबित करता है। ऐसे वक्र को ही **ग्राफ** कहते हैं (यह वक्र एक सरल रेखा के रूप में भी मिल सकता है)।

चित्र 233

निर्भरता के सारणिक चित्रण की तुलना में ग्राफिक चित्रण से लाभ यह है कि यह निर्भरता को अधिक दृगम बना देता है; खामी एक ही है कि इसकी शुद्धता-कोटि बहुत कम होती है। उपयुक्त पैमाने के चयन का बहुत बड़ा व्यावहारिक महत्त्व है।

चित्र 233 में पिट्टू लोहे की प्रत्यास्थता के मापांक E और उसके तापक्रम $t°$ की फलनक निर्भरता का ग्राफ दिखाया गया है। क्रमक (t) और क्रमित (E) के पैमाने तदनुरूप अक्षों पर संख्याओं द्वारा प्रदर्शित हैं (यहां दिशांक-मूल और क्रमकाक्ष नहीं दिखाये गये हैं, ताकि चित्र का आकार बहुत बड़ा न हो जाये)।

चित्र 233 का ग्राफ निम्न सारणी के आधार पर बनाया गया है :

$t°$, C	0	50	100	150	200	250
E, t/cm²	21.5	21.4	21.2	20.9	20.5	19.9

ग्राफ के सहारे (सन्निकट रूप से) तर्क के उन मानों के लिए भी फलन के मान ज्ञात हो सकते हैं, जो सारणी में नहीं दिये गये हैं। उदाहरण के लिए, मान लें कि $t = 170°$ के लिए E का मान ज्ञात करना है। क्रमकाक्ष (या इसके समांतर रेखा At) पर क्रमक $t = AP = 170$ नापते हैं और लंब PM खींचते हैं,

जिससे क्रमित $E=PM=20.75$ ज्ञात होता है। यदि मिलिमीटर की दूरियों पर अंकित सरल रेखाओं वाले कागज पर ग्राफ बनाया जाये, तो पठन का कार्य बहुत सरल हो जाता है। इस प्रकार से फलन के मान ज्ञात करने की विधि को **ग्राफिक अंतर्वेशन** कहते हैं।

व्यवहार में ग्राफ सदैव 'बिंदुओं के सहारे' खींचा जाता है, अर्थात् हाथ से ऐसी वक्र रेखा खींचते हैं, जो अलग-अलग बिंदुओं M_1, M_2,...... को मिलाती जाती है; वक्र में कहीं भी नुकीलापन नहीं आना चाहिए। इसलिए सिद्धांतत: इस बात की संभावना को दूर नहीं किया जा सकता कि अंकित बिंदुओं के बीच का कोई अनंकित बिंदु वक्र से बहुत दूर होगा। फलतः ग्राफ की सैद्धांतिक परिभाषा निम्न रूप से दी जा सकती है :

ग्राफ. *बिंदुओं $M(x, y)$ का ज्यामितिक स्थान है, जिनके दिशांक प्रत्त फलनक निर्भरता द्वारा संबंधित होते हैं* (ज्यामितिक स्थान देखें § 153 में)।

§ 215. सरलतम फलन और उनके ग्राफ

1. **समानुपातिक राशियां.** यदि परिवर्ती राशियां y तथा x समानुपाती हैं (दे. § 64), तो उनकी फलनक निर्भरता समीकरण

$$y=mx \qquad (1)$$

द्वारा व्यक्त होती है, जहां m कोई स्थिर राशि (**समानुपातन-गुणांक**) है। समानुपातन का ग्राफ* एक सरल रेखा है, जो दिशांक-मूल से होकर गुजरती है और क्रमकाक्ष के साथ कोण α बनाती है जिसकी स्पज स्थिर राशि m के बराबर होती है : $\tan \alpha=m$।

इसीलिए समानुपातन-गुणांक को **कोणिक गुणांक** भी कहते हैं। चित्र 234 में $m=1$, $m=2$, $m=-\frac{3}{4}$ के लिए फलन $y=mx$ के ग्राफ दिखाये गये हैं।

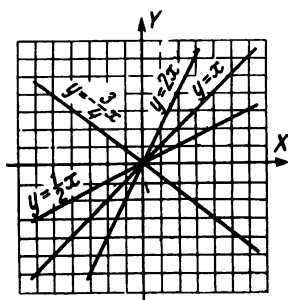
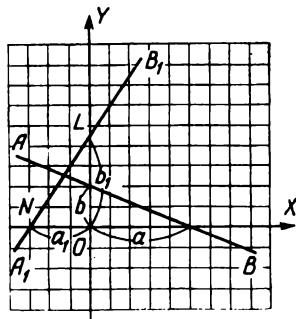
टिप्पणी. क्रमकाक्ष और ग्राफ के बीच कोणिक गुणांक निर्धारित करने के लिए क्रमकाक्ष की दिशा को धनात्मक मानते हैं; ग्राफ पर किसी भी दिशा को धनात्मक माना जा सकता है (राशि $\tan \alpha$ दिशा के चयन पर निर्भर नहीं करती)।

---

* यहाँ, और आगे, दोनों अक्षों पर समान पैमाने लिये गये हैं।

2. रैखिक फलन. यदि परिवर्ती राशियां x, y प्रथम घात वाले समीकरण

$$Ax+By=C \tag{2}$$

द्वारा संबंधित होती हैं (A और B में से कम से कम एक संख्या शून्य के बराबर नहीं है), तो फलनक निर्भरता का ग्राफ एक सरल रेखा होता है। $C=0$ होने पर यह सरल रेखा दिशांक मूल से होकर गुजरती है (संदर्भ 1 से तुलना करें), प्रतीपावस्था में—नहीं।

चित्र 234

चित्र 235

मान लें कि न $A=0$ है न $B=0$ है; तब ग्राफ दोनों ही दिशाक्षों को काटता है— क्रमकाक्ष को कर्त $a=\frac{C}{A}$ की दूरी पर और क्रमिताक्ष को कर्त $b=\frac{C}{B}$ की दूरी पर।

उदाहरण. समीकरण $2x+5y=10$ का ग्राफ सरल रेखा AB है (चित्र 235 में); $a=\frac{10}{2}=5$, $b=\frac{10}{5}=2$। समीकरण $2y-3x=9$ का ग्राफ सरल रेखा A_1B_1 है; यहां $a_1=\frac{9}{-3}$, $b_1=\frac{9}{2}=4.5$ हैं।

समीकरण (2) को y के सापेक्ष हल करने पर :

$$y=mx+b \tag{3}$$

मिलता है, जहां

$$m=-\frac{A}{B} \text{ और } b=\frac{C}{B} \text{ है।}$$

फलन $y=mx+b$ को रैखिक फलन कहते हैं, इसका ग्राफ एक सरल रेखा है।

उदाहरण. समीकरण $2y-3x=9$ को y के सापेक्ष हल करने पर इसका रूप निम्न होता है :

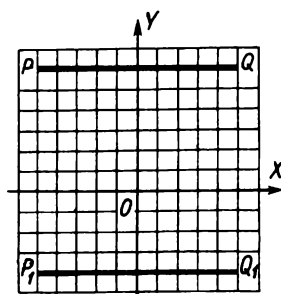
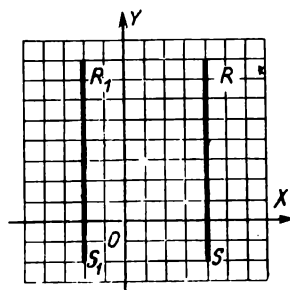
$$y=\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}\left(m=-\frac{-3}{2}=\frac{3}{2};\ b=\frac{9}{2}\right).$$

फलन $y=\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$ का ग्राफ सरल रेखा A_1B_1 है (चित्र 235)।

फलन $y=mx+b$ का ग्राफ (जो एक सरल रेखा है) क्रमकाक्ष की धनात्मक दिशा के साथ एक कोण बनाता है, जिसका स्पज m के बराबर है, और क्रमिताक्ष पर कर्त b काटता है। स्थिर राशि m को *कोणिक गुणांक* कहते हैं।

उदाहरण. फलन $y=\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}$ का ग्राफ निरूपित करने वाली सरल रेखा A_1B_1 के लिए $\tan \angle XNB_1=\frac{3}{2}$ है और $OL=\frac{9}{2}$ है।

समीकरण $y=mx$ (समानुपातन का फलन, दे. संदर्भ 1) समीकरण $y=mx+b$ का विशिष्ट रूप है (जब $b=0$ है)।

समीकरण $y=b$ भी समीकरण $y=mx+b$ का विशिष्ट रूप है (जब $m=0$ है)। इस स्थिति में राशि y एक स्थिर राशि है और x पर निर्भर नहीं करती। फिर भी इसे परिवर्ती राशि x का फलन माना जा सकता है, क्योंकि अभी भी x के हर मान के लिए y का तद्रूप मान मिल सकता है। एक ही अंतर है कि अब x के सभी मानों के लिए y का एक ही मान मिला करता है। फलन $y=b(y=0\cdot x+b)$ की विशेषता यह है कि *अब राशि x राशि y का*

चित्र 236

चित्र 237

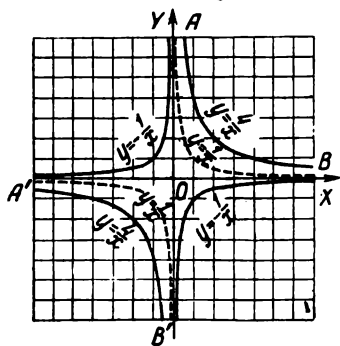
फलन नहीं हो सकती (क्योंकि y के ऐसे मानों के लिए, जो b के बराबर नहीं है, x का कोई मान नहीं मिलेगा)। फलन $y=b$ का ग्राफ एक सरल रेखा है, जो क्रमकों के अक्ष के समांतर गुजरती है।

चित्र 236 में रेखा PQ समीकरण $y=6$ का ग्राफ है, रेखा P_1Q_1 समीकरण $y=-4$ का ग्राफ है।

समीकरण $y=b$ समीकरण (2) से प्राप्त होता है, जब $A=0$ होता है $\left(b=\frac{C}{B}\text{ है}\right)$। यदि $B=0$ हो, तो समीकरण (2) को $x=a\left(a=\frac{C}{A}\right)$ के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है; इसका मतलब है कि अब x एक स्थिर राशि है। इसे परिवर्ती राशि y का फलन माना जा सकता है (पर राशि y राशि x का फलन नहीं होगी, दे. ऊपर)।

समीकरण $x=a$ का ग्राफ एक सरल रेखा है, जो क्रमिताक्ष के साथ समांतर होती है। चित्र 237 में सरल रेखा RS समीकरण $x=+4$ का ग्राफ है और सरल रेखा RS सरल रेखा $x=-2$ का ग्राफ है।

क्रमकाक्ष समीकरण $y=0$ का ग्राफ है और क्रमिताक्ष समीकरण $x=0$ का ग्राफ है।

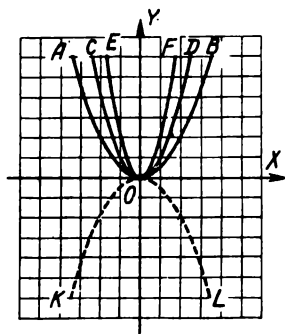
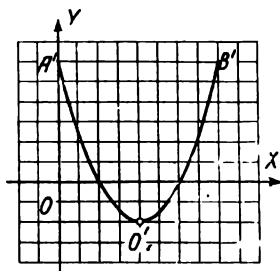
3. व्युत्क्रम समानुपातन. यदि राशियाँ x, y व्युत्क्रम समानुपाती हैं (§ 64), तो उनकी फलनक निर्भरता समीकरण $y=\frac{c}{x}$ द्वारा व्यक्त होती है, जहां c कोई स्थिर राशि है। व्युत्क्रम समानुपातन का ग्राफ एक वक्र रेखा है, जिसकी दो "शाखाएं" होती हैं; उदाहरणार्थ, फलन $y=\frac{4}{x}$ चित्र 238 में दो वक्र रेखाओं AB तथा $A'B'$ द्वारा व्यक्त किया गया है। चित्र 238 में $c=1$ और $c=-1$ के लिए भी फलन $y=\frac{c}{x}$ के ग्राफ दिखाये गये हैं (डैश-रेखा से)। इन वक्रों को **समबाहु अतिवलय** कहते हैं (ये ऋजकोणिक शीर्ष वाले कोन को अक्ष के समांतर गुजरने वाले समतलों से काटने पर काट के रूप में मिलते हैं; § 169)।

चित्र 238

4. वर्गी फलन. फलन $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c स्थिर राशियां हैं; $a\neq 0$) वर्गी फलन कहलाता है। सरलतम स्थिति $y=ax^2 (b=c=0)$ में फलन का ग्राफ वक्र रेखा है, जो दिशांक-मूल से गुजरती है।

चित्र 239 में फलन $y=ax^2$ के ग्राफ अंकित हैं :

$AOB(a=\frac{1}{2})$, $COD(a=1)$, $EOF(a=2)$ और $KOL(a=-\frac{1}{2})$ ।

फलन $y=ax^2$ का ग्राफ (वक्र) एक **परवलय** है (§ 169) । हर परवलय में सममिति अक्ष (चित्र 239 में OY) होता है, जिसे **परवलय का अक्ष** कहते हैं; बिंदु O को **परवलय का शीर्ष** कहते हैं ।

फलन $y=ax^2+bx+c$ के ग्राफ का रूप वही होता है, जो फलन $y=ax^2$ के ग्राफ का (a का मान वही होने पर), अर्थात् वह भी परवलय होता है । इस परवलय का अक्ष भी उदग्र होता है, लेकिन इसका शीर्ष दिशांक मूल पर नहीं, बल्कि बिंदु $\left(-\frac{b}{2a}, c-\frac{b^2}{4a}\right)$ पर होता है ।

चित्र 239

चित्र 240

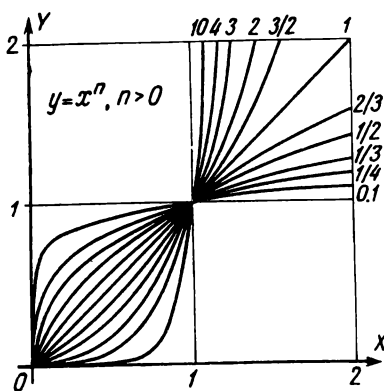
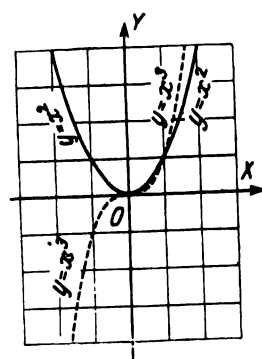
उदाहरण. फलन $y=\frac{1}{2}x^2-4x+6$ $(a=\frac{1}{2},\ b=-4,\ c=6)$ का ग्राफ (चित्र 240 में) परवलय $A'O'B'$ है, जिसका रूप वैसा ही है, जैसा परवलय $y=\frac{1}{2}x^2$ का (चित्र 239 में AOB जैसा) । इसका शीर्ष बिंदु $O'(4, -2)$ पर स्थित है, जिसके दिशांक निम्न विधि से प्राप्त होते हैं :

$$-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2\cdot\frac{1}{2}}=4;\ c-\frac{b^2}{4a}=6-\frac{16}{4\cdot\frac{1}{2}}=-2.$$

5. घात-फलन. फलन $y=ax^n$ (a, n स्थिर राशियां हैं) **घात-फलन** कहलाता है । फलन $y=ax$, $y=ax^2$, $y=\frac{a}{x}$ (दे. संदर्भ 1, 3, 4) घात-फलन के विशिष्ट रूप हैं (जब $n=1$, $n=2$, $n=-1$ होता है) ।

चूंकि किसी भी संख्या का शून्य घात शून्य के बराबर नहीं, बल्कि इकाई के बराबर होता है, इसलिए $n=0$ होने पर घात-फलन स्थिर राशि में परिणत हो जाता है* : $y=a$ ।

अन्य सभी स्थितियों को दो समूहों में बाँटते हैं : (a) जब n धनात्मक संख्या होता है और (b) जब n ऋणात्मक संख्या होता है ।

(a) चित्र 241 में $n=0.1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, 4, 10$ के लिए फलन $y=x^n$ के ग्राफ दिखाये गये हैं (ग्राफ $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ के लिए हैं) । ये सभी ग्राफ दिशांक-मूल और बिंदु (1, 1) से गुजरते हैं । $n=1$ होने पर सरल रेखा मिलती है, जो कोण XOY को समद्विभाजित करती है । $n>1$ होने पर ग्राफ पहले ($x=0$ और $x=1$ के बीच) इस रेखा के नीचे होता है और बाद में ($x>1$ होने पर) इसके ऊपर होता है; $n<1$ होने पर विपरीत चित्र मिलता है ।

चित्र 241 चित्र 242

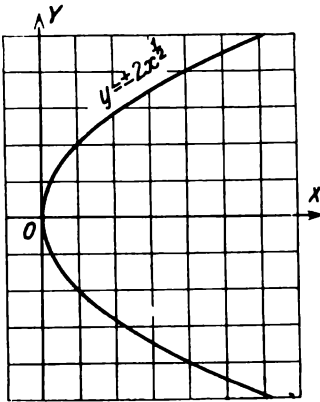
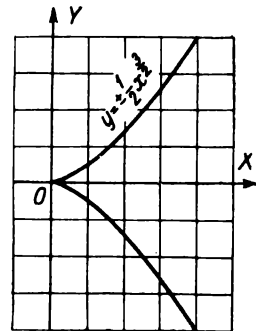
हमने $a=1$ तक ही फलन को सीमित रखा है । अन्य a के लिए ग्राफ पमाने में सरल परिवर्तनों से प्राप्त हो जाते हैं । x के ऋण मान नहीं लिए गये हैं, क्योंकि $x<0$ होने पर अंशों में व्यक्त चंद घात-सूचकों के लिए घात-फलन निरर्थक हो जाता है; उदाहरणार्थ $y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$ निरर्थक है । पूर्णांक में

* 0^0 एक अनिश्चित व्यंजन है, पर दी हुई स्थिति में, जब फलन $y=ax^0$ का मान किसी भी $x(\neq 0)$ के लिए a के बराबर है, हम तय कर ले सकते हैं कि $x=0$ होने पर भी y का मान a ही होगा ।

व्यक्त घात-सूचकों के लिए $x<0$ होने पर भी फलन सार्थक होता है, पर ग्राफ के रूप भिन्न होते हैं, इनका रूप इस बात पर निर्भर करता है कि n सम संख्या है या विषम संख्या है ।

प्रातिनिधिक उदाहरणों के रूप में चित्र 242 फलन $y=x^2$ तथा $y=x^3$ के ग्राफ दिखाता है । n कोई सम संख्या होने पर ग्राफ क्रमिताक्ष के सापेक्ष सममित होता है (§ 177); विषम संख्या होने पर ग्राफ दिशांक-मूल के सापेक्ष सममित होता है ।

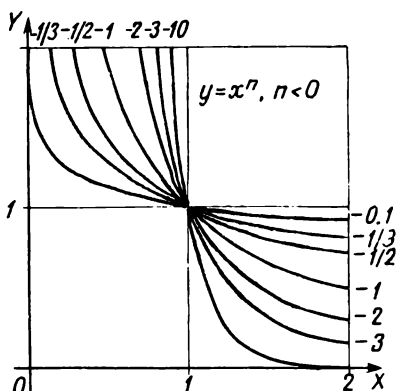
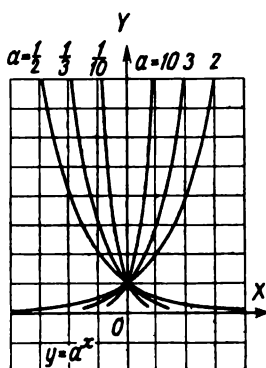
फलन $y=ax^2$ के ग्राफ की देखा-देखी धनात्मक n वाले सभी घात फलनों $y=ax^n$ के ग्राफों को **n-वीं कोटि** (या n-वें घात) **का परवलय** कहते हैं । यथा, फलन $y=ax^3$ का ग्राफ (चित्र 242) **घन परवलय** या 3-री कोटि का परवलय कहलाता है ।

टिप्पणी. यदि n कोई अंश $\frac{p}{q}$ है, जिसका अंशनाम q सम संख्या है और संख्या नाम p विषम संख्या है, तो राशि $x^n=\sqrt[q]{x^p}$ के दो चिह्न संभव हैं, इसलिए ग्राफ भी दो शाखाओं में होता है, जो क्रमकाक्ष के सापेक्ष सममित होते हैं । चित्र 243 में एक द्वयर्थी फलन $y=\pm 2x^{\frac{1}{2}}$, अर्थात् $x=\frac{1}{4}y^2$ (क्षैतिज अक्ष वाले परवलय) का ग्राफ दिखाया गया है; चित्र 244 में द्वयर्थी फलन

चित्र 243

चित्र 244

$y=\pm\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ (अर्धघन परवलय या नेइल के परवलय) का ग्राफ दिखाया गया

है। यहाँ $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{3}{2}}$ से तात्पर्य है कि घातों के धनात्मक मान लिये जा रहे हैं।

(b) चित्र 245 में $x>0, y>0$ के लिए स्थिति $n=-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -1, -2, -3, -10$ में फलन $y=x^n$ के ग्राफ दिखाये गये हैं। ये सभी ग्राफ बिंदु (1, 1) से गुजरते हैं। $n=-1$ होने पर परवलय (दे. संदर्भ 3) मिलता है। $n<-1$ होने पर घात-फलन का ग्राफ पहले ($x=0$ और $x=1$ के बीच) परवलय से ऊपर होता है और बाद में ($x>1$ होने पर) परवलय से नीचे होता है; $n>-1$ की स्थिति में विपरीत चित्र प्राप्त होता है।

x के ऋण मानों और n के भिन्नात्मक मानों के लिए ऊपर (a) में कही गयी बातें दुहरायी जा सकती हैं।

चित्र 245 चित्र 246

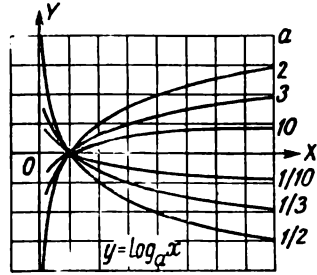
चित्र 245 के सभी ग्राफ क्रमकाक्ष और क्रमिताक्ष के असीम निकट होते जाते हैं पर उन तक (अक्षों तक) पहुँचते नहीं हैं। परवलयों के साथ सादृश्य होने के कारण इन्हें **n-वीं कोटि का परवलय** कहा जाता है।

6. निस्थापी और लगरथी फलन. फलन $y=a^x$, जिसमें a कोई स्थिर धनात्मक संख्या है, **निस्थापी फलन** कहलाता है। संख्या a धनात्मक रखने का कारण यह है कि $a<0$ होने पर $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$, $a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^3}$ आदि राशियां वास्तविक नहीं रह जायेंगी। तर्क x का कोई भी वास्तविक मान संभव है (§ 126)। फलन $y=a^x$ के सिर्फ धनात्मक मान लिये जाते हैं। यथा, फलन

$y=16^x$ $(x=\frac{1}{4})$ का सिर्फ एक मान $y=2$ लिया जाता है; मान -2 (और साथ ही $2i, -2i$) पर विचार नहीं किया जाता।

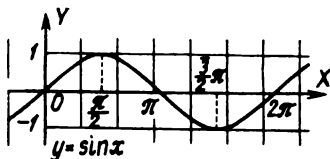
चित्र 246 में $a=\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}, 2, 3, 10$ के लिए निस्थापी फलन के ग्राफ दिखाये गये हैं। ये सभी ग्राफ बिंदु (0, 1) से गुजरते हैं ($a=1$ होने पर सरल रेखा मिलती है, जो क्रमकाक्ष के साथ समांतर होती है; फलन a^x एक स्थिर राशि बन जाती है, जिसका मान 1 के बराबर होता है)। $a>1$ होने पर ग्राफ बायें से दायें जाने पर ऊपर उठता है, $a<1$ होने पर नीचे उतरता है। सभी ग्राफ क्रमकाक्ष के असीम निकट होते जाते हैं, पर उस तक पहुँचते नहीं हैं। फलन $y=2^x$ और $y=(\frac{1}{2})^x$ के ग्राफ क्रमिताक्ष के सापेक्ष परस्पर सममित होते हैं, इसी तरह से $y=3^x$ और $y=(\frac{1}{3})^x$ (या व्यापक रूप में, $y=a^x$ और $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$) के ग्राफ क्रमिताक्ष के सापेक्ष परस्पर सममित होते हैं।

फलन $y=\log_a x$, जहाँ a कोई स्थिर धन संख्या है (लेकिन 1 के बराबर नहीं है, दे. § 128 और § 130 पर पाद-टिप्पणी), *लगरथी फलन* कहलाता है।

लगरथी फलन निस्थापी फलन का प्रतीप है। इसका ग्राफ (चित्र 247) निस्थापी फलन के ग्राफ से प्राप्त होता है (समान आधार a के लिए), जिसकी विधि निम्न है: चित्र को प्रथम चतुर्थांश की समद्विभाजक रेखा $[y=x]$ के सहारे मोड़ लेते हैं [ताकि निस्थापक फलन का ग्राफ चित्र के पुराने अर्ध से निकलकर दूसरे (नये) अर्ध में 'छप' जाये। कहने का तात्पर्य यह है कि एक ही आधार a के निस्थापी तथा लगरथी फलनों के ग्राफ सरल रेखा $y=x$ के सापेक्ष सममित होते हैं]। *सभी परस्पर प्रतीप फलनों के ग्राफ इसी प्रकार से प्राप्त होते हैं।*

चित्र 247

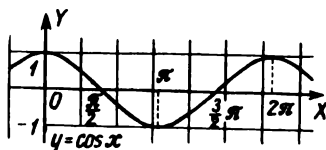
एक लगरथी फलन का ग्राफ दूसरे के ग्राफ के क्रमिताक्ष के पैमाने में तदनुरूप समानुपाती परिवर्तन करने से प्राप्त होता है: विभिन्न आधारों वाले (पर समान संख्या के) लगरथ परस्पर समानुपाती होते हैं (तुलना करें § 129 से)।

7. त्रिकोणमितिक फलन. आवर्तिता. त्रिकोणमितिक फलनों की परिभाषाएं देखें § 184 तथा § 194 में।

किसी परिवर्ती *कोण* के त्रिकोणमितिक फलन (जैसे ज्या) का ग्राफ खींचने के लिए क्रमकाक्ष पर कोई कर्त लेते हैं, जो कोई नियत कोण (जैसे 90^c) निरूपित करता है और क्रमिताक्ष पर ऐसा कर्त लेते हैं जो उस कोण की ज्या के अनुरूप किसी नियत संख्या (जैसे 1) को निरूपित करता है। दोनों अक्षों पर समान पैमाने की बात तभी चल सकती है, जब यह निर्धारित हो जाता है कि किस कोण को माप की इकाई के रूप में ग्रहण किया गया है। सिर्फ इसी अवस्था में कोण नापने वाली संख्या x और उसकी ज्या का मान बताने वाली संख्या y को इन संख्याओं के अनुपात वाले कर्तों द्वारा निरूपित किया जा सकता है। (तुलना करें § 206 से)।

चित्र 248

ग्राफ खींचने के लिए कोण नापने की इकाई रेडियन ही प्रयुक्त होती है। राशि x द्वारा परिवर्ती कोण की रेडियनी माप व्यक्त करने पर फलन $y = \sin x$ का ग्राफ चित्र 248 जैसा होगा (दोनों अक्षों पर समान पैमाने हैं)। कोण नापने की इकाई के रूप में यदि आधा रेडियन लिया जाये, तो ग्राफ को क्रमकाक्ष के अनुतीर दुगुना बढ़ाना पड़ेगा।

फलन $y = \sin x$ का ग्राफ व्यक्त करने वाली रेखा **ज्यावत** कहलाती है।

फलन $y = \cos x$ का ग्राफ चित्र 249 में दिखाया गया है। *यह भी ज्यावत रेखा है;* इसे फलन $y = \sin x$ को OX के अनुतीर कर्त $\frac{\pi}{2}$ की दूरी पर खिसका कर प्राप्त किया जा सकता है [$y = \sin x$ और $y = \cos x$ के ग्राफों को अलग-अलग क्रमशः **ज्या-वक्र** और **कोज्या-वक्र** भी कह सकते हैं]।

चित्र 249

ज्यावत (ज्या-वक्र या कोज्या-वक्र) को क्रमकाक्ष के अनुतीर कर्त 2π के बराबर बायें या दायें खिसकाने से ज्यावत स्वयं के साथ संपात कर जाती है।

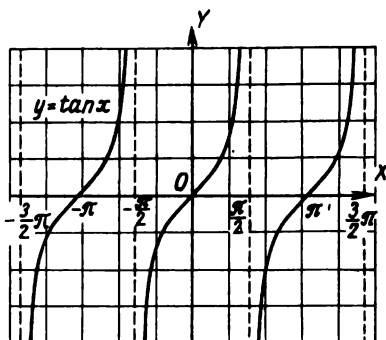
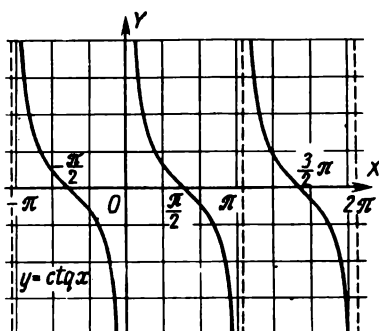
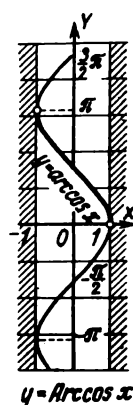
यदि किसी फलन $y = f(x)$ का ग्राफ क्रमकाक्ष के अनुतीर किसी स्थिर कर्त की दूरी पर खिसकाने से ग्राफ स्वयं के साथ संपात कर जाती है, तो ऐसे फलन को आवर्ती फलन कहते हैं; चुने गये पैमाने में इस स्थिर कर्त की लंबाई

p को फलन $f(x)$ का आवर्त कहते हैं। यह शाब्दिक परिभाषा संक्षेप में निम्न सूत्र से व्यक्त होती है :

$$f(x+p)=f(x).$$

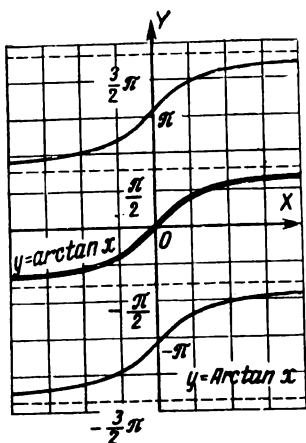
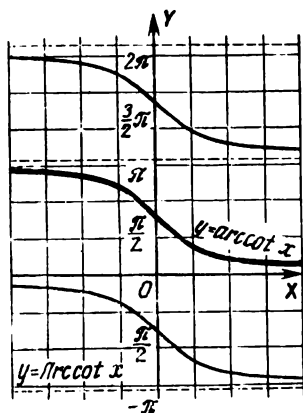
यदि किसी फलन $f(x)$ का आवर्त p है, तो $2p$, $3p$, $-2p$, $-3p$ आदि भी आवर्त हैं।

2π सभी त्रिकोणमिति फलनों का आवर्त है।

फलन $y=\tan x$ और $y=\cot x$ का इसके अतिरिक्त π भी आवर्त होता है, क्योंकि $\tan(x\pm k\pi)=\tan x$ है। ग्राफ $y=\tan x$ चित्र 250 में दिखाया गया है और ग्राफ $y=\cot x$ चित्र 251 में। स्पज का ग्राफ क्रमिताक्ष के समांतर उससे $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm 3\frac{\pi}{2}$, $\pm 5\frac{\pi}{2}$ आदि दूरियों पर स्थित

चित्र 250

चित्र 251 चित्र 252 चित्र 253

सरल रेखा के असीम निकट होता जाता है (पर उसे स्पर्श नहीं करता)। कोस्पज के ग्राफ के लिए यही भूमिका अक्ष OY स्वयं और इससे $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$ आदि दूरियों पर स्थित सरल रेखाएं निभाती हैं।

8. प्रतीप त्रिकोणमितिक फलन. इनकी परिभाषाएं § 203 में देखें (तुलना करें § 210 से)। यहां निम्न फलनों के ग्राफ दिये जा रहे हैं : $y=\text{Arcsin } x$

(चित्र 252), $y=\text{Arccos } x$ (चित्र 253), $y=\text{Arctan } x$ (चित्र 254), $y=\text{Arccot } x$ (चित्र 255) । ये ग्राफ फलन $y=\sin x$ आदि के ग्राफ से चित्र को प्रथम चतुर्थांश की समद्विभाजक रेखा पर मोड़ने से प्राप्त होते हैं (तुलना करें § 215 में संदर्भ 6 से) [अन्यत:, रेखा $y=x$ के सापेक्ष फलन $y=\sin x$ आदि का सममित बिंब खींचने से प्राप्त होते हैं] । फलन $y=\text{Arcsin } x$ और $y=\text{Arccos } x$ के ग्राफ पूर्णतया एक उदग्र पट्टी में समाविष्ट हो जाते हैं, जो सरल रेखा $x=+1$ तथा $x=-1$ से घिरी होती है

चित्र 254

चित्र 255

(ये फलन $|x|>1$ के लिए वास्तविक मान नहीं रखते) । उक्त पट्टी में स्थित हर उदग्र रेखा ग्राफ को असंख्य बार काटती है । यह अंतिम बात $y=\text{Arctan } x$ और $y=\text{Arccot } x$ के ग्राफों के लिए भी सत्य है; सिर्फ एक अंतर यह है कि इन फलनों के लिए उदग्र रेखा कहीं भी ले सकते हैं । उदग्र रेखा ग्राफ को असंख्य बार काटती है—इसका मतलब है कि तर्क के एक ही मान (जिस पर उदग्र रेखा खींची गयी है) के लिए फलन के मान (उदग्र रेखा के पाद से लेकर ग्राफ के साथ कटान-बिंदु तक की लंबाइयां) अनेक हैं । अन्यत:, ये फलन अनेकार्थी हैं (§ 203) । ग्राफ का वह भाग जो इन फलनों के मुख्य मान के अनुरूप है, चित्र 252-255 में मोटी रेखाओं से अंकित हैं ।

§ 216. समीकरणों का ग्राफिक हल

फलनों के ग्राफिक चित्रण की सहायता से हम एक अज्ञात राशि वाले किसी भी समीकरण और दो अज्ञात राशियों वाले दो समीकरणों के तंत्र का हल सन्निकृत रूप में सरलतापूर्वक ज्ञात कर सकते हैं।

दो अज्ञात राशि x, y वाले दो समीकरणों का तंत्र हल करने के लिए हम हर समीकरण को परिवर्ती राशि x, y के बीच फलनक निर्भरता का रूप मान लेते हैं और इन दो निर्भरताओं के लिए दो ग्राफ खींचते हैं। इन दोनों ग्राफों के सामूहिक बिंदुओं के दिशांक ही अज्ञात x, y के मान (प्रत्त समीकरण-तंत्र के मूल) होंगे।

उदाहरण 1. समीकरण-तंत्र हल करें :

$$7x+5y=35$$
$$-3x+8y=12.$$

इनमें से प्रत्येक समीकरण का ग्राफ सरल रेखा के रूप में है। प्रथम समीकरण का ग्राफ दिशाक्षों पर निम्न कर्त काटता है :

$$a=\frac{35}{7}=5,\ b=\frac{35}{5}=7;$$

दे. § 215, संदर्भ 2 [चित्र 256 में कर्त a अक्ष OX पर दिशांक-मूल O से शुरू माना जाता है और कर्त b अक्ष OY पर दिशांक-मूल O से शुरू माना जाता है; इन कर्तों के दूसरे सिरे मूलेतर सिरे कहला सकते हैं]। इन कर्तों के मूलेतर सिरों से गुजरने वाली सरल रेखा AB प्रथम समीकरण का ग्राफ है। इसी तरह से दूसरे समीकरण के लिए $a=-4$, $b=1.5$ प्राप्त करते हैं और सरल रेखा CD खींचते हैं।*

ग्राफों के कटान-बिंदु K के दिशांक ही x, y के इष्ट मान हैं। दिशांक के मान आँख से देखकर (अंदाजन) ज्ञात करते हैं : $x\ (=OP)=3.1$; $y(=PK)=2.7$। मूलों के शुद्ध मान होते $x=3\frac{7}{71}$, $y=2\frac{47}{71}$।

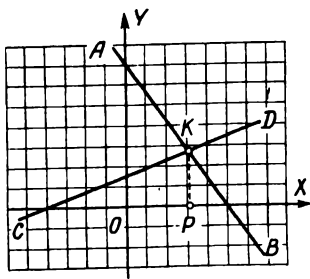
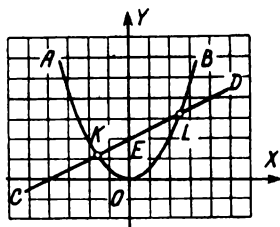
उदाहरण 2. समीकरण $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-2=0$.

---

* कर्त a, b ढूंढ़ने के बजाय सरल रेखा के कोई भी दो बिंदु अंकित कर लेने से भी सरल रेखा खींची जा सकती है; इसके लिए x के दो मनचाहे मान लिए जाते हैं और y के तदनुरूप मान ज्ञात किये जाते हैं [अधिक व्यावहारिक विधि है : एक बार $x=0$ मान कर y का मान (b, दे. ऊपर) ज्ञात करते हैं और एक बार $y=0$ मानकर x का मान (a, दे. ऊपर) ज्ञात करते हैं, बशर्ते कि सरल रेखा दिशांक-मूल से नहीं गुजरती हो।]

इसे ग्राफ-विधि से एक अज्ञात राशि वाले समीकरण की तरह भी हल किया जा सकता है (दे. नीचे उदाहरण 4)। लेकिन इसे समीकरण-तंत्र

$$y=\tfrac{1}{2}x^2,\ \ y=\tfrac{1}{2}x+2$$

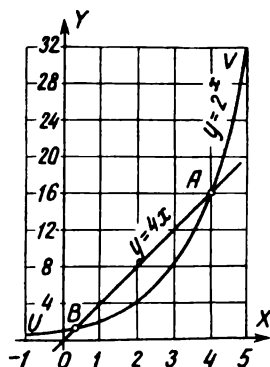
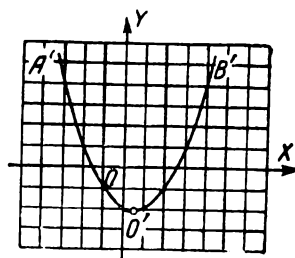
से बदल कर हल करना अधिक सरल है।

चित्र 256

चित्र 257

प्रथम समीकरण का ग्राफ (चित्र 257 में) परवलय AOB (§ 215, संदर्भ 4) है, जिसे कई बिंदु अंकित करके खींचते हैं। दूसरे समीकरण का ग्राफ सरल रेखा $=CD$ है, जो क्रमिताक्ष पर कर्त $b\ (=OE)=2$ है; उसका कोणिक $m\ (=\tan\angle DMX)=\frac{1}{2}$ है (§ 215, संदर्भ 2)। सरल रेखा CD के साथ परवलय AOB के दो कटान-बिंदु K तथा L हैं, जिनके क्रमक (अंदाज से) $x_1=-1.6$ तथा $x_2=2.6$ प्रत्त समीकरण के सन्निकृत मान हैं। सही मान होते :

$$x_1=\frac{1-\sqrt{17}}{2},\ \ x_2=\frac{1+\sqrt{17}}{2}.$$

उदाहरण 3. समीकरण $2^x=4x$ हल करें।

इसे बीजगणितीय समीकरण का रूप नहीं दिया जा सकता है। एक मूल $(x=4)$ सरलतापूर्वक चुन लिया जा सकता है। अन्य मूल (यदि वे हैं) ग्राफ-विधि से ज्ञात हो सकते हैं। इस समीकरण को समीकरण-तंत्र $y=2^x$, $y=4x$ से बदल देते हैं। अब निस्थापी फलन $y=2^x$ का ग्राफ (चित्र 258) खींचते हैं (तर्क के मान $x=-1, 0, 1, 2, 3$ आदि के अनुरूप बिंदु अंकित करके) और फलन $y=4x$ का ग्राफ (सरल रेखा) खींचते हैं। यहां क्रमित क्रमक की तुलना में कहीं अधिक तेजी से बढ़ रहे हैं, इसलिए अक्ष OX पर OY की अपेक्षा छोटा पैमाना लेना अच्छा होगा (चित्र 258 में वह चार गुना कम है)।

कटान-बिंदु B और A ढूंढ़ते हैं। बनावट से स्पष्ट है कि दोनों ग्राफों के अन्य सामूहिक बिंदु नहीं हैं। बिंदु A का क्रमक $x=4$ है, बिंदु B का क्रमक लगभग रूप में प्राप्त करते हैं : $x\approx 0.3$।

चित्र 258

चित्र 259

प्राप्त हल को कलन द्वारा शोधित कर सकते हैं। लगरथी सारणी की सहायता से $x=0.3$ के लिए 2^x का मान ज्ञात करते हैं। 1.231 प्राप्त होता है। यह संख्या $4x=1.200$ से कुछ ज्यादा है (0.031 अंश अधिक)। इसका मतलब है कि (दे. ग्राफ) संख्या 0.3 बिंदु B के क्रमक से कम है। अब मान $x=0.35$ की जाँच करेंगे। इस मान के लिए $2^x=1.275$ और $4x=1.400$ मिलते हैं। अब 2^x का मान $4x$ के मान से काफी कम है (0.125 अंश)। इसका मतलब है कि संख्या 0.35 बिंदु B के क्रमक से कम है, अतः x का वास्तविक मान 0.30 तथा 0.35 के बीच में है और प्रथम मान से करीब चौगुना निकट है बनिस्बत कि द्वितीय मान से (क्योंकि 0.031 चार गुना कम है बनिस्बत कि 0.125)। इसलिए $x\approx 0.31$ है। जाँच से पता चलता है कि इस मान के लिए $2^x=1.240$, $4x=1.240$ हैं। वैसे, $x=0.31$ मूल का शुद्ध मान नहीं है। यदि अधिक अंकों वाली लगरथी सारणी ली जाये, तो 2^x तथा $4x$ के बीच पाँचवें सार्थक अंक में अंतर मिलेगा। उपरोक्त विधि से मूल का और भी अधिक शुद्ध मान ज्ञात किया जा सकता है।

एक अज्ञात राशि वाला समीकरण हल करने के लिए, सभी पदों को बायीं ओर लाकर, इसे $f(x)=0$ का रूप देते हैं। $y=f(x)$ का ग्राफ खींचते हैं। इस ग्राफ का क्रमकाक्ष के साथ कटान-बिंदु ज्ञात करते हैं, जिनके क्रमक इष्ट मूल होते हैं।

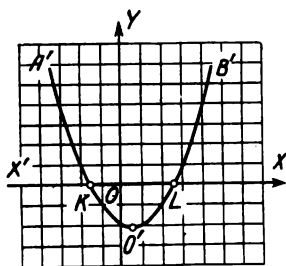
उदाहरण 4. समीकरण $\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x+2$ हल करें।

सभी पदों को बायीं ओर लाते हैं :

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-2=0.$$

फलन $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-2$ का ग्राफ खींचते हैं (बिंदु अंकित कर-करके)। प्राप्त होता है परवलय $A'O'B'$ (चित्र 259); इसका रूप वैसा ही है जैसा उदाहरण 2 के परवलय का; शीर्ष बिंदु $O'(\frac{1}{2}, -2\frac{1}{8})$ पर स्थित है (दे. § 215, संदर्भ 4)। क्रमकाक्ष से यह दो बिंदुओं पर कटता है। इनके क्रमकों का पठन लेने पर $x_1=-1.6$ तथा $x_2=2.6$ मिलते हैं।

§ 217. असमिकाओं का ग्राफिक हल

समीकरणों की तरह असमिकाओं के ग्राफिक हल भी अधिक शुद्ध परिणाम नहीं देते, लेकिन असमिकाओं (विशेषकर असमिका-तंत्रों) के हल में ग्राफिक विधि की दृगमता समीकरण हल करने की तुलना में कहीं अधिक महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाती है। हल करने की युक्तियां वे ही हैं, जो समीकरण हल करने में प्रयुक्त होती हैं (§ 216); सिर्फ हल बिंदुओं द्वारा नहीं, कर्तों द्वारा निरूपित होते हैं।

चित्र 260

उदाहरण 1. असमिका $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-2<0$ हल करें।

फलन $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-2$ का ग्राफ (चित्र 260) खींचते हैं (तुलना करें § 216, उदाहरण 4 से)।

शर्त के अनुसार $y<0$ होना चाहिए; इसका अर्थ है कि हल के अनुरूपी बिंदु क्रमकाक्ष के नीचे स्थित होने चाहिए। ग्राफ दिखाता है कि ऐसे बिंदुओं का ज्यामितिक स्थान परवलय $A'O'B'$ का चाप $KO'L$ है (इसके सिरे K तथा L हल में नहीं आते, क्योंकि इनके लिए $y=0$ है)।

प्रत्त असमिका को संतुष्ट करने वाले x के मान क्रमकाक्ष के कर्त KL के आंतरिक बिंदु हैं। पठन से ज्ञात होता है कि $-1.6<x<2.6$ है।

यदि शुद्ध हल ज्ञात करने की आवश्यकता है, तो बिंदु K तथा L के क्रमक कलन द्वारा, अर्थात् वर्ग-समीकरण $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-2=0$ के हल द्वारा ज्ञात करते हैं, जिसमें

$$\frac{1-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{17}}{2}.$$

उदाहरण 2. असमिका $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 2 > 0$ हल करें।

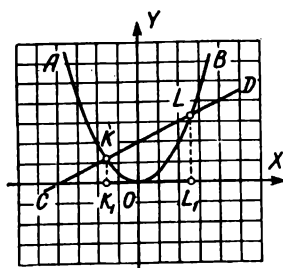
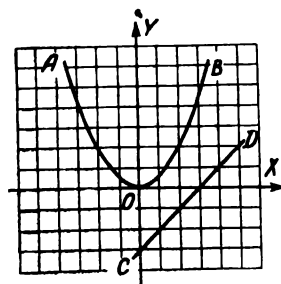
उदाहरण 1 वाला ही ग्राफ खींचते हैं। यहां $y > 0$ होना चाहिए, अर्थात् हल निरूपित करने वाले बिंदुओं को क्रमकाक्ष से ऊपर होना चाहिए। ऐसे बिंदुओं का ज्यामितिक स्थान रेखाएं KA' तथा LB' हैं, जो ऊपर की ओर अनंत जारी रहती हैं (आरंभिक बिंदु K तथा L हल में नहीं आते)। क्रमकाक्ष पर तदनुरूप बिंदु मिलकर किरण KX' तथा LX बनाते हैं (बिंदु K, L बहिष्कृत हैं)।

प्रत्त असमिका सत्य है, यदि (1) $x < -1.6$ है, (2) $x > 2.6$ है; शुद्ध हल है :

$$(1)\ x < \frac{1-\sqrt{17}}{2},\ (2)\ x > \frac{1+\sqrt{17}}{2}.$$

उदाहरण 3. असमिका $\frac{1}{2}x^2 < \frac{1}{2}x + 2$ हल करें।

यह असमिका $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 2 < 0$ के समतुल्य है, जिसे उदाहरण 1 में हल किया गया है, पर प्रत्त रूप में इसे हल करना अधिक आसान है।

फलन $y = \frac{1}{2}x^2$ का ग्राफ (चित्र 261, परवलय AOB) और फलन $\bar{y} = \frac{1}{2}x + 2$ (सरल रेखा CD) खींचते हैं (तुलना करें § 216, उदाहरण 2 से)। y के ऊपर पड़ी लकीर इसलिए खींची गयी है कि एक ही क्रमक के लिए परवलय और सरल रेखा के क्रमितों (y तथा $\bar{y}$) में भेद किया जा सके।

चित्र 261

चित्र 262

शर्त के अनुसार $y < \bar{y}$ है, अर्थात् समान क्रमकों के लिए परवलय के बिंदुओं को सरल रेखा के बिंदुओं से नीचे होना चाहिए। ग्राफ दिखाता है कि

रेखा AOB तथा CD के वे खंड (चाप KOL तथा कर्त KL), जो इस शर्त को पूरा करते हैं, क्रमकाक्ष के कर्त K_1L_1 के अनुरूप हैं (सिरे K_1 तथा L_1 बहिष्कृत हैं)। K तथा L के क्रमकों का पठन लेने पर सन्निकृत हल $-1.6 < x < 2.6$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 4. असमिका $\frac{1}{2}x^2 < x-3$ हल करें।

फलन $y=\frac{1}{2}x^2$ का ग्राफ (परवलय AOB) और फलन $\bar{y}=x-3$ का ग्राफ (सरल रेखा CD) खींचते हैं (चित्र 262)। $y<\bar{y}$ होना चाहिए। पर परवलय AOB सरल रेखा CD से पूर्णतया ऊपर है, अतः प्रत्त असमिका हलातीत है।

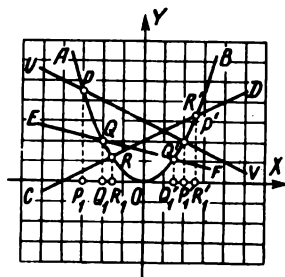
उदाहरण 5. असमिका $\frac{1}{2}x^2 > x-3$ हल करें। बनावट पिछले उदाहरण की तरह है, लेकिन यहां $y>\bar{y}$ होना चाहिए; इसलिए प्रत्त असमिका एक समात्मिका है, अर्थात् किसी भी x के लिए सत्य है।

उदाहरण 6. असमिका-तंत्र हल करें :

$$x+4 \leqslant x^2 \leqslant 6-x;\ \frac{1}{2}x^2 > \frac{3}{2}-\frac{1}{4}x.$$

प्रथम दो असमिकाओं की जगह समतुल्य असमिका लिखते हैं : $\frac{1}{2}x+2 \leqslant \frac{1}{2}x^2 \leqslant 3-\frac{1}{2}x$; निम्न फलनों के ग्राफ खींचते हैं (चित्र 263) : $y=\frac{1}{2}x^2$ (परवलय AOB), $y'=\frac{1}{2}x+2$ (सरल रेखा CD), $y''=3-\frac{1}{2}x$ (सरल रेखा UV), $\bar{y}=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}x$ (सरल रेखा EF)।

चित्र 263

प्रथम दो असमिकाओं की मांग है कि परवलय का चाप सरल रेखा CD के ऊपर हो तथा सरल रेखा UV से नीचे हो, या इन सरल रेखाओं के साथ सामूहिक बिंदु रखे। इन मांगों की पूर्ति परवलय का चाप RP (सिरे R, P समेत) करता है; क्रमकाक्ष पर इसका अनुरूप कर्त R_1P_1 है।

तीसरी असमिका की मांग है कि परवलय का चाप सरल रेखा EF के ऊपर हो; इससे हम चाप RP में से चाप QP अलग करते हैं (सिरा P को सम्मिलित करते हैं और Q को बहिष्कृत करते हैं)। क्रमकाक्ष पर चाप QP का सानुरूप कर्त Q_1P_1 है। बिंदु Q, P के क्रमकों का पठन लेते हैं, जिससे

$$-3 \leqslant x < -2.$$

उदाहरण 7. असमिका $\frac{x^2+x-6}{x^2-x-4}<0$ हल करें।

यह असमिका निम्न दो स्थितियों में संभव है :

(1) जब $x^2+x-6<0$ है और इसके साथ-साथ $x^2-x-4>0$ है;

(2) जब $x^2+x-6>0$ है और इसके साथ-साथ $x^2-x-6<0$ है।

प्रथम स्थिति में $x+4<x^2<6-x$ मिलता है। इस तंत्र का हल (दे. उदाहरण 6) ग्राफ के रूप में कर्त P_1R_1 है (सिरे P_1 और R_1 बहिष्कृत हैं)। दूसरी स्थिति में $x+4>x^2>6-x$ मिलता है। इस तंत्र को पिछले की भाँति हल करने पर परवलय AOB का चाप $P'R'$ मिलता है; क्रमकाक्ष पर इसका अनुरूप कर्त $P_1'R_1'$ है (सिरे $P_1'R_1'$ बहिष्कृत हैं)। बिंदु P, R, P', R' के क्रमकों का पठन लेकर देखते हैं कि प्रत्त असमिका-तंत्र निम्न स्थितियों में संतुष्ट होता है :

(1) $-3<x<-1.6$ होने पर;

(2) $2<x<2.6$ होने पर।

उदाहरण 8. असमिका $2^x<4x$ है।

फलन $y=2^x$ का ग्राफ (चित्र 258 में वक्र UV; पृ. 453) और फलन $\bar{y}=4x$ का ग्राफ (सरल रेखा AB) खींचते हैं। शर्त के अनुसार $y<\bar{y}$ है, अर्थात् वक्र UV के बिंदु सरल रेखा AB के बिंदुओं से नीचे होने चाहिए। बिंदु A और B के क्रमकों का पठन ले कर देखते हैं कि प्रत्त असमिका निम्न स्थिति में संतुष्ट होती है :

$$0.3<x<4$$

§ 218. वैश्लेषिक ज्यामिति के मूल तत्त्व

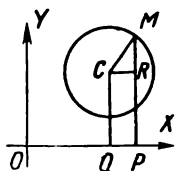
सरल (प्राथमिक) ज्यामिति में हर प्रश्न हल करने के लिए कुछ न कुछ पटुता की आवश्यकता होती है और अक्सर परस्पर सादृश्य रखने वाले प्रश्नों के लिए भी भिन्न युक्तियों का सहारा लेना पड़ता है। एक प्रश्न देखें : ऐसे बिंदुओं M का ज्यामितिक स्थान ज्ञात करें, जिनकी प्रत्त बिंदु A से दूरी MA तथा प्रत्त बिंदु B से दूरी MB परस्पर बराबर हों। हम जानते हैं कि इष्ट ज्यामितिक स्थान एक सरल रेखा है (जो कर्त AB के मध्य बिंदु पर लंब होती है) सरल

ज्यामिति में यह प्रश्न जिस विधि से हल होता है, वह निम्न प्रश्न हल करने में काम नहीं आयेगी : बिंदुओं M का ज्यामितिक स्थान ज्ञात करें, यदि बिंदु A तक इसकी दूरी MA बिंदु B तक इसकी दूरी MB से दुगुनी अधिक है।

वैश्लेषिक ज्यामिति एक ही साथ दो फ्रांसीसी गणितज्ञों—डेकार्ट (Decartes, 1596 – 1650) और फेर्मा (Fermat, 1601 – 1655)—द्वारा रची गई थी; यह ज्यामितिक प्रश्न हल करने की एकीकृत युक्तियां देती है और भिन्न प्रश्नों के बहुत बड़े समूहों का हल कुछेक नियमित युक्तियों के रूप में प्रस्तुत करती है। इसके लिए सभी प्रत्त और इष्ट बिंदुओं, रेखाओं, आदि को किसी दिशांक-व्यूह के साथ संबंधित किया जाता है (सिद्धांततः इस बात से कोई फर्क नहीं पड़ता कि दिशांक-व्यूह कैसे चुना गया है, पर सही ढंग से चुनने पर प्रश्न का हल सरल हो जाता है)।

दिशांक-व्यूह का चयन कर लेने के बाद हम हर बिंदु को उसके दिशांकों से और हर रेखा को उसके समीकरण से व्यक्त कर सकते हैं (§ 216)। इस तरह से प्रत्त ज्यामितिक प्रश्नों को बीजगणितीय प्रश्नों में रूपांतरित किया जाता है, जिनके हल के लिए हमें पर्याप्त व्यापक विधियां ज्ञात हैं।

उपरोक्त बात स्पष्ट करने के लिए निम्न उदाहरण देखते हैं।

उदाहरण 1. त्रिज्या r की परिधि दिशांक-व्यूह XOY (चित्र 264) से संबंधित की जाती है, जिसमें उसके केंद्र C का क्रमक $OQ=a$ तथा क्रमित $QC=b$ है। इस परिधि का समीकरण प्रस्तुत करें।

चित्र 264

मान लें कि $M(x, y)$ परिधि का मनमाना बिंदु है ($x=OP, y=PM$ है)। परिधि की परिभाषानुसार कर्त MC की लंबाई हमेशा एक स्थिर राशि r के बराबर होती है। MC को केंद्र C के स्थिर दिशांकों a, b तथा बिंदु M के परिवर्ती दिशांकों x, y के जरिये व्यक्त करते हैं। चित्र 264 से :

$$MC=\sqrt{CR^2+RM^2}=\sqrt{(OP-OQ)^2+(PM-QC)^2}$$
$$=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

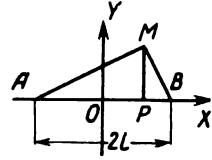
अतः
$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$$

या
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad (1)$$

यह परिधि का समीकरण है; दूसरे शब्दों में, समीकरण (1) का ग्राफ वृत्त की परिधि है।

उदाहरण 2. बिंदुओं M का ज्यामितिक स्थान ज्ञात करें, जिनके लिए $MA=2MB$ है (A, B प्रत्त बिंदु हैं; इनकी आपसी दूरी $2l$ है)।

चित्र 265

दिशांक-मूल कर्त AB के मध्य बिंदु O पर लेते हैं; एक अक्ष (चित्र 265 में OX) AB पर उसके अनुतीर गुजरता है। शर्त $MA=2MB$ को बिंदु $M(x, y)$ के दिशांकों के बीच समीकरण के रूप में लिखने के लिए MA तथा MB को दिशांकों में व्यक्त करते हैं। त्रिभुज MBP से :

$$MB=\sqrt{PB^2+PM^2}=\sqrt{(OB-OP)^2+PM^2}=\sqrt{(l-x)^2+y^2}.$$

ठीक इसी प्रकार, त्रिभुज AMP से :

$$MA=\sqrt{(x+l)^2+y^2}$$

अतः शर्त $MA=2MB$ का रूप होगा :

$$\sqrt{(x+l)^2+y^2}=2\sqrt{(l-x)^2+y^2}.$$

सरल करने के बाद प्राप्त होता है :

$$x^2-\tfrac{10}{3}lx+y^2+l^2=0. \qquad (2)$$

इष्ट ज्यामितिक स्थान इस समीकरण (2) का ग्राफ है। वैश्लेषिक ज्यामिति की विधियों से हम तुरंत निष्कर्ष दे सकते हैं कि यह ग्राफ *वृत्त की परिधि* है। समीकरण (2) की समीकरण (1) के साथ तुलना करके आप स्वयं देख ले सकते हैं। इसके लिए समीकरण (2) को निम्न रूप दें :

$$(x-\tfrac{5}{3}l)^2+y^2=(\tfrac{4}{3}l)^2.$$

हम देखते हैं कि यह और कुछ नहीं, बल्कि समीकरण (1) का एक विशिष्ट रूप है, जिसमें $a=\frac{5}{3}l$ है, $b=0$ है और $r=\frac{4}{3}l$ है।

अतः इष्ट ज्यामितिक स्थान वृत्त की परिधि है, जिसका केंद्र $C(\frac{5}{3}l, 0)$ है और त्रिज्या $r=\frac{4}{3}l$ है।

§ 219. सीमा

स्थिर राशि a को परिवर्ती राशि x की **सीमा** कहते हैं, यदि यह परिवर्ती राशि अपना मान बदलते हुए राशि a के असीम निकट होती

जाती है ।*

यह समझना बहुत महत्त्वपूर्ण है कि जब किसी *अकेली परिवर्ती राशि* पर विचार किया जाता है, तो उसकी सीमा ढूंढ़ने का कोई प्रश्न नहीं उठता । लेकिन जब दो परिवर्ती राशियों पर विचार किया जाता है, जिनमें से एक राशि दूसरी अनुतर्क का फलन होती है, तो एक (अनुतर्क) के लिए कोई सीमा *निर्धारित* की जाती है (उसे कोई सीमा प्रदान करते हैं) और दूसरी (फलन) के लिए तदनुरूप सीमा *ढूंढ़ते* हैं (यदि उसका अस्तित्व होता है) ।

उदाहरण 1. परिवर्ती राशियां x, y निर्भरता $y=\frac{x^2-4}{x-2}$ से संबंधित हैं; y की सीमा ज्ञात करें, जब x की सीमा संख्या 6 होती है ।

परिवर्ती राशि x का मान संख्या 6 के असीम निकट लाते हैं। यह किसी भी विधि से कर सकते हैं, यथा, x को निम्न मान प्रदान करते जाते हैं : 6.1, 6.01, 6.001 आदि । y के तदनुरूप मान 8.1, 8.01, 8.001 आदि होंगे; ये मान संख्या 8 के असीम निकट होते जायेंगे । x को संख्या 6 के असीम निकट *किसी भी विधि* से लाने पर यही फल मिलेगा । उदाहरणार्थ, हम मान सकते हैं कि x का मान निम्न प्रकार से बदल रहा है : $x=5.9, 6.01, 5.999, 6.0001$ आदि । इसीलिए जब x की सीमा 6 है, तो y की सीमा 8 है । इस वाक्य को गणितीय रूप में निम्न प्रकार से लिखते हैं :

$$\lim_{x\to 6} y=8 \quad \text{या} \quad \lim_{x\to 6}\frac{x^2-4}{x-2}=8$$

प्रतीक lim शब्द limit (=सीमा) से लिया गया है । इस प्रश्न का उत्तर व्यंजन $y=\frac{x^2-4}{x-2}$ में $x=6$ बैठा देने से भी मिल सकता था, लेकिन अगले उदाहरण में इस युक्ति से कोई सफलता नहीं मिलेगी ।

---

* यह परिभाषा पूर्णतया शुद्ध नहीं है, क्योंकि व्यंजन "असीम निकट होती है" को और भी तार्किक स्पष्टता देने की आवश्यकता है । इसे सही ढंग से संक्षेप में तथा साथ ही स्पष्ट तर्कसम्मत रूप से व्यक्त करना शायद ही संभव है । दिये गये उदाहरणों से इसका अर्थ उस हद तक समझ में आ जाता है, जितना यहां आवश्यक है । अन्य स्कूली पाठ्य-पुस्तकों में दी गयी परिभाषाएं भी अपूर्ण ही होती हैं, उनमें भी इसी तरह की कमियां अनिवार्य रूप से पायी जाती हैं ।

उदाहरण 2. प्रत्त है : $y=\frac{x^2-4}{x-2}$ । $\lim_{x \to 2} y$ ज्ञात करें।

व्यंजन $\frac{x^2-4}{x-2}$ में $x=2$ रखने पर व्यंजन $\frac{0}{0}$ मिलता है (§ 38)। लेकिन यदि उदाहरण 1 की भाँति कलन करते जायें, तो पता चलेगा कि $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}=4$ है। यह परिणाम एक अन्य विधि से भी मिल सकता है। $\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$ है। यदि $x \neq 2$ है, तो भिन्न को $(x-2)$ से काट सकते हैं ($x=2$ होने पर काटना अनधिकृत है !)। इससे $y=x+2$ मिलता है ($x \neq 2$ है)। अब x को 2 के असीम निकट लाते हैं (x का मान बदलते हुए, लेकिन x को 2 के बराबर नहीं होने देते); तब y, जो $x+2$ के ही बराबर रहेगा, 4 के असीम निकट होता जायेगा।

इस प्रश्न को कभी-कभी निम्न रूप में भी प्रस्तुत करते हैं : "$x=2$ होने पर, व्यंजन $\frac{x^2-4}{x-2}$ का सच्चा मान ज्ञात करें", या "$x=2$ के लिए अनिश्चित व्यंजन $\frac{x^2-4}{x-2}$ को निश्चित करें"। इन व्यंजनों का सही अर्थ यह है कि $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ ज्ञात करने के लिए कहा जा रहा है।

उदाहरण 2 में "अनिश्चित व्यंजन को निश्चित" करने के लिए भिन्न $\frac{x^2-4}{x-2}$ को $x-2$ से काटते हैं, फिर $x=2$ रखते हैं। पर यह विधि भी हमेशा काम नहीं आती।

§ 220. लुप्तमान और विराटमान राशियां

जिस परिवर्ती राशि की सीमा शून्य हो, उसे **लुप्तमान राशि** कहते हैं।

उदाहरण 1. परिवर्ती राशि $\sqrt{x+3}-2$ एक लुप्तमान राशि है, यदि x का मान 1 की ओर प्रवृत्त होता है (एक के असीम निकट होने लगता है), क्योंकि

$$\lim_{x \to 1} (\sqrt{x+3}-2)=0.$$

असीम वर्धी परम मान वाली परिवर्ती राशि को **विराटमान राशि** कहते हैं।

उदाहरण 2. परिवर्ती राशि $\frac{x}{x-5}$ एक विराटमान राशि है, यदि x का मान 5 के असीम निकट हो रहा है।

विराटमान राशि की सीमा नहीं होती। पर कहने की प्रथा है कि "विराटमान राशि की सीमा अनंत है", "विराटमान राशि अनंत को प्रवृत्त होती है", आदि। इसके अनुसार निम्न प्रतीक अपनाया गया है :

$$\lim_{x \to 5} \frac{x}{x-5} = \infty \qquad (1)$$

चिह्न ∞ (अनंत) का अर्थ कोई संख्या नहीं है, समिका (1) कोई समिका भी नहीं है; यह सिर्फ इतना व्यक्त करती है कि x जब 5 की ओर प्रवृत्त होने लगता है, तो $\frac{x}{x-5}$ का असीम वर्धन होने लगता है; भिन्न $\frac{x}{x-5}$ के मान धनात्मक भी हो सकते हैं ($x > 5$ होने पर) और ऋणात्मक भी ($x < 5$ होने पर)।

टिप्पणी. ऐसी भी स्थितियाँ संभव हैं, जब विराटमान राशि सिर्फ धनात्मक (या सिर्फ ऋणात्मक) मान ग्रहण करें। यथा, लुप्तमान राशि x के लिए राशि $\frac{1}{x^2}$ एक विराटमान राशि होगी जिसके मान $x > 0$ और $x < 0$ दोनों ही स्थितियों में धनात्मक होंगे। यह निम्न आलेख से व्यक्त करते हैं :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

इसके विपरीत, राशि $-\frac{1}{x^2}$ सदा ऋणात्मक है, अतः

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty \text{ लिखते हैं।}$$

इन बातों के अनुसार उदाहरण 2 का परिणाम निम्न रूप में लिखा जायेगा :

$$\lim_{x \to 5} \frac{x}{x-5} = \pm\infty.$$

उदाहरण 3. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-1}{x} = 1$ का अर्थ है कि जब x विराटमान संख्या है, तो राशि $\frac{x-1}{x}$ सीमा 1 की ओर प्रवृत्त होती है। प्रतीक $x \to \infty$ को पढ़ें: "एक्स भवीत अनंत"।

उदाहरण 4. वाक्य "वृत्त का क्षेत्रफल अंतरित बहुभुज के क्षेत्रफल की सीमा है, जब उसकी भुजाओं की संख्या अनंत बढ़ने लगती है" का अर्थ यह है कि बहुभुज की भुजाओं की संख्या अनंत बढ़ाते जाने पर उसकी परिरेखा, वृत्त की परिरेखा पर संपात होने की प्रवृत्ति रखती है, और उसका क्षेत्रफल वृत्त के क्षेत्रफल के असीम निकट होने लगता है।

अनुक्रमणिका

अ

इ

ऊ

क

ग

भ

म

श्र

ह्

क्ष

त्र

ऋ

●

पाठकों से

मीर प्रकाशन इस पुस्तक के अनुवाद और डिजाइन संबंधी आपके विचारों के लिये आपका अनुगृहीत होगा। आपके अन्य सुझाव प्राप्त करके भी हमें बड़ी प्रसन्नता होगी। कृपया हमें इस पते पर लिखिये :

मीर प्रकाशन
पेर्वी रीज़्स्की पेरेऊलोक, २
मास्को, सोवियत संघ

प्रकाशनाधीन

विज्ञान और तकनीकी विकास में चालिकी (साइबरनेटिक्स) की क्या भूमिका है? मानव-संस्कृति को वह क्या दे सकती है? – इन प्रश्नों के उत्तर के लिये पढ़ें:

अकादमीशियन

वि. ग्लुइकोव

रचित

चालिकी क्या है?

एक तीव्र विकासशील विज्ञान के साथ प्रथम परिचय!

प्रकाशनाधीन

विश्वविख्यात भौतिकविद

ले. लंदाऊ और **यु. रूमेर**

रचित

सापेक्षिकता-सिद्धांत क्या है ?

भौतिकी के एक जटिल नियम को सरल और सुबोध भाषा में समझाने का एक अद्वितीय प्रयोग !

प्रकाशनाधीन

सर्वसुलभ भाषा में

से. वेनेत्स्की

रचित

कहानियां धातुओं की

किस्सों, दंतकथाओं और मजेदार लतीफों के ताने-बाने में धातुओं के आविष्कार और उनके बढ़ते उपयोग का गंभीर इतिहास।

प्रकाशनाधीन

विख्यात विज्ञान-प्रचारक

या. पेरेलमान

की अद्वितीय पुस्तक

मनोरंजक बीजगणित

पाठकों में गणितीय चिंतन की
क्षमता विकसित करने के लिये
दैनंदिन जीवन में बीजगणित के
रोचक उपयोग की
सरस कहानियां।